Univ. u Novom Sadu,
Zb. Rad. Prirod.-Mat. Fak.
Ser. Mat. 17,2, 89-108(1987)

REVIEW OF RESEARCH
FACULTY OF SCIENCE
MATHEMATICS SERIES

ОДИН КЛАСС 6-ГРУППОИДОВ И 2H-ГЕОМЕТРИИ

Янез Ушан

*University of Novi Sad, Faculty of Science,
Institute of Mathematics, Dr. I. Djuričića 4,
21000 Novi Sad, Yugoslavia*

РЕЗЮМЕ

В [4] ([5]) доказано, что A_t-квазигруппы (A_t-группоиды) являются координатизациоными системами *конечных* 2H-геометрии. В настоящей работе рассматривается координатизация 2H-геометрии с помощью E-6-группоидов.

★

Объект (Q,A) называется n-группоидом, $n \in N$, тогда и только тогда, когда A является отображением множества Q^n в множество Q. Элемент $e \in Q$ называется идемпотентным элементом n-группоида (Q,A) тогда и только тогда, когда имеет место $A(e^n) = e$. Элемент $0 \in Q$ называется нулем n-группоида (Q,A), $n \in N \setminus \{1\}$, тогда и только тогда, когда имеет место::

$$(\forall a_1 \in Q)\ldots(\forall a_n \in Q)\big(\bigvee_{i=1}^{n} a_i = 0 \Rightarrow A(a_1^n) = 0\big).$$

Нуль n-группоида является его идемпотентным эментом. В n-груп-

---

AMS Mathematisc Subject Classification (1980): 20N15

Key words and phrases: E-6-groupoids, A_t-quasigroups, A_t-groupoids, 2H-geometry.

поиде (Q,A), $n \in N \setminus \{1\}$, имеет место закон (i,j)-ассоциативности, $i \neq j$, $i,j \in \{1,\dots,n\}$, тогда и только тогда, когда

$$(\mathrm{A}) \qquad A(a_1^{i-1},A(A_i^{i+n-1}),a_{i+n}^{2n-1}) = A(a_1^{j-1},A(a_j^{j+n-1}),a_{j+n}^{2n-1})$$

для любых элементов $a_1^{2n-1} \in Q$.

Пуст ρ n-арное отношение, $n \in N \setminus \{1\}$, в множестве $\mathfrak{C}$. ρ называется n-арным отношением эквивалентности в множестве $\mathfrak{C}$ тогда и только тогда, когда имеет место:

$$(\mathrm{P}) \qquad (\forall a_1 \in \mathfrak{C})\dots(\forall a_{n-1} \in \mathfrak{C})(a_1^{n-1},a_1) \in \rho;$$

$$(\mathrm{C}) \qquad (\forall a_1 \in \mathfrak{C})\dots(\forall a_n \in \mathfrak{C})((a_1^n) \in \rho \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\forall \alpha \in \{1,\dots,n\}!)(a_{\alpha 1},\dots,a_{\alpha n}) \in \rho); \text{ и}$$

$$(\mathrm{T}) \qquad (\forall a_1 \in \mathfrak{C})\dots(\forall a_{n+1} \in \mathfrak{C})((a_1^n) \in \rho \wedge (a_2^{n+1}) \in \rho \wedge$$
$$\wedge\ |\{a_2^n\}| = n-1 \Rightarrow (a_1^{n-1},a_{n+1}) \in \rho)\ [3].$$

* *

Пусть в 6-групоиде (Q,A) имеют место следующие импликации::

$$(\mathrm{O}) \qquad |\{x,y,z,u\}| = 4 \Rightarrow$$

$$(\mathrm{A}_1) \qquad A(x,\overset{3}{y},A(\overset{2}{z},\overset{3}{y},u),u) = A(x,\overset{3}{y},z,A(z,\overset{3}{y},\overset{2}{u})),$$

$$(\mathrm{A}_2) \qquad A(\overset{3}{y},A(\overset{2}{z},\overset{3}{y},u),u,x) = A(\overset{3}{y},z,A(z,\overset{3}{y},\overset{2}{u}),x),$$

$$(\mathrm{A}_3) \qquad A(x,A(\overset{2}{z},\overset{3}{y},u),u,\overset{3}{y}) = A(x,z,A(z,\overset{3}{y},\overset{2}{u}),\overset{3}{y}),$$

$$(\mathrm{A}_4) \qquad A(A(\overset{2}{z},\overset{3}{y},u),u,x,\overset{3}{y}) = A(z,A(z,\overset{3}{y},\overset{2}{u}),x,\overset{3}{y}),$$

$$(\mathrm{A}_5) \qquad A(A(\overset{2}{z},\overset{3}{y},u),u,\overset{3}{y},x) = A(z,A(z,\overset{3}{y},\overset{2}{u}),\overset{3}{y},x),$$

(A₆) $A(\overset{3}{y},x,A(\overset{2}{z},\overset{3}{y},u),u) = A(\overset{3}{y},x,z,A(z,\overset{3}{y},\overset{2}{u}))$,

(A₇) $A(x,\overset{2}{y},A(\overset{3}{z},\overset{2}{y},u),\overset{2}{u}) = A(x,\overset{2}{y},\overset{2}{z},A(z,\overset{2}{y},\overset{3}{u}))$,

(A₈) $A(\overset{2}{y},A(\overset{3}{z},\overset{2}{y},u),\overset{2}{u},x) = A(y,\overset{2}{z},A(z,\overset{2}{y},\overset{3}{u}),x)$,

(A₉) $A(x,A(\overset{3}{z},\overset{2}{y},u),\overset{2}{u},\overset{2}{y}) = A(x,\overset{2}{z},A(z,\overset{2}{y},\overset{3}{u}),\overset{2}{y})$,

(A₁₀) $A(A(\overset{3}{z},\overset{2}{y},u),\overset{2}{u},x,\overset{2}{y}) = A(\overset{2}{z},A(z,\overset{2}{y},\overset{3}{u}),x,\overset{2}{y})$,

(A₁₁) $A(A(\overset{3}{z},\overset{2}{y},u),\overset{2}{u},\overset{2}{y},x) = A(\overset{2}{z},A(z,\overset{2}{y},\overset{3}{u}),\overset{2}{y},x)$,

(A₁₂) $A(\overset{2}{y},x,A(\overset{3}{z},\overset{2}{y},u),\overset{2}{u}) = A(\overset{2}{y},x,\overset{2}{z},A(z,\overset{2}{y},\overset{3}{u}))$[1)]

для любых $x,y,z,u \in Q$.

