Univ. u Novom Sadu,
Zb. Rad. Prirod.-Mat. Fak.
Ser. Mat. 17,2, 65-87(1989)

REVIEW OF RESEARCH
FACULTY OF SCIENCE
MATHEMATICS SERIES

<Nn,E>-СЕТИ С (n+1)-РАССТОЯНИЕМ

Янез Ушан

*University of Novi Sad, Faculty of Science,
Institute of Mathematics, Dr I. Djuričića 4,
21000 Novi Sad, Yugoslavia*

РЕЗЮМЕ

В работе определяется и исследуется структура $(\mathfrak{T},\mathcal{L},\parallel,d)$, где $(\mathfrak{T},\mathcal{L},\parallel)$ является <Nn,E>-сетью, а d отображением множества $\mathfrak{T}^{n+1}$ в множество $R\setminus R^-$ удовлетворяющим некоторым условиям.

Пусть $\mathfrak{T}$ непусто множество и пусть непустое множество $\mathcal{L}$ множество некоторых подмножеств множества $\mathfrak{T}$.

Множество $\mathcal{L}$ назовем n-разбиением[1)] множества $\mathfrak{T}$, $n \in \mathbb{N}$, тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

$\underline{H1}$ $\quad (\forall A_1 \in \mathfrak{T})\dots(\forall A_n \in \mathfrak{T})(|\{A_1^n\}| = n \Rightarrow (\exists!\, \ell \in \mathcal{L})\{A_1^n\}\subseteq \ell)$; и

и

H2 $\quad (\forall \ell \in \mathcal{L})|\ell| \geq n$ [2)].

Множество $\mathcal{L}$ назовем почти-n-разбиением, короче Nn-разбиением, $n \in \mathbb{N}$, множества $\mathfrak{T}$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условыя:

---

1) Разбиением Хармантиса типа n, короче: nH-разбиением [3]. n-Разбиение определено Хартманисом в [1].

2) Каждому n-разбиению множества $\mathfrak{T}$ соответствует $(n+1)$-арное отношение эквивалентности на множестве $\mathfrak{T}$, и обратное [2].

AMS Mathematics Subject Classification (1980): 20N15.

Key words and phrases: <Nn,E>-net, (n+1)-distance function.

NH1 $(\forall A_1 \in \mathfrak{T})\ldots(\forall A_n \in \mathfrak{T})(|\{A_1^n\}| = n \Rightarrow$
$\Rightarrow (\exists \ell \in \mathfrak{L})\{A_1\} \subsetneq \ell)$; и

NH2 $(\forall \ell \in \mathfrak{L})(\exists A_1 \in \mathfrak{T})\ldots(\exists A_n \in \mathfrak{T})(|\{A_1^n\}| = n \wedge$
$\wedge \{A_1^n\} \subseteq \ell \wedge (\forall \ell' \in \mathfrak{L})(\ell' \neq \ell \Rightarrow \{A_1^n\} \not\subseteq \ell'))$.

Высказывания под NH1 и NH2 являются следствиями высказывании под H1 и H2. Таким образом, имеет место:

Утверждение 1. Если $\mathfrak{L}$ является n-разбиением множества $\mathfrak{T}$, то $\mathfrak{L}$ является Nn-разбиением множества $\mathfrak{T}$.

Обратное не имеет место: пример 1.3.

Объект $(\mathfrak{T},\mathfrak{L})$ назовем Nn-геометрией тогда и только тогда, когда $\mathfrak{L}$ является Nn-разбиением множества $\mathfrak{T}$. Таким же образом, объект $(\mathfrak{T},\mathfrak{L})$ назовем n-геометрией тогда и только тогда, когда $\mathfrak{L}$ является n-разбиением множества $\mathfrak{T}$. Притом, элементы множества $\mathfrak{T}$ назовем точками, а элементы множества $\mathfrak{L}$--блоками[1].

Пусть $(\mathfrak{T},\mathfrak{L})$ Nn-геометрия; $n \in \mathbb{N}$. Пусть, далее, $\{L_i | i \in I\}$ разбиение множества $\mathfrak{L}$[2]. Объект $(\mathfrak{T},\mathfrak{L}, \{L_i | i \in I\})$ назовем $\langle Nn,E\rangle$-сетью тогда и только тогда, когда имеет место:

E0 каждая точка $A \in \mathfrak{T}$ находится в одном и только в одном блоке из каждого класса L_i, $i \in I$.

Непосредственно находим, что имеют место следующие два утверждения:

Утверждение 2. Пусть $(\mathfrak{T},\mathfrak{L},\{L_i | i \in I\})$ $\langle Nn,E\rangle$-сеть. Пусть, далее, $\parallel$ бинарное отношение в $\mathfrak{L}$, определено следующим образом: $\mathfrak{L}/\parallel \overset{\text{деф}}{=} \{L_i | i \in I\}$. Тогда имеет место:

---

[1] В случае n-геометрии, и: линиями.

[2] 1-разбиение множества $\mathfrak{L}$.

<u>E1</u> $\parallel$ является PCT отношением в $\mathcal{L}$; и

<u>E2</u> $(\forall A \in \mathcal{T})(\forall \ell \in \mathcal{L})(\exists! \ell' \in \mathcal{L})(\ell' \parallel \ell \wedge A \in \ell)$[1].

Утверждение 3. Пусть $(\mathcal{T},\mathcal{L})$ Nn-геометрия. Тогда, если бинарное отношение $\parallel$ в $\mathcal{L}$ удовлетворяет условиям E1-E2, то объект $(\mathcal{T},\mathcal{L},\mathcal{L}/\parallel)$ является $\langle$Nn,E$\rangle$-сетью.

Ввиду утверждений 2 и 3, объект $(\mathcal{T},\mathcal{L},\parallel)$, где $\mathcal{L}$ Nn-разбиение, а $\parallel$ бинарное отношение в $\mathcal{L}$ удовлетворяющее условиям E1-E2, имеет смысл считать $\langle$Nn,E$\rangle$-сетью.

Примеры 1.

1.1. Пусть $\mathcal{T}$ любое непустое множество, а $\mathcal{L}$ любое 1-разбиение[2] множества $\mathcal{T}$. Тогда, объект $(\mathcal{T},\mathcal{L})$ является 1-геометрией. Притом, если 1-разбиение[2] множества $\mathcal{L}$ является одноэлементним множеством, именно если $\{L_i | i \in I\} = \{\mathcal{L}\}$, то $(\mathcal{T},\mathcal{L},\{\mathcal{L}\})$ является $\langle$1,E$\rangle$-сетью[3]. Тогда имеет место:

$$(\forall \ell \in \mathcal{L})(\forall \ell' \in \mathcal{L})\ell' \parallel \ell,$$

где $\mathcal{L}/\parallel = \{\mathcal{L}\}$.

1.2. Пусть $\mathcal{T}$ множество всех точек плоскости евклидовой геометрии, а $\mathcal{L}$ множество всех прямых принадлежащих этой плоскости. Притом, $\mathcal{L}$ является 2-разбиением множества $\mathcal{T}$, т.е. объект $(\mathcal{T},\mathcal{L})$ является 2-геометрией. Наконец, объект $(\mathcal{T},\mathcal{L},\parallel)$, где $\parallel$ является отношением параллельности в множестве прямых $\mathcal{L}$, является $\langle$2,E$\rangle$-сетью[4].

