Univ. u Novom Sadu,
Zb. Rad. Prirod.-Mat. Fak.
Ser. Mat. 17,2, 57-63(1989)

REVIEW OF RESEARCH
FACULTY OF SCIENCE
MATHEMATICS SERIES

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИЮ РЕШЕТОК

Янез Ушан

Institute of Mathematics, University of Novi Sad
Dr Ilije Djuričića 4, 21000 Novi Sad, Yugoslavia

РЕЗЮМЕ

В работе определяется алгебраическая структура являющаяся одним обобщением решеток. В настоящей работе автор эту структуру позволил себе назвать <u>почти-решеткой</u>. Притом, в работе рассматриваются некоторые построения почти-решеток продолжениями решеток или почти-решеток.

*

Пусть (Q,∇) и (Q,Δ) коммутативные полугруппы. Объект (Q,∇,Δ) назовем <u>почти-решеткой</u> тогда и только тогда, когда имеет место:

<u>ПР1</u> $x \nabla x = x$ и $x \Delta x = x$; и

<u>ПР2</u> $x \Delta (y \nabla z \nabla x) = (x \Delta y) \nabla (x \Delta z) \nabla (x \Delta x)$[1]
для любых $x,y,z \in Q$.

Очевидно имеет место следующее утвреждение:

<u>Утверждение 1.</u> Каждая решетка является почти-решеткой.

[1] обессиленная дистрибутивность; см. примечание.

AMS Mathematics Subject Classification (1980): 20N99
Key words and phrases: semigroups, lattices, near-lattices, weak distributivity.

Утверждение 2. Пусть (Q,∇,Δ) почти-решетка. Тогда имеет место:

ПР3 $x\,\Delta\,(y\,\nabla\,x) = x\,\nabla\,(y\,\Delta\,x)$[1] для любых $x,y \in Q$.

Доказательство. Ввиду ассоциативности для ∇, ПР1 и комутативности для ∇ и Δ находим, что имеют место равенства:

$$x\,\Delta\,(y\,\nabla\,x\,\nabla\,x) = x\,\Delta\,(y\,\nabla\,x) \quad \text{и}$$

$$(x\,\Delta\,y)\,\nabla\,(x\,\Delta\,x)\,\nabla\,(x\,\Delta\,x) = x\,\nabla\,(y\,\Delta\,x)$$

для любых $x,y \in Q$. Отсюда учитывая ПР2, находим, что имеет место ПР3.

Теорема 3. Пусть (Q,∇,Δ) любая почти-решетка. Пусть, далее,

(1) $$Q \overset{\text{деф}}{=} \hat{Q} \cup \{e\},\ e \notin \hat{Q};$$

и имеет место

(2) $$x \,ⓥ\, y \overset{\text{деф}}{=} \begin{cases} x\,\nabla\,y, & (x,y) \in \hat{Q}^2 \\ x, & y = e, x \in Q \\ y, & x = e, y \in Q \end{cases};$$

(3) $$x \,ⓐ\, y \overset{\text{деф}}{=} \begin{cases} x\,\Delta\,y, & (x,y) \in \hat{Q}^2 \\ x, & y = e, x \in Q \\ y, & x = e, y \in Q. \end{cases}$$

Тогда $(Q,ⓥ,ⓐ)$ почти-решетка неявляющаяся решеткой.

Доказательство. а) Из определении (1)-(3) непосредственно следует, что $e \in Q$, $e \notin \hat{Q}$, являетсч единицей группоидов $(Q,ⓥ)$ и $(Q,ⓐ)$.

б) Учитывая предположение, что $(\hat{Q},\nabla,\Delta)$ почти-решетка, т.е., что в $(\hat{Q},\nabla,\Delta)$ имеет место ПР1, ввиду (2), (3) и а), находим, что в $(Q,ⓥ,ⓐ)$, также, имеет место ПР1.

в) Ввиду а) и предположения, что $(\hat{Q},\nabla,\Delta)$ почти-решетка, находим, что $(Q,ⓥ)$ и $(Q,ⓐ)$ коммутативные полугруппы.

г) Учитывая предположение, что (Q,∇,Δ) почти-решетка, т.е., что в $(\hat{Q},\nabla,\Delta)$ имеет место ПР3 (утверждение 2) и, ввиду а),

[1] обессиленное поглощение; см. доказательство теоремы 3 под г).