Пусть, далее, существует множество $\hat{Q} \subseteq Q$, $|\hat{Q}| \geq 2$, такое что имеет место:

(I) $(\forall x \in Q)(\forall y \in Q)(y \in \hat{Q} \Rightarrow A(x,\overset{5}{y}) = x \wedge A(\overset{5}{y},x) = x \wedge$
$\wedge\ A(\overset{2}{y},x,\overset{3}{y}) = x \wedge A(\overset{3}{y},x,\overset{2}{y}) = x)$[2)].

Такой 6-группоид позволим себе назвать эквивалентностьным 6-группоидом или, короче, E-6-группоидом.

* * *

Утверждение 1. Пусть (Q,A) E-6-группоид. Пусть, далее, ρ тернарное отношение в множестве $\hat{Q}$, определено следующим образом:

---

1) (A_1)–(A_{12}) являются, в том же порядке, закон специальной (5,6)-, (4,5)-, (2,3)-, (1,2)-, (1,2)-, (5,6)-, (4,6)-, (3,5)-, (2,4)-, (1,3)-, и (4,6)-ассоциативности.

2) непосредственным следствием высказывания под (I) является следующее высказывание: $(\forall x \in Q)(x \in \hat{Q} \Rightarrow A(\overset{6}{x}) = x)$. Притом, если в (Q,A) существуют идемпотентный элемент нуль 0, то $0 \notin \hat{Q}$.

(а) $$|\{x,y\}| \in \{1,2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (((y,x,y) \in \rho \Leftrightarrow A(\overset{2}{y},x,\overset{3}{y}) = x \wedge A(\overset{3}{y},x,\overset{2}{y}) = x) \wedge$$

$$\wedge ((x,\overset{2}{y}) \in \rho \Leftrightarrow A(x,\overset{5}{y}) = x) \wedge ((\overset{2}{y},x) \in \rho \Leftrightarrow A(\overset{5}{y},x) = x))$$

для любых $x,y \in \hat{Q}$; и

(б) Если $|\{a_1^3\}| = 3$, тогда имеет место: $(a_1^3) \in \rho$ тогда и только тогда, когда справедливо

$$(1) \qquad \begin{cases} A(a_{\alpha 1},\overset{2}{a}_{\alpha 2},\overset{3}{a}_{\alpha 3}) = a_{\alpha 1} \wedge A(a_{\alpha 1},\overset{3}{a}_{\alpha 3},\overset{2}{a}_{\alpha 2}) = a_{\alpha 1} \wedge \\ A(\overset{2}{a}_{\alpha 2},a_{\alpha 1},\overset{3}{a}_{\alpha 3}) = a_{\alpha 1} \wedge A(\overset{3}{a}_{\alpha 3},a_{\alpha 1},\overset{2}{a}_{\alpha 2}) = a_{\alpha 1} \wedge \\ A(\overset{2}{a}_{\alpha 2},\overset{3}{a}_{\alpha 3},a_{\alpha 1}) = a_{\alpha 1} \wedge A(\overset{3}{a}_{\alpha 3},\overset{2}{a}_{\alpha 2},a_{\alpha 1}) = a_{\alpha 1} \end{cases}$$

для любых $a_1^3 \in \hat{Q}$ и каждого $\alpha \in \{1,2,3\}$|[1)]. Тогда ρ является тернарным отношением эквивалентности в множестве $\hat{Q}$.

Доказательство

1) Из "первой части" условия (а) непосредственно находим, что ρ является рефлексивным отношением, т.е., что ρ удовлетворяет условию (P).

2) Из (а), учитывая (I), находим, что ρ является симметричной в случае $|\{a_1^3\}| \le 2$. Далее, из (б), учитывая факт, что конъюнкция является комутативной и ассоциативной, находим, что ρ является симметричной и в случае $|\{a_1^3\}| = 3$. Таким образом, ρ является симметричным отношением в $\hat{Q}$, т.е., ρ удовлетворяет условию (C).

3) Тернарное отношение ρ в множестве $\hat{Q}$ является транзитивным тогда и только тогда, когда из

(ц) $$|\{a_2^3\}| = 2,$$

(д) $$(a_1,a_2,a_3) \in \rho \quad \text{и}$$

1) (1) является конъюнкцией из 36 равенств.

(е) $(a_2, a_3, a_4) \in \rho$

следует

(ж) $(a_1, a_2, a_4) \in \rho$

для любых $a_1^4 \in \hat{Q}$; (Т).

Пусть a_1^3 любые элементы множества $\hat{Q}$ удовлетворяющие условиям (ц), (д) и (е).

3_1) Пусть $|\{a_1^4\}| \in \{1,2,3\}$. Условие $|\{a_1^4\}| \in \{1,2,3\}$ имеет место тогда и только тогда, когда имеет место следующая дизъюнкция:

(з) $$a_1 = a_2 \vee a_1 = a_3 \vee a_1 = a_4 \vee a_2 = a_3 \vee a_2 = a_4 \vee$$
$$\vee a_3 = a_4.$$

Притом, справедливость равенства $a_2 = a_3$, одновременна справедливость первых двух равенств, одновременна справедливость пятого и шестого равенства и одновременна справедливость всех равенств противоречит условию (ц).