1.3. Пусть $\mathcal{T}$ множество всех точек евклидовой геометрии, а $\mathcal{L}$ множество всех плоскостей евклидовой геометрии. Притом, $\mathcal{L}$ является Nn-разбиением множества $\mathcal{T}$, т.е. объект $(\mathcal{T},\mathcal{L})$ является

---

[1] аксиома евклидовой параллельности.
[2] разбиение множества $\mathcal{T}$.
[3] $\langle$N,E$\rangle$-сетью; утверждение 1.
[4] $\langle$N2,E$\rangle$-сетью; утверждение 1.

N3-геометрией, неявляющейся 3-геометрией. Наконец, объект $(\mathfrak{T},\mathcal{L},\parallel)$, где $\parallel$ является отношением параллельности в множестве плоскостей $\mathcal{L}$, является $\langle N3,E\rangle$-сетью, неявляющейся $\langle 3,E\rangle$-сетью.

Примечание 1 к-Сети [4,5], полусети В. Хавеля [6-8], полусети М. Тайлора [9], к-полусети автора [10], LN-к-полусети [11], RN-к-полусети [11], к-$\langle 2\rangle$-полусети [12], $\langle к,n\rangle$-сети [13-16], $\langle к,n\rangle$-полусети [17], в самом деле, являются объектами $(\mathfrak{T},\mathcal{L},\{L_i|i\in I\})$, где $\mathfrak{T}\neq\phi$, $\mathcal{L}\subseteq P(\mathfrak{T})\setminus\{\phi\}$, а множество $\{L_i|i\in I\}$ является разбиением[1] множества $\mathcal{L}$. Конечные аффинные плоскости и аффинные пространства Спернера, например, являются, в том же порядке, специальные к-сети и специальные к-полусети. Притом, речь идет о $\langle 2,E\rangle$-полусетях.

Пусть $(\mathfrak{T},\mathcal{L},\{L_i|i\in I\})$[2] $\langle Nn,E\rangle$-сеть; $n\in\mathbb{N}$. Притом, множество $\{A_1^n\}\subseteq\mathfrak{T}$ назовем **скелетным множеством** тогда и только тогда, когда имеет место:

$$(\exists!\ell\in\mathcal{L})\{A_1^n\}\subseteq\ell.$$

Множество всех скелетных множеств $\langle Nn,E\rangle$-сети $(\mathfrak{T},\mathcal{L},\{L_i|i\in I\})$ обозначим через $\mathfrak{S}$[3]. Притом, пусть имеет место:

$$[A_1^n]\overset{\text{деф}}{=}\begin{cases}\ell,\{A_1^n\}\subseteq\ell\wedge\{A_1^n\}\in\mathfrak{S}\\ \{A_1^n\},\{A_1^n\}\notin\mathfrak{S}.\end{cases}$$

* *

Пусть $(\mathfrak{T},\mathcal{L},\parallel)$ $\langle Nn,E\rangle$-сеть; $n\in\mathbb{N}$. Пусть, далее, d является отображением множества $\mathfrak{T}^{n+1}$ в множество $R\setminus R^-$, где R множество всех действительных чисел, а R^- множество всех отрицательных действительных чисел. Отображение d назовем функцией $(n+1)$-расстояния в $\langle Nn,E\rangle$-сети $(\mathfrak{T},\mathcal{L},\parallel)$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

---

1) 1-разбиением.

2) $(\mathfrak{T},\mathcal{L},\parallel)$; $\mathcal{L}/\parallel=\{L_i|i\in I\}$.

3) Если $(\mathfrak{T},\mathcal{L},\parallel)$ является $\langle n,E\rangle$-сетью, то $\mathfrak{S}$ является n-разбиением множества $\mathfrak{T}$ удовлетворяющим условию: $(\forall s\in\mathfrak{S})|s|=n$. Если $(\mathfrak{T},\mathcal{L},\parallel)$ является $\langle Nn,E\rangle$-сетью неявляющейся $\langle n,E\rangle$-сетью, то $\mathfrak{S}$ является PnH-разбиением множества $\mathfrak{T}$ [18].

M0 $d(A_{\alpha_1},\dots,A_{\alpha_n},B) = d(A_1^n,B)$ для каждого $\{A_1^n\} \in \mathfrak{S}$, каждого $B \in \mathfrak{T}$ и каждого $\alpha \in \{1,\dots,n\}!$;

M1 $d(A_1^{n+1}) = 0 \Leftrightarrow (\exists \ell \in \mathfrak{L})\{A_1^{n+1}\} \subseteq \ell$ для каждого $A_1^{n+1} \in \mathfrak{T}$;

M2 $(\forall\{A_1^n\} \in \mathfrak{S})(\forall\{B_1^n\} \in \mathfrak{S})([A_1^n] \parallel [B_1^n] \Rightarrow (\exists\{\bar{B}_1^n\}\in\mathfrak{S})([\bar{B}_1^n] = [B_1^n] \wedge$

$\wedge\ d(A_1^n,B_1) = d(\bar{B}_1^n,A_1)))$; и

M3 $(\forall\{A_1^n\} \in \mathfrak{S})(\forall\{C_1^n\} \in \mathfrak{S})([A_1^n] \parallel [C_1^n] \Rightarrow$

$\Rightarrow (\exists\{\bar{C}_1^n\} \in \mathfrak{S})(\forall C \in \mathfrak{T})(\forall B \in \mathfrak{T})([\bar{C}_1^n] = [C_1^n] \wedge C \in [C_1^n] \Rightarrow$

$\Rightarrow d(A_1^n,B) \leq d(A_1^n,C) + d(\bar{C}_1^n,B)))$.

При $n = 1$, M0 - M3 превращаются в:

$M0_1$ $d(A_1,B) = d(A_1,B)$ для каждого $\{A_1\} \in \mathfrak{S}$ и каждого $B \in \mathfrak{T}$[1];

$M1_1$ $d(A_1,A_2) = 0 \Leftrightarrow (\exists \ell \in \mathfrak{L})\{A_1,A_2\} \subseteq \ell$ для каждого $A_1^2 \in \mathfrak{T}$;

$M2_1$ $(\forall\{A_1\} \in \mathfrak{S})(\forall B_1 \in \mathfrak{S})([A_1] \parallel [B_1] \Rightarrow (\exists\{\bar{B}_1\} \in \mathfrak{S})([\bar{B}_1] = [B_1] \wedge$

$\wedge\ d(A_1,B_1) = d(\bar{B}_1,A_1)$; и

$M3_1$ $(\forall\{A_1\} \in \mathfrak{S})(\forall\{C_1\} \in \mathfrak{T})([A_1] \parallel [C_1] \Rightarrow$

$\Rightarrow (\exists\{\bar{C}_1\} \in \mathfrak{S})(\forall C \in \mathfrak{T})(\forall B \in \mathfrak{T})([\bar{C}_1] = [C_1] \wedge C \in [C_1] \Rightarrow$

$\Rightarrow d(A_1,B) \leq d(A_1,C) + d(\bar{C}_1,B)))$.