имеют место равенства

$$x \textcircled{\scriptsize$\Delta$} (e \textcircled{\scriptsize$\nabla$} x) = x \textcircled{\scriptsize$\nabla$} (e \textcircled{\scriptsize$\Delta$} x) = x \quad \text{и}$$

$$e \textcircled{\scriptsize$\Delta$} (x \textcircled{\scriptsize$\nabla$} e) = e \textcircled{\scriptsize$\nabla$} (x \textcircled{\scriptsize$\Delta$} e) = x \tag{e}$$

для любого $x \in Q$, находим, что в $(Q, \textcircled{\scriptsize$\nabla$}, \textcircled{\scriptsize$\Delta$})$, также имеет место ПР3. Притом, так как равенства под (е) имеют место для любого $x \in Q$, где $|Q| \geq 2$, находим, что в $(Q, \textcircled{\scriptsize$\nabla$}, \textcircled{\scriptsize$\Delta$})$ не имеют место законы поглощения. В самом деле, отсюда получаем, что $(Q, \textcircled{\scriptsize$\nabla$}, \textcircled{\scriptsize$\Delta$})$ не является решеткой.

д) Так как ПР2 имеет место в $(\hat{Q}, \nabla, \Delta)$, то ПР2 имеет место в $(Q, \textcircled{\scriptsize$\nabla$}, \textcircled{\scriptsize$\Delta$})$ для всех $x, y, z \in Q \setminus \{e\}$.

Ввиду а) и в), имеют место равенства

$$e \textcircled{\scriptsize$\Delta$} (y \textcircled{\scriptsize$\nabla$} z \textcircled{\scriptsize$\nabla$} e) = y \nabla z \quad \text{и}$$

$$(e \textcircled{\scriptsize$\Delta$} y) \textcircled{\scriptsize$\nabla$} (e \textcircled{\scriptsize$\Delta$} z) \textcircled{\scriptsize$\nabla$} (e \textcircled{\scriptsize$\Delta$} e) = y \textcircled{\scriptsize$\nabla$} z$$

для любых $y, z \in Q$. Отсюда находим, что ПР2 имеет место в $(Q, \textcircled{\scriptsize$\nabla$}, \textcircled{\scriptsize$\Delta$})$ для всех $y, z \in Q$ и $x = e$.

Ввиду а), б) и в), находим, что имеют место равенства

$$x \textcircled{\scriptsize$\Delta$} (e \textcircled{\scriptsize$\nabla$} z \textcircled{\scriptsize$\nabla$} x) = x \textcircled{\scriptsize$\Delta$} (z \textcircled{\scriptsize$\nabla$} x) \quad \text{и}$$

$$(x \textcircled{\scriptsize$\Delta$} e) \textcircled{\scriptsize$\nabla$} (x \textcircled{\scriptsize$\Delta$} z) \textcircled{\scriptsize$\nabla$} (x \textcircled{\scriptsize$\Delta$} x) = x \textcircled{\scriptsize$\nabla$} (z \textcircled{\scriptsize$\Delta$} x)$$

для любых $x, z \in Q$. Отсюда, ввиду г), находим, что ПР2 имеет место в $(Q, \textcircled{\scriptsize$\nabla$}, \textcircled{\scriptsize$\Delta$})$ для всех $x, z \in Q$ и $y = e$. Одновременно, ввиду в), мы получили, что ПР2 имеет место в $(Q, \textcircled{\scriptsize$\nabla$}, \textcircled{\scriptsize$\Delta$})$ для всех $x, y \in Q$ и $z = e$.

Ввиду а) и в), находим, что имеют место равенства

$$x \textcircled{\scriptsize$\Delta$} (e \textcircled{\scriptsize$\nabla$} e \textcircled{\scriptsize$\nabla$} x) = x \textcircled{\scriptsize$\Delta$} x \quad \text{и}$$

$$(x \textcircled{\scriptsize$\Delta$} e) \nabla (x \textcircled{\scriptsize$\Delta$} e) \textcircled{\scriptsize$\nabla$} (x \textcircled{\scriptsize$\Delta$} x) = x \textcircled{\scriptsize$\nabla$} x \textcircled{\scriptsize$\nabla$} (x \textcircled{\scriptsize$\Delta$} x)$$

для любого $x \in Q$. Отсюда, ввиду б) и в), находим что ПР2 имеет место для любого $x \in Q$ и $y = z = e$.

Теорема доказана.

Следствием теоремы 3 и утверждения 1 является следующее утверждение:

<u>Теорема 4.</u> Пусть $(\hat{Q}, \cup, \cap)$ любая решетка. Пусть, далее,

$$(\bar{1}) \qquad Q \overset{\text{деф}}{=} \hat{Q} \cup \{e\},\ e \notin \hat{Q};$$

и имеет место

$$(\bar{2}) \qquad x \nabla y = \begin{cases} x \cup y, & (x,y) \in \hat{Q}^2 \\ x, & y = e,\ x \in Q\ ; \\ y, & x = e,\ y \in Q \end{cases}$$

$$(\bar{3}) \qquad x \Delta y = \begin{cases} x \cap y, & (x,y) \in \hat{Q}^2 \\ x, & y = e,\ x \in Q \\ y, & x = e,\ y \in Q. \end{cases}$$

Тогда (Q, ∇, Δ) почти-решетка не являющаяся решеткой.