Если имеет место равенство $a_1 = a_2$, то, ввиду (С) и (Р), имеет место (ж). Если имеет место равенство $a_1 = a_3$, то (е) станет высказыванием $(a_2, a_1, a_4) \in \rho$. Отсюда, ввиду (С), находим, что, если имеет место равенство $a_1 = a_3$, то имеет место высказывание под (ж). Если имеет место равенство $a_1 = a_4$, то (ж) станет высказыванием $(a_1, a_2, a_1) \in \rho$. Отсюда, ввиду (Р), находим, что, если имеет место равенство $a_1 = a_4$, то имеет место высказывание под (ж). Если имеет место равенство $a_2 = a_4$, то (ж) станет высказыванием $(a_1, a_2, a_2) \in \rho$. Отсюда, ввиду (С) и (Р), находим, что, если имеет место равенство $a_2 = a_4$, то имеет место высказывание под (ж). Наконец, если имеет место равенство $a_3 = a_4$, то (д) станет высказыванием $(a_1, a_2, a_4) \in \rho$. Отсюда находим, что, если имеет место равенство $a_3 = a_4$, то имеет место высказывание под (ж).

3_2) Пусть, наконец, $|\{a_1^4\}| = 4$.

Так как $(a_1^3) \in \rho$, то имеет место (1) для каждого $\alpha \in$

$\in \{1,2,3\}$!. Далее, так как $(a_2^4) \in \rho$, то имеет место:

$$A(a_{\beta 2},\overset{2}{a}_{\beta 3},\overset{3}{a}_{\beta 4}) = a_{\beta 2} \wedge A(a_{\beta 2},\overset{3}{a}_{\beta 4},\overset{2}{a}_{\beta 3}) = a_{\beta 2} \wedge$$

$$(1') \qquad A(\overset{2}{a}_{\beta 3},a_{\beta 2},\overset{3}{a}_{\beta 4}) = a_{\beta 2} \wedge A(\overset{3}{a}_{\beta 4},a_{\beta 2},\overset{2}{a}_{\beta 3}) = a_{\beta 2} \wedge$$

$$A(\overset{2}{a}_{\beta 3},\overset{3}{a}_{\beta 4},a_{\beta 2}) = a_{\beta 2} \wedge A(\overset{3}{a}_{\beta 4},\overset{2}{a}_{\beta 3},a_{\beta 2}) = a_{\beta 2}$$

для каждого $\beta \in \{2,3,4\}$! Докажем, что имеет место:

$$A(a_{\gamma 1},\overset{2}{a}_{\gamma 2},\overset{3}{a}_{\gamma 4}) = a_{\gamma 1} \wedge A(a_{\gamma 1},\overset{3}{a}_{\gamma 4},\overset{2}{a}_{\gamma 2}) = a_{\gamma 1} \wedge$$

$$(1'') \qquad A(\overset{2}{a}_{\gamma 2},a_{\gamma 1},\overset{3}{a}_{\gamma 4}) = a_{\gamma 1} \wedge A(\overset{3}{a}_{\gamma 4},a_{\gamma 1},\overset{2}{a}_{\gamma 2}) = a_{\gamma 1}$$

$$A(\overset{2}{a}_{\gamma 2},\overset{3}{a}_{\gamma 4},a_{\gamma 1}) = a_{\gamma 1} \wedge A(\overset{3}{a}_{\gamma 4},\overset{2}{a}_{\gamma 2},a_{\gamma 1}) = a_{\gamma 1} \wedge$$

для каждого $\gamma \in \{1,2,4\}$!.

Рассмотрим, вперые, следующие равенства из (1):

$$(и_1) \qquad a_1 = A(\ldots,\overset{2}{a}_3,\ldots)^{1)} \quad \text{и}$$

$$(и_2) \qquad a_1 = A(\ldots,\overset{3}{a}_3,\ldots)^{2)}.$$

Из $(и_1)$ и $(и_2)$, учитывая следующие равенства из (1')

$$a_3 = A(\overset{2}{a}_4,\overset{3}{a}_2,a_3)$$

$$a_3 = A(\overset{3}{a}_4,\overset{2}{a}_2,a_3),$$

в том же порядке, получаем равенства

$$(и'_1) \qquad a_1 = A(\ldots,A(\overset{2}{a}_4,\overset{3}{a}_2,a_3),a_3\ldots) \quad \text{и}$$

---

1) Реч идет о следующих равенствах: $a_1 = A(a_1,\overset{3}{a}_2,\overset{2}{a}_3)$, $a_1 = A(a_1,\overset{2}{a}_3,\overset{3}{a}_2)$, $a_1 = A(\overset{3}{a}_2,\overset{2}{a}_3,a_1)$, $a_1 = A(\overset{2}{a}_3,\overset{3}{a}_2,a_1)$, $a_1 = A(\overset{2}{a}_3,a_1,\overset{3}{a}_2)$, $a_1 = A(\overset{3}{a}_2,a_1,\overset{2}{a}_3)$.

2) Реч идет о следующих равенствах: $a_1 = A(a_1,\overset{2}{a}_2,\overset{3}{a}_3)$, $a_1 = A(a_1,\overset{3}{a}_3,\overset{2}{a}_2)$, $a_1 = A(\overset{2}{a}_2,\overset{3}{a}_3,a_1)$, $a_1 = A(\overset{3}{a}_3,\overset{2}{a}_2,a_1)$, $a_1 = A(\overset{3}{a}_3,a_1,\overset{2}{a}_2)$, $a_1 = A(\overset{2}{a}_2,a_1,\overset{3}{a}_3)$.