При $n = 1$ справедливо:

(a) $\{X\} \in \mathfrak{S} \Leftrightarrow X \in \mathfrak{T}$

---

1) $d(A_1,B) = d(A_1,B)$ имеет место для каждого $\{A_1\} \in \mathfrak{S}$ и каждого $B \in \mathfrak{T}$.

При $n = 1$ и $\mathfrak{L} = \mathfrak{S}$[1], имеет место:

(б) $[X] = \{X\}$ для каждого $X \in \mathfrak{T}$;

(в) $(\exists\{B\} \in \mathfrak{S})\{A_1, A_2\} \subseteq \{B\} \Leftrightarrow A_1 = A_2$ для каждого $A_1, A_2 \in \mathfrak{T}$; и

(г) $(\forall\{X\} \in \mathfrak{S})(\forall\{Y\} \in \mathfrak{S})[X] \parallel [Y]$[2].

Далее, учитывая (а) - (г), находим, что, при $\mathfrak{L} = \mathfrak{S}$, M0 - M3 превращаются в:

M0$_1'$ $d(A_1,B) = d(A_1,B)$ для каждого $A_1, B \in \mathfrak{T}$[3]

M1$_1'$ $d(A_1,A_2) = 0 \Leftrightarrow A_1 = A_2$ для каждого $A_1, A_2 \in \mathfrak{T}$;

M2$_1'$ $(\forall A_1 \in \mathfrak{T})(\forall B_1 \in \mathfrak{T})(\exists \bar{B}_1 \in \mathfrak{T})(\bar{B}_1 = B_1 \wedge$

$\wedge\ d(A_1,B_1) = d(\bar{B}_1, A_1))$; и

M3$_1'$ $(\forall A_1 \in \mathfrak{T})(\forall C_1 \in \mathfrak{T})(\exists \bar{C}_1 \in \mathfrak{T})(\forall C \in \mathfrak{T})(\forall B \in \mathfrak{T})(C = C_1 = \bar{C}_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow d(A_1,B) \le d(A_1,C) + d(\bar{C}_1,B))$.

Отсюда, учитывая определение метрического пространства, наконец, находим, что имеет место:

Утверждение 4. Если $(\mathfrak{T},d)$ метрическое пространство, то d является 2-расстоянием в <1,E>-сети $(\mathfrak{T},\mathfrak{S},\{\mathfrak{S}\})$, и обратное.

Примечание 2. Ввиду утверждения 4, объект $(\mathfrak{T},\mathfrak{L},\parallel,d)$, где $(\mathfrak{T},\mathfrak{L},\parallel)$[4] <Nn,E>-сеть, а d является $(n+1)$-расстоянием в $(\mathfrak{T},\mathfrak{L},\parallel)$, назовем и $(n+1)$-метрическим пространством.

Теорема 5. Пусть $(\mathfrak{T},\mathfrak{L},\parallel,d)$ $(n+1)$-метрическое пространство; $n \in \mathbb{N}$. Пусть, далее, $\{A^n\} \in \mathfrak{S}$, $\ell \in \mathfrak{L}$, $A \in \mathfrak{T}$ и $B \in \mathfrak{T}$ любые

---

[1] $\mathfrak{L} = \{\{X\} \mid X \in \mathfrak{T}\}$.
[2] Пример 1.1.
[3] $d(A_1,B) = d(A_1,B)$, очевидно имеет место для каждого $A_1, B \in \mathfrak{T}$.
[4] $(\mathfrak{T},\mathfrak{L},\{L_i \mid i \in I\})$; $\mathfrak{L}/\parallel = \{L_i \mid i \in I\}$.

объекты удовлетворяющие условию:

$$[A_1^n] \parallel \ell \wedge A \in \ell \wedge B \in \ell.$$

Тогда имеет место равенство:

$$d(A_1^n, A) = d(A_1^n, B).$$

Доказательство Пусть $\{A_1^n\}$ и $\{C_1^n\}$ любые скелетные множества удовлетворяющие условию:

$$[A_1^n] \parallel [C_1^n].$$

Тогда, ввиду М3, существует скелетное множество $\{\bar{C}^n\}$ такое, что из $[\bar{C}_1^n] = [C_1^n]$, для любых $P, Q \in [C_1^n]$, следует, что имеют место высказывания

$$d(A_1^n, P) \leq d(A_1^n, Q) + d(\bar{C}_1^n, P) \text{ и}$$

$$d(A_1^n, Q) \leq d(A_1^n, P) + d(\bar{C}_1^n, Q).$$

Отсюда, так как $P, Q \in [\bar{C}_1^n]$ $(= [C_1^n])$, ввиду М1, находим, что имеет место

$$d(A_1^n, P) \leq d(A_1^n, Q) \text{ и}$$

$$d(A_1^n, Q) \leq d(A_1^n, P),$$

т.е., что имеет место равенство

$$d(A_1^n, P) = d(A_1^n, Q).$$

Утверждение доказано.

Примеры 2

2.1 Пусть $(\mathfrak{T}, \mathfrak{L}, \parallel)$ $\langle 2, E\rangle$-сеть из примера 1.2, а $d(A_1^3)$ пусть является площадью треугольника с вершинами A_1, A_2 и A_3. Очевидно, d удовлетворяет условиям М0 и М1 (для $n = 2$).

Пусть, далее, $\{A_1^2\}$ и $\{B_1^2\}$ скелетные множества удовлетворяющие условию:

$$[A_1^2] \parallel [B_1^2]; \text{ рис. } 1_1.$$

Тогда существует скелетное множество $\{\bar{B}_1^2\}$ такое, что

а) $[\bar{B}_1^2] = [B_1^2]$; и

б) если $[A_1^2] \neq [B_1^2]$, то $A_1A_2\bar{B}_1\bar{B}_2$ является параллелограммом рис. 1 . В самом деле, тогда существует $\{\bar{B}_1^2\} \in \mathfrak{S}$ такое, что имеет место а) и имеют место равенства:

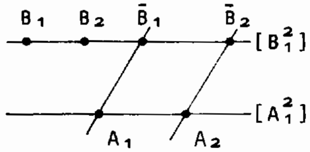

Рис. 1_1

в) $\mathfrak{P}ovA_1A_2\bar{B}_1\bar{B}_2 =$

$$= 2d(A_1^2, B_1) = 2d(\bar{B}_1^2, A_1).$$

Таким образом, нами доказано, что d удовлетворяет условию M2.

Пусть, наконец, $A_1A_2\bar{C}_1\bar{C}_2, A_1A_2B_1B_2$ и $\bar{C}_1\bar{C}_2B_1B_2$ являются параллелограммами рис. 1_2-1_3. Тогда имеет место:

$$\mathfrak{P}ov\ A_1A_2B_1B_2 \le \mathfrak{P}ovA_1A_2\bar{C}_1\bar{C}_2 + \mathfrak{P}ov\bar{C}_1\bar{C}_2B_1B_2.$$

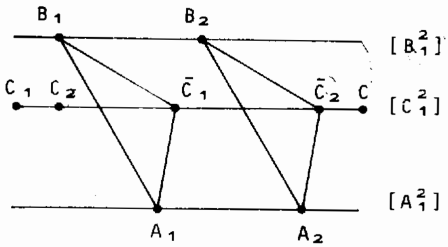

Рис. 1_2

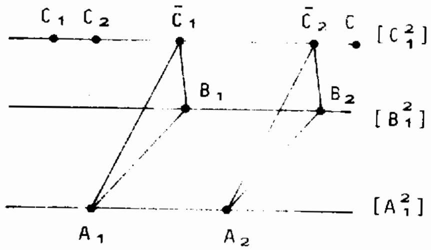

Рис. 1_3

Отсюда, так как имеют место равенства

$$\mathfrak{P}ov\ A_1A_2B_1B_2 = 2d(A_1^2, B);$$

$$\mathfrak{P}ov\ A_1A_2\bar{C}_1\bar{C}_2 = 2d(A_1^2, C) = 2d(A_1^2, \bar{C}_1) = 2d(\bar{C}_1^2, A); \text{ и}$$

$$\mathfrak{P}ov\ \bar{C}_1\bar{C}_2B_1B_2 = 2d(\bar{C}_1^2, B),$$

находим, что d удовлетворяет и M3 (для $n = 2$).

Нами доказано, что $(\mathfrak{T}, \mathfrak{L}, \parallel, d)$ является 3-метрическим пространством.

2.2 Пусть $(\mathfrak{T},\mathfrak{L},\parallel)$ ⟨N3,E⟩-сеть из примера 1.3, а d пусть является объемом треугольной пирамиды с вершинамамы A_1, A_2, A_3 и A_4. Тогда, способом подобним способу из примера 2.1, находим, что $(\mathfrak{T},\mathfrak{L},\parallel,d)$ является 4-метрическим пространством.

Примечание 3 В (n+1)-метрическими пространствами из примеров 2.1 и 2.2 имеют место и следующие высказывания:

$\bar{M2}$ $d(A_1^{n+1}) = d(A_{\alpha 1},\ldots,A_{\alpha(n+1)})$ для каждой подстановки $\alpha \in \{1,\ldots,n+1\}!$ и каждого $A_1^{n+1} \in \mathfrak{T}$; и

$\bar{M3}$ $d(A_1^{n+1}) \leq \sum\limits_{i=1}^{n+1} d(A_1^{i-1},B,A_{i+1}^{n+1})$ для каждого $A_1^{n+1},B \in \mathfrak{T}$.

Примечание 4 В прямоугольных координатах функции (n+1)-расстояния из примеров 2.1 и 2.2, как нам известно, выражаются, в том же порядке, следующим образом:

$$d((x_i,y_i)_1^3) = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}\right| \quad \text{и}$$

$$d((x_i,y_i,z_i)_1^4) = \frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{pmatrix}\right|.$$

Притом, имеет место:

$$|x_1 - x_2| = \left|\det\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{pmatrix}\right|.$$

* * *

Пусть $(\mathfrak{T},\mathfrak{L},\parallel,d)$ (n+1)-метрическое пространство. Пусть, далее, $\{A_1^n\}$ скелетное множество, т.е. пусть $\{A_1^n\} \in \mathfrak{S}$. Подмножество множества $\mathfrak{T}$, обозначим его через $K]A_1^n,\varepsilon[$, назовем **открытым шаром** с центром в скелетном множестве $\{A_1^n\}$[1] радиус которого $\varepsilon > 0$,

[1] Если n = 1, то скелетними множествами являются одноэлементные подмножества множества $\mathfrak{T}$.

$\varepsilon \in R$, тогда и только тогда, когда имеет место:

(1) $$H]A_1^n,\varepsilon[\overset{\text{деф}}{=} \{X \mid X \in \mathfrak{T} \wedge d(A_1^n,X) < \varepsilon\}$$[1].

Притом, ввиду М0, находим, что имеет место:

$$H]A_{\alpha_1},\ldots,A_{\alpha_n},\varepsilon[\ = H]A_1^n,\varepsilon[$$

для каждой подстановки $\alpha \in \{1,\ldots,n\}!$.
На рис. 2 изображен открытый шар в 3-метрическом пространстве из примера 2.1.

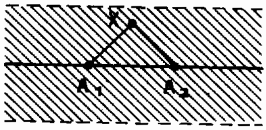

Рис. 2

Учитывая определение скелетного множества, определение открытого шара и М1, находим, что имеет место:

Утверждение 6. Пусть $(\mathfrak{T},\mathfrak{L},\parallel,d)$ $(n+1)$-метрическое пространство. Тогда, если $\{A_1^n\} \in \mathfrak{S}$, то $[A_1^n] \subseteq H]A_1^n,\varepsilon[$.

Учитывая определение скелетного множества, определение открытого шара, теорему 5 и аксиому Е2, находим, что имеет место:

Утверждение 7. Пусть $(\mathfrak{T},\mathfrak{L},\parallel,d)$ $(n+1)$-метрическое пространство. Тогда, если $\{A_1^n\} \in \mathfrak{T}$ и $B \in \mathfrak{T}$ удовлетворяют условию $d(A_1^n,B) < \varepsilon$, $\varepsilon \in R^+$, то существует $\ell \in \mathfrak{L}$ такое, что имеет место

$$\ell \parallel [A_1^n] \wedge B \in \ell \wedge \ell \subseteq H]A_1^n,\varepsilon[.$$

Непосредственным следствием утверждения 7 является:

Утвреждение 8. Пусть $(\mathfrak{T},\mathfrak{L},\parallel,d)$ $(n+1)$-метрическое пространство. Пусть, далее, $\{A_1^n\} \in \mathfrak{S}$, $\varepsilon \in R^+$ и

$$\mathfrak{L}_{(A_1^n,\varepsilon)} \overset{\text{деф}}{=} \{\ell \mid \ell \parallel [A^n] \wedge (\exists B \in \mathfrak{T})(B \in \ell \wedge d(A_1^n,B) < \varepsilon\}.$$

Тогда имеет место равенство:

$$H]A_1^n,\varepsilon[\ = \cup\, \mathfrak{L}_{(A_1^n,\varepsilon)}.$$

[1] Закрытый шар с центром в скелетном множестве $\{A_1^n\}$ радиуса $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in R$, определим следующим образом: $H[A_1^n,\varepsilon] \overset{\text{деф}}{=} \{X \mid X \in \mathfrak{T} \wedge d(A_1^n,X) \le \varepsilon\}$.

Множество $A \subseteq \mathfrak{T}$ назовем **открытым множеством** в $(n+1)$-метрическом пространств $(\mathfrak{T}, \mathfrak{L}, \|, d)$ тогда и только тогда, когда емеет место:

$$(2) \qquad (\forall\{A_1^n\} \in \mathfrak{F})(\{A_1^n\} \subseteq A \wedge [A_1^n] \subseteq A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\exists\varepsilon > 0)K]A_1^n, \varepsilon[\subseteq A).$$

Притом, $A \subseteq \mathfrak{T}$ пусть **закрытое множество** в $(n+1)$-метрическом пространстве $(\mathfrak{T}, \mathfrak{L}, \|, d)$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{T} \setminus A$ является открытым множеством в $(\mathfrak{T}, \mathfrak{L}, \|, d)$.