$(и_2')$ $\quad a_1 = A(\ldots,A(\overset{3}{a}_4,\overset{2}{a}_2,a_3),\overset{2}{a}_3,\ldots).$

Далее, учитывая специальные условные (i,j)-ассоциативности

$$(0) \Rightarrow (A_i),\ i \in \{1,\ldots,6\},\ и$$

$$(0) \Rightarrow (A_i),\ i \in \{7,\ldots,12\},$$

и следующие равенства из $(1')$

$$a_4 = A(a_4,\overset{3}{a}_2,\overset{2}{a}_3)$$

$$a_4 = A(a_4,\overset{2}{a}_2,\overset{3}{a}_3),$$

в том же порядке, в $(и_1')$ и $(и_2')$, находим, что имеют место равенства:

$$a_1 = A(\ldots,A(\overset{2}{a}_4,\overset{3}{a}_2,a_3),a_3,\ldots) =$$

$$= A(\ldots,a_4,A(a_4,\overset{3}{a}_2,\overset{2}{a}_3),\ldots) =$$

$$= A(\ldots,\overset{2}{a}_4,\ldots\ ;\ и$$

$$a_1 = A(\ldots,A(\overset{3}{a}_4,\overset{2}{a}_2,a_3),\overset{2}{a}_3,\ldots) =$$

$$= A(\ldots,\overset{2}{a}_4,A(a_4,\overset{2}{a}_2,\overset{3}{a}_3) =$$

$$= A(\ldots,\overset{3}{a}_4,\ldots),$$

т.е. равенства

$$a_1 = A(\ldots,\overset{2}{a}_4,\ldots)\ и$$

$$a_1 = A(\ldots,\overset{3}{a}_4,\ldots).$$

Речь идет о 12 равенств из $(1'')$.

Рассмотрим, далее, следующие равенства из (1):

(й_1) $\quad a_2 = A(\ldots,\overset{2}{a}_3,\ldots)$[1] и

(й_2) $\quad a_2 = A(\ldots,\overset{3}{a}_3,\ldots)$[2].

Из $(\text{й}'_1)$ и $(\text{й}'_2)$, учитывая следующие равенства из $(1')$

$$a_3 = A(\overset{2}{a}_4,\overset{3}{a}_2,a_3) \text{ и}$$

$$a_3 = A(\overset{3}{a}_4,\overset{2}{a}_2,a_3),$$

в том же порядке, получаем равенства

$(\text{й}'_1)$ $\quad a_2 = A(\ldots,A(\overset{2}{a}_4,\overset{3}{a}_2,a_3),a_3,\ldots)$ и

$(\text{й}'_2)$ $\quad a_2 = A(\ldots,A(\overset{3}{a}_4,\overset{2}{a}_2,a_3),\overset{2}{a}_3,\ldots)$.

Далее, учитывая специальные условные (i,j)-ассоциативности

$$(0) \Rightarrow (A_i),\ i \in \{1,\ldots,6\}, \text{ и}$$

$$(0) \Rightarrow (A_i),\ i \in \{7,\ldots,12\},$$

и следующие равенства из $(1')$

$$a_4 = A(a_4,\overset{3}{a}_2,\overset{2}{a}_3)$$

$$a_4 = A(a_4,\overset{2}{a}_2,\overset{3}{a}_3),$$

в том же порядке, в $(\text{й}'_1)$ и $(\text{й}'_2)$, находим, что имеют место равенства:

---

[1] Речь идет о следующих равенствах: $a_2 = A(\overset{3}{a}_1,a_2,\overset{2}{a}_3)$, $a_2 = A(\overset{3}{a}_1,\overset{2}{a}_3,a_2)$, $a_2 = A(a_2,\overset{2}{a}_3,\overset{3}{a}_1)$, $a_2 = A(a_2,\overset{3}{a}_1,\overset{2}{a}_3)$, $a_2 = A(\overset{2}{a}_3,\overset{3}{a}_1,a_2)$, $a_2 = A(\overset{2}{a}_3,a_2,\overset{3}{a}_1)$.

[2] Речь идет о следующих равенствах: $a_2 = A(\overset{2}{a}_1,a_2,\overset{3}{a}_3)$, $a_2 = A(\overset{2}{a}_1,\overset{3}{a}_3,a_2)$, $a_2 = A(a_2,\overset{3}{a}_3,\overset{2}{a}_1)$, $a_2 = A(a_2,\overset{2}{a}_1,\overset{3}{a}_3)$, $a_2 = A(\overset{3}{a}_3,\overset{2}{a}_1,a_2)$, $a_2 = A(\overset{3}{a}_3,a_2,\overset{2}{a}_1)$.

$$a_2 = A(\ldots,A(\overset{2}{a}_4,\overset{3}{a}_2,a_3),a_3,\ldots)$$

$$= A(\ldots,a_4,A(a_4,\overset{3}{a}_2,\overset{2}{a}_3),\ldots)$$

$$= A(\ldots,\overset{2}{a}_4,\ldots); \text{ и}$$

$$a_2 = A(\ldots,A(\overset{3}{a}_4,\overset{2}{a}_2,a_3),\overset{2}{a}_3,\ldots)$$

$$= A(\ldots,\overset{2}{a}_4,A(a_4,\overset{2}{a}_2,\overset{3}{a}_3),\ldots)$$

$$= A(\ldots,\overset{3}{a}_4,\ldots),$$

т.е. равенства

$$a_2 = A(\ldots,\overset{2}{a}_4,\ldots)$$

$$a_2 = A(\ldots,\overset{3}{a}_4,\ldots).$$

Речь идет о (новых) 12 равенств из (1´´).

Наконец, расмотрим следующие равенства из (1´):

(к$_1$) $\quad a_4 = A(\ldots,\overset{2}{a}_3,\ldots)$[1] и

(к$_2$) $\quad a_4 = A(\ldots,\overset{3}{a}_3,\ldots)$[2].

Из (к$_1$) и (к$_2$), учитывая следующие равенства и (1)

$$a_3 = A(\overset{2}{a}_1,\overset{3}{a}_2,a_3) \text{ и}$$

$$a_3 = A(\overset{3}{a}_1,\overset{2}{a}_2,a_3),$$

том же порядке, получаем равенства

---

[1] Речь идет о следующих равенствах: $a_4 = A(\overset{3}{a}_2,\overset{2}{a}_3,a_4)$, $a_4 = A(\overset{3}{a}_2,a_4,\overset{2}{a}_3)$, $a_4 = A(\overset{2}{a}_3,\overset{3}{a}_2,a_4)$, $a_4 = A(\overset{2}{a}_3,a_4,\overset{3}{a}_2)$, $a_4 = A(a_4,\overset{2}{a}_3,\overset{3}{a}_2)$, $a_4 = A(a_4,\overset{3}{a}_2,\overset{2}{a}_3)$.