Из (2) непосредственно находим, что имеет место:

Утверждение 9. Пустое множество и множество $\mathfrak{T}$ являются открытыми множествами в $(n+1)$-метрическом пространстве $(\mathfrak{T}, \mathfrak{L}, \|, d)$[1].

Учытывая определение закрытого множества и утверждение 9, находим, что имеет место:

Утверждение 10. Пустое множество и множество $\mathfrak{T}$ являются закрытыми множествами в $(n+1)$-метрическом пространстве $(\mathfrak{T}, \mathfrak{L}, \|, d)$.

Из (2) непосредственно находим, что имеет место:

Утверждение 11. Пусть $(\mathfrak{T}, \mathfrak{L}, \|, d)$ $(n+1)$-метрическое пространство и пусть $A \subseteq \mathfrak{T}$. Тогда, если имеет место

$$(3) \qquad (\forall\{A_1^n\} \in \mathfrak{F})(\{A_1^n\} \subseteq A \Rightarrow \rceil[A_1^n] \subseteq A),$$

то A является открытым множеством в $(\mathfrak{T}, \mathfrak{L}, \|, d)$.

Учытывая утверждение 11, находим, что в 3-метрическом пространстве из примера 1.3, например, круг (рис. 3) является открытым множеством.

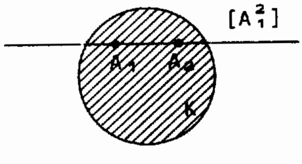

Рис. 3

[1] Если $A = \emptyset$, то импликация из (2) превращется в $\perp \Rightarrow p$. И, если $A = \mathfrak{T}$, то импликация из (2) превращется в $\top \Rightarrow \top$.

Теорема 12. Пусть $(\mathfrak{T},\mathfrak{L},\parallel,d)$ $(n+1)$-метрическое пространство. Тогда, если $\mathfrak{O}_1,\ldots,\mathfrak{O}_m$, $m \in \mathbb{N}$, являются открытыми множествами в $(\mathfrak{T},\mathfrak{L},\parallel,d)$, то $\bigcap\limits_{i=1}^{m} \mathfrak{O}_i$ открытое множество в $(\mathfrak{T},\mathfrak{L},\parallel,d)$.

Доказательство а) Если $\bigcap\limits_{i=1}^{m} \mathfrak{O}_i = \emptyset$, то, ввиду утверждения 9, $\bigcap\limits_{i=1}^{m} \mathfrak{O}_i$ является открытым множеством.

б₁) Пусть $\bigcap\limits_{i=1}^{m} \mathfrak{O}_i \neq \emptyset$, $\{A_1^n\} \in \mathfrak{S}$, $\{A_1^n\} \subseteq \bigcap\limits_{i=1}^{m} \mathfrak{O}_i$ и $[A_1^n] \nsubseteq \bigcap\limits_{i=1}^{m} \mathfrak{O}_i$. Так как в этом случае импликация из (2) сводится на $\perp \Rightarrow p$, то $\bigcap\limits_{i=1}^{m} \mathfrak{O}_i$ является открытым множеством.

б₂) Пусть, наконец, имеет место: $\bigcap\limits_{i=1}^{m} \mathfrak{O}_i \neq \emptyset$, $\{A_1^n\} \in \mathfrak{S}$, $\{A_1^n\} \subseteq \bigcap\limits_{i=1}^{m} \mathfrak{O}_i$ и $[A^n] \subseteq \bigcap\limits_{i=1}^{m} \mathfrak{O}_i$. В этом случае, так как $\mathfrak{O}_i$, $i \in \{1,\ldots,m\}$, открытые множества, существуют $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m \in \mathbb{R}^+$ такие, что имеет место:

$$K]A_1^n,\varepsilon_i[\subseteq \mathfrak{O}_i \text{ для каждого } i \in \{1,\ldots,m\}..$$

Отсюда, если берем $\varepsilon \overset{\text{деф}}{=} \operatorname{Min}\{\varepsilon_1^m\}$, находим, что имеет место:

$$K]A^n,\varepsilon[\subseteq \bigcap_{i=1}^{m} \mathfrak{O}_i.$$

Теорема доказана.

* * * *

В продолжении рассматриваем $(n+1)$-метрические пространства $(\mathfrak{T},\mathfrak{L},\parallel,d)$ удовлетворяющие следующим условиям:

E3 Для каждых двух различных блоков $\ell,\ell' \in \mathfrak{L}$ имеет место одно и только одно из соотношении: $\ell \parallel \ell'$, $\ell \cap \ell' \neq \emptyset$;

M4₁ $(\forall\alpha \in R^+)(\forall\{A_1^n\} \in \mathfrak{S})(\forall\{B_1^n\} \in \mathfrak{S})([A_1^n]\parallel[B_1^n] \wedge [A_1^n] \neq$
$\neq [B_1^n] \wedge d(A_1^n,B_1) = d(B_1^n,A_1) \wedge \alpha < d(A_1^n,B_1) \Rightarrow$
$\Rightarrow (\exists X \in \mathfrak{T})(d(B_1^n,X) = \alpha \wedge d(A_1^n,X) = d(A_1^n,B_1) - \alpha))$;

M4₂ $(\forall\alpha \in R^+)(\forall\{A_1^n\} \in \mathfrak{S})(\forall\{B_1^n\} \in \mathfrak{S})([A_1^n]\parallel[B_1^n] \wedge [A_1^n] \neq$
$\neq [B_1^n] \wedge d(A_1^n,B_1) = d(B_1^n,A_1) \Rightarrow (\exists Y \in \mathfrak{T})(\exists Z \in \mathfrak{T})(d(B_1^n,Y) =$

$$= \alpha \wedge d(A_1^n,Y) = d(A_1^n,B_1) + \alpha \wedge d(A_1^n,Z) =$$

$$= \alpha \wedge d(B_1^n,Z) = d(B_1^n,A_1) + \alpha); \text{ и}$$

M5 $$(\forall\{A_1^n\} \in \mathfrak{S})(\forall\{\bar{A}_1^n\} \in \mathfrak{S})(\forall X \in \mathfrak{T})(\forall Y \in \mathfrak{T})([\bar{A}_1^n] = [A_1^n] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (d(A_1^n,X) < d(A_1^n,Y) \Rightarrow d(\bar{A}_1^n,X) < d(\bar{A}_1^n,Y))).$$

Примечание 5. В (n+1)-метрическими пространствами из примеров 2.1 и 2.2 имеют место E3, $M4_1$, $M4_2$ и M5.