[2] Речь идет о следующих равенствах: $a_4 = A(\overset{2}{a}_2,\overset{3}{a}_3,a_4)$, $a_4 = A(\overset{2}{a}_2,a_4,\overset{3}{a}_3)$, $a_4 = A(\overset{3}{a}_3,a_4,\overset{2}{a}_2)$, $a_4 = A(\overset{3}{a}_3,\overset{2}{a}_2,a_4)$, $a_4 = A(a_4,\overset{2}{a}_2,\overset{3}{a}_3)$, $a_4 = A(a_4,\overset{3}{a}_3,\overset{2}{a}_2)$.

$(к_1')$ $\quad a_4 = A(\ldots,A(\overset{2}{a}_1,\overset{3}{a}_2,a_3),a_3,\ldots)$

$(к_2')$ $\quad a_4 = A(\ldots,A(\overset{3}{a}_1,\overset{2}{a}_2,a_3),\overset{2}{a}_3,\ldots)$.

Далее, учитывая специальные условные (i,j)-ассоциативности

$$(0) \Rightarrow (A_i),\ i \in \{1,\ldots,6\},\ и$$

$$(0) \Rightarrow (A_i),\ i \in \{7,\ldots,12\},$$

и следующие равенства из (1)

$$a_1 = A(a_1,\overset{3}{a}_2,\overset{2}{a}_3)$$

$$a_1 = A(a_1,\overset{2}{a}_2,\overset{3}{a}_3),$$

в том же порядке, в $(к_1')$ и $(к_2')$, находим, что имеют место равенства:

$$\begin{aligned} a_4 &= A(\ldots,A(\overset{2}{a}_1,\overset{3}{a}_2,a_3),a_3,\ldots) \\ &= A(\ldots,a_1,A(a_1,\overset{3}{a}_2,\overset{2}{a}_3),\ldots) \\ &= A(\ldots,\overset{2}{a}_1,\ldots);\ и \\ a_4 &= A(\ldots,A(\overset{3}{a}_1,\overset{2}{a}_2,a_3),\overset{2}{a}_3,\ldots) \\ &= A(\ldots,\overset{2}{a}_1,A(a_1,\overset{2}{a}_2,\overset{3}{a}_3),\ldots) \\ &= A(\ldots,\overset{3}{a}_1,\ldots), \end{aligned}$$

т.е. равенства

$$a_4 = A(\ldots,\overset{2}{a}_1,\ldots)\ и$$

$$a_4 = A(\ldots,\overset{3}{a}_1,\ldots).$$

Речь идет о (новых) 12 равенств.

Утверждение доказано.

Примечание 1. Утверждение 1 является некоторым обобщением одного утверждения из [1]. Притом, имеет место: если n является арносью РСТ отношения, то $1 + \ldots + n = n(n+1)/2$ является арностью соответствующей операции; $n \in \{2,3\}$.

★ ★ ★ ★

Пусть $\mathfrak{T}$ непустое множество и пусть непустое множество $\mathfrak{L}$ множество некоторых подмножеств множества $\mathfrak{T}$. Множество $\mathfrak{L}$ называется разбиением Хармантиса типа n, $n \in N$, множества $\mathfrak{T}$[1] тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

H1 $\quad (\forall a_1 \in \mathfrak{T})\ldots(\forall a_n \in \mathfrak{T})(|\{a_1^n\}| = n \Rightarrow (\exists! \ell \in \mathfrak{L})\{a_1^n\} \subseteq \ell)$;

H2 $\quad (\forall \ell \in \mathfrak{L})|\ell| \geq n$ [2].

Притом, имеют место следующие утверждения::

Лемма 2_1. [3] Пусть $\mathfrak{L}$ является nH-разбиением множества $\mathfrak{T}$. Тогда, если имеет место

$$(a_1^{n+1}) \in \rho \overset{\text{деф}}{=} (\ell \in \mathfrak{L})\{a_1^{n+1}\} \subseteq \ell,$$

то ρ является $(n+1)$-арным отношением эквивалентности в множестве $\mathfrak{T}$.

Лемма 2_2. [3] Пусть $\mathfrak{T}$ непустое множество и пусть $\mathfrak{S} \overset{\text{деф}}{=} \{\{a_1^n\} | \{a_1^n\} \subseteq \mathfrak{T} \wedge |\{a_1^n\}| = n\}$. Тогда, если $\sim_{(n+1)}$ является $(n+1)$-арное отношение эквивалентности в $\mathfrak{T}$, $|\mathfrak{T}| \geq n$, и имеет место

$$a \in C_{\{a_1^n\}} \overset{\text{деф}}{\Leftrightarrow} (a_1^n, a) \in \sim_{(n+1)}, \{a_1^n\} \in \mathfrak{S},$$

---

[1] Короче: nH-разбиением множества $\mathfrak{T}$.

то множество

$$\{C_{\{a_1^n\}} \mid \{a_1^n\} \in \mathfrak{B}\}$$

является nH-разбиением множества $\mathfrak{C}$.

Притом, как и в случае $n = 1$, множество $\{C_{\{a_1^n\}} \mid \{a_1^n\} \in \mathfrak{B}\}$ означаем чесез $\mathfrak{C}/\sim_{(n+1)}$.

Объект $(\mathfrak{C}, \mathfrak{L})$ называется nH-геометрия тогда и только тогда, когда $\mathfrak{L}$ является nH-разбиением множества $\mathfrak{C}$ [5]. Таким образом, учитывая лемму 2_2 и утверждение 1, находим, что имеет место следующее утреждение:

Теорема 3. Пусть (Q, A) является E-6-группоидом. Тогда, если $\sim_{(3)}$ является тернарным отношением эквивалентности определением через (а) и (б), то $(\hat{Q}, \hat{Q}/\sim_{(3)})$ является 2H-геометрией.

Примечание 2. В частоости, 2H-геометриямы являются,, например, проективние плоскости, носители аффиных плоскостей, носители некоторых к-полусетей, и.т.д.