Пусть $\{A_1^n\} \in \mathfrak{S}$. Тогда, учитывая M1, находим, что любое $X \in [A^n]$ является решением уравнения $d(A^n,X) = 0$. Далее, учитывая $M4_2$, находим, что уравнение $d(A_1^n,X) = \alpha$ обладает решениями для каждого $\alpha \in R^+$. Таким образом, имеет место следующее утверждение:

Лемма 13. Пусть $(\mathfrak{T}, \mathfrak{L}, \|, d)$ (n+1)-метрическое пространство удовлетворяющее условию $M4_2$. Тогда имеет место:

M4′ $$(\forall\{A_1^n\} \in \mathfrak{S})(\forall\alpha \in R\setminus R^-)(\exists X \in \mathfrak{T})d(A^n,X) = \alpha.$$

Утверждение 14. Пусть $(\mathfrak{T}, \mathfrak{L}, \|, d)$ (n+1)-метрическое пространство удовлетворяющее условиям M4′ и M5. Тогда имеет место:

$$(\forall\{A_1^n\} \in \mathfrak{S})(\forall\{\bar{A}_1^n\} \in \mathfrak{S})(\forall\varepsilon \in R^+)(\exists\bar{\varepsilon} \in R^+)([A_1^n] = [\bar{A}_1^n] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H]\bar{A}_1^n,\bar{\varepsilon}[= H]A_1^n,\varepsilon[).$$

Доказательство Пусть $H]A_1^n,\varepsilon[$ открытый шар. Тогда, ввиду леммы 13, существует $B \in \mathfrak{T}$ такое, что имеет место:

(д) $$d(A_1^n,B) = \varepsilon^{1)}.$$

Пусть, далее, $\{\bar{A}_1^n\} \in \mathfrak{S}$ удовлетворяющие условию $[\bar{A}_1^n] = [A_1^n]$. Тогда, ввиду определения 1, существует $\bar{\varepsilon} \in R^+$ такое, что имеет место равенство

---

1) $B \notin H]A_1^n,\varepsilon[$.

$$d(\bar{A}_1^n, B) = \bar{\varepsilon};$$

притом, $B \in \mathfrak{T}$ является решением уравнения под (д). Отсюда, ввиду M5, находим, что имеют место импликации

$$d(A_1^n, X) < \varepsilon \Rightarrow d(\bar{A}_1^n, X) < \bar{\varepsilon} \quad \text{и} \quad ,$$

$$d(\bar{A}_1^n, X) < \bar{\varepsilon} \Rightarrow d(A_1^n, X) < \varepsilon$$

для каждого $X \in \mathfrak{T}$. Отсюда, наконец, ввиду определения открытого шара, находим, что имеет место:

$$H]\bar{A}_1^n, \bar{\varepsilon}[= H]A_1^n, \varepsilon[.$$

Теорема 15.. Пусть $(\mathfrak{T}, \mathfrak{L}, \parallel, d)$ $(n+1)$-метрическое пространство удовлетворяющее условиям E3, M4´ и M5. Тогда открытый шар является открытым множеством в $(\mathfrak{T}, \mathfrak{L}, \parallel, d)$.

Доказательство. Пусть $\{C_1^n\}$ любое скелетное множество удовлетворяющее условию:

$$\{C_1^n\} \subseteq H]A_1^n, \varepsilon[.$$

Притом, отдельно рассмотрим возможности:

$$[C_1^n] \nparallel [A_1^n] \quad \text{и} \quad [C_1^n] \parallel [A_1^n].$$

а) Пусть $[C_1^n] \nparallel [A_1^n]$. Ввиду леммы 13[1], существует по меньшей мере одна $X \in \mathfrak{T}$ такая, что имеет место:

$$d(A_1^n, X) = \varepsilon,$$

где $\varepsilon \in R^+$ и $\{A_1^n\}$ являются, в том же порядке, радиус и центр рассматриваемо открытого шара $H]A_1^n, \varepsilon[$. Отсюда получаем: $X \notin H]A_1^n, \varepsilon[$. Далее, ввиду E2, находим, что имеет место:

$$(\exists \ell \in \mathfrak{L})(X \in \ell \wedge \ell \parallel [A_1^n]).$$

Притом, ввиду теоремы 5, имеет место:

[1] M4´.

$$(\forall B \in \mathfrak{T})(B \in \ell \Rightarrow d(A^n, B) = \varepsilon).$$

Отсюда получаем, что имеет место:

(е) $\ell \cap H]A_1^n, \varepsilon[= \emptyset.$

Далее, так как имеет место

$$\ell \parallel [A_1^n] \text{ и } [C_1^n] \nparallel [A_1^n],$$

ввиду E3, получаем, что имеет место:

$$\ell \cap [C_1^n] \neq \emptyset$$

Отсюда, ввиду (е), находим, что имеет место:

$$[C_1^n] \nsubseteq H]A_1^n, \varepsilon[.$$

Таким образом, если имеет место $[C_1^n] \nparallel [A_1^n]$, то импликация из (2) сводится на $\perp \Rightarrow p$ [1].

б) Пусть $[C_1^n] \parallel [A_1^n]$. Так как $\{C_1^n\} \subseteq H]A_1^n, \varepsilon[$, ввиду утверждения 7, имеет место:

$$[C_1^n] \subseteq H]A_1^n, \varepsilon[.$$

Далее, ввиду М3, существует $\{\bar{C}_1^n\} \in \mathfrak{S}$ таков, что для каждого $C \in \mathfrak{T}$ и каждого $B \in \mathfrak{T}$ из $C \in [C_1^n]$ и $[\bar{C}_1^n] = [C_1^n]$ следует справедливост формулы:

(ж) $d(A_1^n, B) \leq d(A_1^n, C) + d(\bar{C}_1^n, B).$

Так как $C \in [C_1^n] = [\bar{C}_1^n] \subseteq H]A_1^n, \varepsilon[$ и $[C_1^n] \parallel [A_1^n]$, ввиду теоремы 5, справедливо:

(з) $(\exists \varepsilon_1 \in R \setminus R^-)(\forall C \in [C_1^n]) d(A_1, C) = \varepsilon_1.$

Притом, $\varepsilon_1 < \varepsilon$; $\varepsilon - \varepsilon_1 \in R^+$ [2].

---

[1] $\vartheta(\perp \Rightarrow p) = T.$

[2] Ввиду $\varepsilon - \varepsilon_1 \in R^+$, существует: $H]\bar{C}_1^n, \varepsilon - \varepsilon_1[.$

Из (ж), учитывая (з), находим, что имеет место:

$$d(A^n_1,X) \le d(A^n_1,C) + d(\bar{C}^n_1,X) < \varepsilon_1 + (\varepsilon-\varepsilon_1) = \varepsilon$$

для каждого $X \in H]\bar{C}^n_1,\varepsilon - \varepsilon_1[$. Отсюда, ввиду утверждения 14[1], находим, что существует $\varepsilon_1 \in R^+$ такой, что

$$H]C^n_1,\varepsilon_2[\subseteq H]A^n_1,\varepsilon[.$$

Теорема доказана..

Теорема 16. Пусть $(\mathfrak{C},\mathfrak{L},\|,d)$ $(n+1)$-метрическое пространство удовлетворяющее условию $M4_1$. Тогда открытый шар $H]A^n_1,\varepsilon[$ не является закрытым множеством в $(\mathfrak{C},\mathfrak{L},\|,d)$.