* * * * *

Теорема 4. Пусть $(\mathfrak{C}, \mathfrak{L})$ 2H-геометрия и пусть $Q \overset{\text{деф}}{=} \mathfrak{C} \cup \{0\}$, $0 \notin \mathfrak{C}$. Пусть, далее, A 6-арная операция в множестве Q, определена следующим образом:

$1°$ $|\{x,y,z\}| = 3 \Rightarrow A(x,\overset{2}{y},\overset{3}{z}) = A(x,\overset{3}{z},\overset{2}{y}) = A(\overset{2}{y},\overset{3}{z},x) =$

$= A(\overset{2}{y},x,\overset{3}{z}) = A(\overset{3}{z},x,\overset{2}{y}) = A(\overset{3}{z},\overset{2}{y},x)$ для любых $x,y,z \in \mathfrak{C}$;

$2°$ $|\{x,y\}| = 2 \Rightarrow A(x,\overset{5}{y}) = A(\overset{2}{y},x,\overset{3}{y}) = A(\overset{3}{y},x,\overset{2}{y}) = A(\overset{5}{y},x)$

для любых $x,y \in \mathfrak{C}$;

$3°$ $|\{x,y,z\}| = 3 \Rightarrow (A(x,\overset{2}{y},\overset{3}{z}) = x \Leftrightarrow (\exists \ell \in \mathfrak{L})\{x,y,z\} \subseteq \ell) \wedge$

$\wedge\ (A(x,\overset{2}{y},\overset{3}{z}) = 0 \Leftrightarrow (\exists \ell \in \mathfrak{L})\{x,y,z\} \nsubseteq \ell)$ для любых $x,y \in \mathfrak{C}$;

$4°$ $|\{x,y\}| = 2 \Rightarrow (A(x,\overset{5}{y}) = x \Leftrightarrow (\exists! \ell \in \mathfrak{L})\{x,y\} \subseteq \ell \wedge$

$\wedge (\forall \ell' \in \mathcal{L})(\forall \ell'' \in \mathcal{L})(x \in \ell' \wedge y \in \ell'' \Rightarrow |\ell'| \geq 2 \wedge$

$\wedge |\ell''| \geq 2)) \wedge (A(x,\overset{5}{y}) = 0 \Leftrightarrow \rceil(\exists! \ell \in \mathcal{L})\{x,y\} \subseteq \ell \vee$

$\vee (\exists \ell' \in \mathcal{L})(\exists \ell'' \in \mathcal{L})(x \in \ell' \wedge y \in \ell'' \wedge$

$\wedge (|\ell'| < 2 \vee |\ell''| < 2))$ для любых $x,y \in \mathfrak{C}$;

$5°$ $x \in \mathfrak{C} \Rightarrow A(\overset{5}{x}) = x$; и

6 $A(x_1^6) = 0$ во всех случаях неудовлетворяющих ни одному из условий $1°$-$5°$. Тогда (Q,A) является E-6-группоидом.

Доказательство.

а) Справедливо:

$\rceil(\exists \ell \in \mathcal{L})\{x,y,z\} \subseteq \ell \Leftrightarrow (\forall \ell \in \mathcal{L})\{x,y,z\} \nsubseteq \ell$; и

$\rceil(\exists! \ell \in \mathcal{L})\{x,y\} \subseteq \ell \wedge (\forall \ell' \in \mathcal{L})(\forall \ell'' \in \mathcal{L})(x \in \ell' \wedge$

$\wedge y \in \ell'' \Rightarrow |\ell'| \geq 2 \wedge |\ell''| \geq 2)) \Leftrightarrow \rceil(\exists! \ell \in \mathcal{L})\{x,y\} \subseteq$

$\subseteq \ell \vee (\exists \ell' \in \mathcal{L})(\exists \ell'' \in \mathcal{L})(x \in \ell' \wedge y \in \ell'')$

$\wedge (|\ell'| < 2 \vee |\ell''| < 2))$.

Отсюда, учитывая $1°$-$6°$, находим, что A является отображением множества Q^6 в множество Q.

б) Так как в $1°$-$5°$ описывается часть случая $a_1^6 \in Q \setminus \{0\} = \mathfrak{C}$, то, на основании $6°$, находим, что имеет место:

(o) $(\forall a_1 \in Q)\ldots(\forall a_n \in Q)(\bigvee_{i=1}^{n} a_i = 0 \Rightarrow A(a_1^6) = 0)$.

Отсюда, непосредственно находим, что если имеет место условие

$|\{x,y,z,u\}| = 4$ i $0 \in \{x,y,y,u\}$,

то имеет место импликация

$$(0) \Rightarrow (A_i)$$

для каждого $i \in \{1,\dots,12\}$.

Пусть, далее, имеет место условие:

$$|\{x,y,z,u\}| = 4 \text{ и } \{x,y,z,u\} \subseteq \mathfrak{C}.$$

В каждой из формул (A_1)-(A_6) являются одни и те же внутренние термы, именно термы:

$$A(z,y,u) \text{ и } A(z,y,u).$$

Так как речь идет о термах с одним и тем же переменними, именно - y,z,u, и имеет место условие $|\{z,y,u\}| = 3$, то, на основании 1° и 3°, спроведливо <u>или</u>

$$(л_1) \qquad A(\overset{2}{z},\overset{3}{y},u) = A(z,\overset{3}{y},\overset{2}{u}) = 0$$

<u>или</u>

$$(л_2) \qquad A(\overset{2}{z},\overset{3}{y},u) = u \text{ и } A(z,\overset{3}{y},\overset{2}{u}) = z.$$

Если имеет место $(л_1)$, то, ввиду (о), равенства под (A_1)-(A_6) справедливы.

Если имеет место $(л_2)$, то формулы под (A_1)-(A_6) превращаются в формулы:

$$(м) \qquad \left\{ \begin{array}{l} A(x,\overset{3}{y},\overset{2}{u}) = A(x,\overset{3}{y},\overset{2}{z}) \\ A(\overset{3}{y},\overset{2}{u},x) = A(\overset{3}{y},\overset{2}{z},x) \\ A(x,\overset{2}{u},\overset{3}{y}) = A(x,\overset{2}{z},\overset{3}{y}) \\ A(\overset{2}{u},x,\overset{3}{y}) = A(\overset{2}{z},x,\overset{3}{y}) \\ A(\overset{2}{u},\overset{3}{y},x) = A(\overset{2}{z},\overset{3}{y},x) \\ A(\overset{3}{y},x,\overset{2}{u}) = A(\overset{3}{y},x,\overset{2}{z}). \end{array} \right.$$

Учитывая (л2), ввиду Н1 и предположения $|\{x,y,z,u\}| = 4$, находим, что имеют место следующие равенства:

$$[y,z] = [y,u] = [z,u] \in \mathcal{L}.$$

Отсюда, учитывая структуру формул под (м), находим, что существуют следующие возможности:

$(н_1)$ $\quad x \in [y,u] = [y,z]$; и

$(н_2)$ $\quad x \notin [y,u] = [y,z]$.

Если речь идет о $(н_1)$, то, ввиду 3° и 1°, находим, что имеют место равенства:

$$(н_1')\quad \begin{cases} A(x,\overset{3}{y},\overset{2}{u}) = A(\overset{3}{y},\overset{2}{u},x) = A(x,\overset{2}{u},\overset{3}{y}) = A(\overset{2}{u},x,\overset{3}{y}) = \\ A(\overset{2}{u},\overset{3}{y},x) = A(\overset{3}{y},x,\overset{2}{u}) = A(x,\overset{3}{y},\overset{2}{z}) = A(\overset{3}{y},\overset{2}{z},x) = \\ A(x,\overset{2}{z},\overset{3}{y}) = A(\overset{2}{z},x,\overset{3}{y}) = A(\overset{2}{z},\overset{3}{y},x) = A(\overset{3}{y},x,\overset{2}{z}) = x. \end{cases}$$

И тому подобное, если речь идет о $(н_2)$, то, ввиду 3° и 1°, находим, что имеют место равенства:

$$(н_2')\quad \begin{cases} A(x,\overset{3}{y},\overset{2}{u}) = A(\overset{3}{y},\overset{2}{u},x) = A(x,\overset{2}{u},\overset{3}{y}) = A(\overset{2}{u},x,\overset{3}{y}) = \\ A(\overset{2}{u},\overset{3}{y},x) = A(\overset{3}{y},x,\overset{2}{u}) = A(x,\overset{3}{y},\overset{2}{z}) = A(\overset{3}{y},\overset{2}{z},x) = \\ A(x,\overset{2}{z},\overset{3}{y}) = A(\overset{2}{z},x,\overset{3}{y}) = A(\overset{2}{z},\overset{3}{y},x) = A(\overset{3}{y},x,\overset{2}{z}) = 0. \end{cases}$$

Наконец, учитывая (м), $(н_1')$ и $(н_2')$, находим, что если имеет место условие

$$|\{x,y,z,u\}| = 4 \quad \text{и} \quad \{x,y,z,u\} \subseteq \mathfrak{T},$$

то имеет место импликация

$$(0) \Rightarrow (A_1)$$

для каждого $i \in \{1,\dots,6\}$..

Остается доказать справедливост импликации

$$(0) \Rightarrow (A_i)$$

для каждого $i \in \{7,\dots,12\}$ при условии

$$|\{x,y,z,u\}| = 4 \text{ и } \{x,y,z,u\} \subset \mathfrak{C}.$$

В каждой из формул (A_7)-(A_{12}) являются одни и те же внутренние термы, именно термы:

$$A(\overset{3}{z},\overset{2}{y},u) \text{ и } A(z,\overset{2}{y},\overset{3}{u}).$$

Так как речь идет о термах с одним и тем же переменними, именно - y,z,u, и имеет место условие $|\{z,y,u\}| = 3$, то на основании 1° и 3°, справедливо <u>или</u>

$$(\bar{л}_1) \qquad A(\overset{3}{z},\overset{2}{y},u) = A(z,\overset{2}{y},\overset{3}{u}) = 0$$

<u>или</u>

$$(\bar{л}_2) \qquad A(\overset{3}{z},\overset{2}{y},u) = u \quad A(z,\overset{2}{y},\overset{3}{u}) = z.$$

Если имеет место $(\bar{л}_1)$, то ввиду (о), равенства под (A_7)-(A_{12}) справедливы.

Если имеет место $(\bar{л}_2)$, то формулы под (A_7)-(A_{12}) превращаются в формулы:

$$(\bar{м}) \quad \begin{cases} A(x,\overset{2}{y},\overset{3}{u}) = A(x,\overset{2}{y},\overset{3}{z}) \\ A(\overset{2}{y},\overset{3}{u},x) = A(\overset{2}{y},\overset{3}{z},x) \\ A(x,\overset{3}{u},\overset{2}{y}) = A(x,\overset{3}{z},\overset{2}{y}) \\ A(\overset{3}{u},x,\overset{2}{y}) = A(\overset{3}{z},x,\overset{2}{y}) \\ A(\overset{3}{u},\overset{2}{y},x) = A(\overset{3}{z},\overset{2}{y},x) \\ A(\overset{2}{y},x,\overset{3}{u}) = A(\overset{2}{y},x,\overset{3}{z}). \end{cases}$$

Учитывая ($\bar{Л}_2$), ввиду H1 и предположения $|\{x,y,z,u\}| = 4$, находим, что имеют место следующие равенства:

$$[y,z] = [y,u] = [z,u] \in \mathcal{L}.$$

Отсюда, учитывая структуру формул под ($\bar{M}$), находим что существуют следующие возможности:

($\bar{H}_1$) $\quad x \in [y,u] = [y,z]$; :и

($\bar{H}_2$) $\quad x \notin [y,u] = [y,z]$.