Доказательство. Множество $H]A^n,\varepsilon[$ не является закрытым тогда и только тогда, когда множество $\mathfrak{C} \setminus H]A^n,\varepsilon[$ не является открытым множеством. Множество $\mathfrak{C} \setminus H]A^n,\varepsilon[$ не являєтся открытым тогда и только тогда, когда имеет место:

$$(\exists\{B^n_1\} \in \mathfrak{S})(\{B^n_1\} \subseteq \mathfrak{C} \setminus H]A^n_1,\varepsilon[\wedge [B^n_1] \subseteq$$

$$\subseteq \mathfrak{C} \setminus H]A^n_1,\varepsilon[\wedge (\forall\beta \in R^+)H]B^n_1,\beta[\nsubseteq \mathfrak{C} \setminus H]A^n_1,\varepsilon[).$$

Учитывая лемму 13, находим, что существует $B \in \mathfrak{C}$ удовлетворяющий равенству

$$d(A^n_1,B) = \varepsilon,$$

где $\varepsilon \in R^+$ является радиусом открытого шара $H]A^n_1,\varepsilon[$. Отсюда, учитывая E2, находим, что существует $\ell \in \mathfrak{L}$ такое, что имеет место::

$$\ell \,\|\, [A^n_1] \quad \text{и } B \in \ell.$$

Отсюда, учытывая, что $B \notin H]A^n_1,\varepsilon[$, на основании теоремы 5, находим, что имеет место равенство:

---

[1] Утверждение 14 является следствием леммы 13 (условия M4´) и и условия M5.

$$\ell \cap H]A_1^n, \varepsilon[\; = \emptyset,$$

т.е., что

$$\ell \subseteq \mathfrak{T} \setminus H]A_1^n, \varepsilon[.$$

Пусть, далее, $\{B_1^n\}$ любое скелетное множество удовлетворяющее условию:

$$[B_1^n] = \ell.$$

Отсюда, так как $[B_1^n] \parallel [A_1^n]$, ввиду M2, находим, что существует скелетное множество $\{\bar{B}_1^n\}$ такое, что имеют место равенства

$$[\bar{B}_1^n] = [B_1^n] \quad \text{и}$$

$$d(\bar{B}_1^n, A_1) = d(A_1^n, B_1) = \varepsilon.$$

Отсюда, далее, ввиду $M4_1$, находим, что для каждого $\alpha \in R^+$ удовлетворяющего условию $\alpha < d(A_1^n, B_1) = \varepsilon$ существует $X \in \mathfrak{T}$ такое что имеет место

$$d(\bar{B}_1^n, X) = \alpha \text{ и } \; d(A_1^n, X) = \varepsilon - \alpha.$$

Из второго равенства находим, что имеет место:

(и) $\qquad X \in H]A_1^n, \varepsilon[\; .$

Притом, из первого равенства находим, что имеет место

(й) $\qquad X \in H]\bar{B}_1, \beta[,$

где $\beta = \alpha + \gamma$, $\gamma \in R^+$.

Наконец, из (и) и (й), так как $\alpha \in R^+$ любое положительное число удовлетворяющее условию $\alpha < \varepsilon$ и γ любое положительное число, находим, что для каждого $\beta \in R^+$ имеет место:

$$H]\bar{B}_1^n, \beta[\; \nsubseteq \; \mathfrak{T} \setminus H]A_1^n, \varepsilon[.$$

Теорема доказана.

Утверждение 17. Пусть $(\mathfrak{T}, \mathfrak{L}, \parallel, d)$ (n+1)-метрическое пространство удовлетворяющее условию $M4_2$. Тогда закрытый шар $H[A_1,\varepsilon]$ не является открытым множеством в $(\mathfrak{C},\mathfrak{L},\|,d)$.

Доказательство. Пусть $H[A_1,\varepsilon]$ любой закрытый шар в $(n+1)$-метрическому пространству $(\mathfrak{C},\mathfrak{L},\|,d)$. Тогда, ввиду леммы 13[1], существует $B \in \mathfrak{C}$ удовлетворяющая равенству

$$d(A_1^n,B) = \varepsilon.$$

Притом, $B \in H[A_1^n,\varepsilon]$. Ввиду E2, существует блок $[B_1^n] \in \mathfrak{L}$, $\{B_1^n\} \in$ $\in \mathfrak{S}$, такой, что имеет место:

$$[B_1^n] \| [A_1^n] \text{ и } B \in [B_1^n].$$

Отсюда, ввиду теоремы 5 и определения закрытого шара, находим, что имеет место::

$$[B_1^n] \subseteq [A_1^n,\varepsilon]$$

Далее, так как $[A_1^n] \| [B_1^n]$, ввиду M2, находим, что существует $\{\bar{B}_1^n\} \in \mathfrak{S}$ такое, что имеют место равенства

$$[\bar{B}_1^n] = [B_1^n] \quad \text{и}$$

$$d(\bar{B}_1^n,A_1) = d(A_1^n,B_1) = \varepsilon.$$

Отсюда, далее, ввиду $M4_2$, находим, что для каждого $\alpha \in R^+$ существует $Y \in \mathfrak{C}$ такое, что имеет место

$$d(\bar{B}_1^n,Y) = \alpha \text{ и } d(A_1^n,Y) = \varepsilon + \alpha.$$

Из второго равенства находим, что имеет место:

(к) $\qquad Y \notin H[A_1^n,\varepsilon].$

Притом, из первого равенства находим, что имеет место:

(л) $\qquad Y \in H]\bar{B}_1^n,\beta[,$

где $\beta = \alpha + \gamma$, $\gamma \in R^+$.

---

[1] лемма 13 является следствием условия M1 и условия $M4_2$.

Наконец, из (к) и (л), так как α и γ любые положительные числа, находим, что для каждого $\beta \in R^+$ имеет место::

$$K]\bar{B}_1^n, \beta[\nsubseteq K[A_1^n, \varepsilon].$$

Утверждение доказано.

Утверждение 18. Пусть $(\mathfrak{T}, \mathfrak{L}, \parallel, d)$ (n+1)-метрическое пространство удовлетворяющее условиям E3, $M4_1$, M4´ и M5. Тогда закрытый шар $K[A_1^n, \varepsilon]$ является закрытым множеством в $(\mathfrak{T}, \mathfrak{L}, \parallel, d)$.

Доказательство. Множество $K[A_1^n, \varepsilon]$ является закрытым множеством тогда и только тогда, когда множество $\mathfrak{T} \setminus K[A_1^n, \varepsilon]$ является открытым множеством.

Пусть $\{B_1^n\}$ любое скелетное множество удовлетворяющее условию:

$$\{B_1^n\} \subseteq \mathfrak{T} \setminus K[A_1^n, \varepsilon]$$

Притом, отдельно рассмотрим возможности:

$$[B_1^n] \nparallel [A_1^n] \text{ и } [B_1^n] \parallel [A_1^n].$$

а) При $[B_1^n] \nparallel [A_1^n]$, ввиду E3 имеет место::

$$[B_1^n] \cap [A_1^n] \neq \emptyset.$$

Отсюда, так как

$$[B_1^n] \cap [A_1^n] \subseteq [A_1^n] \text{ и } [A_1^n] \subset K[A_1^n, \varepsilon]^{1)},$$

находим, что имеет место:

$$[B_1^n] \nsubseteq \mathfrak{T} \setminus K[A_1^n, \varepsilon]$$

Отсюда, далее, находим, что в этом случае импликация под (2) превращается в $\perp \Rightarrow p$ [2].

б) Пусть $[B_1^n] \parallel [A_1^n]$. Тогда, ввиду M2, имеют место равенства:

---

1) $[A_1^n] \subseteq K]A_1^n, \varepsilon[\subseteq K[A_1^n, \varepsilon]$; утверждение 6.

2) $\vartheta\ (\perp \Rightarrow p) = T$.

$$[\bar{B}_1^n] = [B_1^n] \text{ и}$$

$$d(\bar{B}_1^n, A_1) = d(A_1^n, B_1).$$

Отсюда, ввиду $M4_1$, находим, что для каждого $\alpha \in R^+$ удовлетворяющего условию $\alpha < d(A_1^n, B_1)$ существует $X \in \mathfrak{T}$ такая, что имеет место

$$d(\bar{B}_1^n, X) = \alpha \text{ и } d(A_1^n, X) = d(A_1^n, B_1) - \alpha,$$

т.е., что имеет место:

$$\text{(м)} \qquad d(\bar{B}_1^n, X) = \alpha \text{ и } \alpha = d(A_1^n, B_1) - d(A_1^n, X).$$

Притом, очевидно, имеет место:

$$d(A_1^n, X) > \varepsilon \Rightarrow X \in \mathfrak{T} \setminus H[A_1^n, \varepsilon]$$

для каждого $X \in \mathfrak{T}$. Отсюда, учитывая (м), находим, что имеет место:

$$\alpha < d(A_1^n, B_1) - \varepsilon \Rightarrow X \in \mathfrak{T} \setminus H[A_1^n, \varepsilon]$$

для каждого $X \in \mathfrak{T}$. Таким образом, если $\bar{\beta} = d(A_1, B_1) - \varepsilon$, $\bar{\beta} \in R^+$, то имеет место:

$$H]\bar{B}_1^n, \bar{\beta}[\subseteq \mathfrak{T} \setminus H[A_1^n, \varepsilon]..$$

Отсюда, наконец, ввиду утверждения 14[1], находим, что существует открытый шар $H]B_1^n, \beta[$ $(= H]\bar{B}_1^n, \bar{\beta}[)$ удовлетворяющий условию:

$$H]B_1, \beta[\subseteq \mathfrak{T} \setminus H[A_1^n, \varepsilon].$$

Утверждение доказано.

Примечание 6. В 3-метрическом пространстве из примера 2.1 множество A всех точек квадрата (рис 4_1) является (ввиду утверждение 11) открытым множеством. Притом, A является и закрытым

---

[1] Утверждение 14 является следствием леммы 13 (условия M4´) и условия M5.

множеством так как $\mathfrak{T} \setminus A$ (рис. 4_2) является открытым множеством[1].

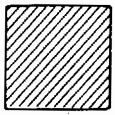

Рис. 4_1

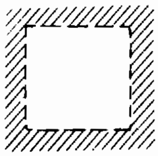

Рис. 4_2

На рис, 5 изображены множества A и B объединение которых является закрытым шаром $H[A_1^2,\varepsilon]$ в 3-метрическом пространстве из примера 2.1. Отсюда, так как, ввиду утверждений 17 и 18, $H[A_1^2,\varepsilon]$ является закрытым и не является открытым множеством, а множества A и B открытые множества (ввиду утверждения 11), находим, что имеет место:

Утверждение 19. Существуют (n+1)-метрические пространства $(\mathfrak{T},\mathfrak{L},\|,d)$ такие, что имеет место: существуют открытые множества A и B объединение которых, именно $A \cup B$, является закрытым множеством и не является открытым множеством в $(\mathfrak{T},\mathfrak{L},\|,d)$.

Примечание 7. Множества A и B изображены на рис. 5 являются и закрытыми множествами, так как $\mathfrak{T} \setminus A$ и $\mathfrak{T} \setminus B$ являются открытыми множествами.

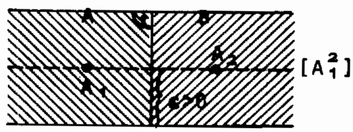

Рис.. 5

ЛИТЕРАТУРА

[1] Harmantis J., Generalized Partitions and Lattice Embedding Theory, Proc. of Symphosium in Pure Math., Vol. II, Lattice Theory, Amer. Math. Soc. (1961), 22 - 30.

[2] Pickett H. E., A note Generalized Equivalence Relations, Amer. Math., Monthly, (1966), 73, No. 8, 860 - 861.

[3] Ušan J., A_t-groupoids, Proceedings of the Conference "Algebra and Logic" - Cetinje 1986, Novi Sad 1987, 209 -219.

[4] Белоусов В. Д., Алгебраические сети и квазигруппы, Кишинев, Штиинца, 1971.

---

[1] $A \notin \{\emptyset,\mathfrak{T}\}$.

[5] **Dénes J., Keedwell A. D.**, Latin Squares and Applications, Akademiai Kiadó, Budapest, 1974.

[6] **Havel V.**, Nets and groupoids, Comm..Math. Univ. Carol 8, 3, 1967, 435 - 449.

[7] **Havel V.**, Nets associated to multigroupoids, Aeq. Math. 5, 1970, 10 - 18.

[8] **Havel V.**, General nets and associated groupoids, Proceedings of the Symposium n-ary structures, Skopje 1982, 229 - 241.

[9] **Taylor M.**, Classical, cartesian and solution nets, Mathematica, Cluj, 13(36), 1, 1971, 151 - 166.

[10] **Ušan J.**, k-seminets, Mat..Bilten, Skopje, 1(XXVII), 1977, 41 - 46.

[11] **Ушан Я.**, LN-k- и RN-k-полусети, Review of Research Faculty of Science, University of Novi Sad, Math. Ser. 16-1 (1986), 161 - 179..

[12] **Ушан Я.**, k-<2>-полусети, Review of Research Faculty of Science, University of Novi Sad ,Math. Ser., 16-? (1986), 173-196.

[13] **Rado F.**, Generalizarea ţesuturilor spatiale pentru structuri algebrice, Studia Univ. "Babes-Bolyai", ser. math.-phys., 1960- No. 1, 41 - 55.

[14] **Rado,F.**, Eine Bedingung für die regularität der Gewebe, Mathematica, Vol..2(25), 2, 1960, 325 - 334.

[15] **Bauur R.**, The algebra and geometry of polyadic quasigroups and loops, Doct. diss., Rutgers-the State University, 1968, 204.

[16] **Бектенов А.С.**, Алгебраические (k,n)-сети и ортогональные системы n-арных квазигрупп, Изв. АН МССР, сер. физ. тех. и мат. наук, 1974, Но. 1, 3 - 11.

[17] **Stojmenovski K.**, n-Dimensional seminets and partial n-quasigroups, Algebraic conference 1980, Skopje, 115 - 120.

[18] **Ушан Я.**, Частичные A_t-группоиды, Review of Research Faculty of Science, University of Novi Sad, Math..Ser., 17-2 (1987),

РЕЗИМЕ

<Nn,E>-REŠETKE SA (n+1)-RASTOJANJEM

U radu se uvodi i razmatra struktura $(\mathfrak{C},\mathfrak{L},\parallel,d)$, gde je $(\mathfrak{C},\mathfrak{L},\parallel)$ <Nn,E>-rešetka a d preslikavanje skupa $\mathfrak{C}$ u skup $R\setminus R^-$ sa odredjenim osobinama.

Received by the editors September 4,1988.