Если речь идет о ($\bar{H}_1$) то, ввиду 3° и 1°, находим, что имеют место равенства:

$$(\bar{H}_1') \quad \begin{cases} A(x,\overset{2}{y},\overset{3}{u}) = A(\overset{2}{y},\overset{3}{u},x) = A(x,\overset{3}{u},\overset{2}{y}) = A(\overset{3}{u},x,\overset{2}{y}) = \\ A(\overset{3}{u},\overset{2}{y},x) = A(\overset{2}{y},x,\overset{3}{u}) = A(x,\overset{2}{y},\overset{3}{z}) = A(\overset{2}{y},\overset{3}{z},x) = \\ A(x,\overset{3}{z},\overset{2}{y}) = A(\overset{3}{z},x,\overset{2}{y}) = A(\overset{3}{z},\overset{2}{y},x) = A(\overset{2}{y},x,\overset{3}{z}) = x. \end{cases}$$

И тому подобное, если речь идет о ($\bar{H}_2$), то, ввиду 3° и 1°, находим, что имеют место равенства:

$$(\bar{H}_2') \quad \begin{cases} A(x,\overset{2}{y},\overset{3}{u}) = A(\overset{2}{y},\overset{3}{u},x) = A(x,\overset{3}{u},\overset{2}{y}) = A(\overset{3}{u},x,\overset{2}{y}) = \\ A(\overset{3}{u},\overset{2}{y},x) = A(\overset{2}{y},x,\overset{3}{u}) = A(x,\overset{2}{y},\overset{3}{z}) = A(\overset{2}{y},\overset{3}{z},x) = \\ A(x,\overset{3}{z},\overset{2}{y}) = A(\overset{3}{z},x,\overset{2}{y}) = A(\overset{3}{z},\overset{2}{y},x) = A(\overset{2}{y},x,\overset{3}{z}) = 0. \end{cases}$$

Наконец, учитывая ($\bar{M}$), ($\bar{H}_1'$) и ($\bar{H}_2'$), находим, что если имеет место условие

$$|\{x,y,z,u\}| = 4 \text{ и } \{x,y,z,u\} \subseteq \mathfrak{T},$$

то имеет место импликация

$$(0) \Rightarrow (A_i)$$

для каждого $i \in \{7,\ldots,12\}$.

Таким образом, нами доказано, что в построеном 6-группоиде для каждого $i \in \{1,\dots,12\}$ имеет место импликация

$$(0) \Rightarrow (A_i)$$

для любых $x,y,z,u \in Q$ $(= \mathfrak{C} \cup \{0\})$.

ц) Пусть, далее, имеют место условия:

$$|\{x,y\}| = 2 \text{ и } \{x,y\} \subsetneq \mathfrak{C}.$$

Тогда, ввиду H1 существует один и только один $\ell \in \mathfrak{L}$ удовлетворяющий условию:

$$\{x,y\} \subseteq \ell.$$

Притом, учитывая H2, находим, что не существуют $\ell' \in \mathfrak{L}$ и $\ell'' \in \mathfrak{L}$ такие, что имеет место:

$$x \in \ell' \wedge y \in \ell'' \wedge |\ell'| < 2 \wedge |\ell''| < 2.$$

Отсюда, ввиду 4°, находим, что имеет место:

$$(\forall x \in \mathfrak{C})(\forall y \in \mathfrak{C})(x \neq y \Rightarrow A(x,\overset{5}{y}) = x).$$

Далее, учитывая 2°, отсюда находим, что, если имеет место условие $|\{x,y\}| = 2$ и $\{x,y\} \subseteq \mathfrak{C}$, то имеют место равенства

(п) $$A(x,\overset{5}{y}) = A(\overset{2}{y},x,\overset{3}{y}) = A(\overset{3}{y},x,\overset{2}{y}) = A(\overset{5}{y},x) = x$$

для любых $x,y \in \mathfrak{C}$, $x \neq y$.

В самом деле, так как, ввиду 5°, имеет место

$$(\forall x \in \mathfrak{C})A(\overset{6}{x}) = x,$$

то равенства под (п) имеют место для любых $x,y \in \mathfrak{C}$. Наконец, так как элемент $0 \in Q$ $(= \mathfrak{C} \cup \{0\},\ 0 \notin \mathfrak{C})$, ввиду (о), удовлетворяет условию

$$\overset{6}{A(0)} = 0,$$

отсюда находим, что в построеном 6-группоиде имеет место (I); $\hat{Q} = \mathfrak{C}$.

Таким образом, построенный 6-группоид является E-6-группоидом.

Теорема доказана.

Примечание 3. В [4] ([5]) доказано, что A_t-квазигруппы (A_t-группоиды) являются координатизациоными системами *конечных* 2H-геометрии.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Рамасвами В., Идемпотентные элементы в ассоциативных тройных системах, Publications Mathematicae, Debrecen, Tom. 31, Fasc. 3-4, 1984, 265-270.

[2] Hartmanis J., Generalized Partitions and Lattice Embedding Theory, Proc. of Symposium in Pure Math., Vol. II, Lattice Theory, Amer. Math. Soc. (1961), 22-30.

[3] Pickett H.E., A note Generalized Equivalence Relations, Amer. Math. Monthly, 1966, 73, No. 8, 860-861.

[4] Ушан Я., A_t-квазигруппы, Review of Research Faculty of Science - University of Novi Sad, Vol. 15-2, 1985, 141-154.

[5] Ušan J., A_t-groupoids, Proceedings of the Conference "Algebra and Logic" - Cetinje 1986, Novi Sad 1987, 209-219.

[6] Ušan J., k-Seminets, Mat. Bilten, Skopje, 1 (XXVII), 1977, 41-46.

REZIME

JEDNA KLASA 6-GRUPOIDA I 2H-GEOMETRIJE

U nekim ranijim radovima autor je, izmedju ostalog, razmatrao koordinatizaciju *konačnih* 2H-geometrija pomoću A_t-grupoida. U ovom radu autor razmatra koordinatizaciju 2H-geometrija pomoću

specijalnih 6-grupoida.
Received by the editors December 2 ,1987.