<u>Утверждение 5.</u> Пусть $(\hat{Q}, \cup, \cap)$ любая решетка обладающая по меньшей мере двумя элементами $a, b \in \hat{Q}$ удовлетворяющими условию $a \leq b$ и $a \neq b$. Пусть, далее, объект $(\hat{Q}, \nabla, \Delta)$ определен через $(\bar{1})$ - $(\bar{3})$ из теоремы 4. Тогда в (Q, ∇, Δ) не имеют место закон дистрибутивности и закон модулярности.

<u>Доказательство.</u> Так как, ввиду ПР1 и ассоциативности для Δ, модулярност является следствием дистрибутивности, в настоящем случае достаточно доказать утверждение для несправедливости модулярного закона[1].

Пусть $a, b \in \hat{Q}$ и имеет место:

$$a \leq b,\ a \neq b.$$

Из равенств

$$b \Delta ((b \Delta a) \nabla e) = b \Delta (b \Delta a) \quad \text{и}$$

$$(b \Delta a) \nabla (b \Delta e) = (b \Delta a) \nabla b,$$

ввиду ассоциативности для Δ и ПР1, получаем равенства

$$b \Delta ((b \Delta a) \nabla e) = b \Delta a \quad \text{и}$$

$$(b \Delta a) \nabla (b \Delta e) = (b \Delta a) \nabla b.$$

Отсюда, так как $a, b \in \hat{Q}$, ввиду определении $(\bar{1})$ - $(\bar{3})$ из теоремы 4, учитывая условие $a \leq b$, $a \neq b$, находим, что имеет место:

[1] $(D \Rightarrow M) \Leftrightarrow (\neg M \Rightarrow \neg D)$ - тавтология.

$$b \Delta ((b \Delta a) \nabla e) \neq (b \Delta a) \nabla (b \Delta e).$$

Утверждение 6. Пусть $(\hat{Q}, \cup, \cap)$ любая решетка. Пусть, далее, объект (Q, ∇, Δ) определен через $(\bar{1})$ - $(\bar{3})$ из теоремы 4. Тогда в (Q, ∇, Δ) имеет место

ПР2' $\quad x \nabla (y \Delta z \Delta x) = (x \nabla y) \Delta (x \nabla z) \Delta (x \nabla x)$[1] для всех $x, y, z \in Q$.

Доказательство. Очевидно, в любой решетке $(\hat{Q}, \cup, \cap)$ имеет место равенство

$$x \cup (y \cap z \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z) \cap (x \cup x)$$

для всех $x, y, z \in \hat{Q}$. Таким образом, ввиду $(\bar{2})$ и $(\bar{3})$ из теоремы 4, ПР2' имеет место в (Q, ∇, Δ) для всех $x, y, z \in Q \setminus \{e\}$.

Ввиду а) и в) из доказательства теоремы 3, имеют место равенства

$$e \nabla (y \Delta z \Delta e) = y \Delta z \quad \text{и}$$

$$(e \nabla y) \Delta (e \nabla z) \Delta (e \nabla e) = y \Delta z$$

для любых $y, z \in Q$. Отсюда находим, что ПР2' имеет место в (Q, ∇, Δ) для всех $y, z \in Q$ и $x = e$.

Ввиду а), б) и в) из доказательства теоремы 3, находим, что имеют место равенства

$$x \nabla (e \Delta z \Delta x) = x \nabla (z \Delta x) \quad \text{и}$$

$$(x \nabla e) \Delta (x \nabla z) \Delta (x \nabla x) = x \Delta (z \nabla x)$$

для любых $x, z \in Q$. Отсюда, ввиду г) из доказательства тероемы 3, находим, что ПР2' имеет место в (Q, ∇, Δ) для всех $x, z \in Q$ и $z = e$.

Ввиду а) и в) из доказательства теоремы 3, находим, что имеют место равенства

$$x \nabla (e \Delta e \Delta x) = x \nabla x \quad \text{и}$$

$$(x \nabla e) \Delta (x \nabla e) \Delta (x \nabla x) = x \Delta x \Delta (x \nabla x)$$

для любого $x \in Q$. Отсюда, ввиду б) и в) из доказательства тео-

[1] Дуал от ПР2.

ремы 3, находим, что ПР2$'$ имеет место для любого $x \in Q$ и $y = z = e$.

Утверждение доказано.

Теорема 7. Пусть $(\hat{Q},\nabla,\Delta)$ любая почти-решетка. Пусть, далее,

$$(\bar{1})\qquad Q \overset{\text{деф}}{=} \hat{Q} \cup \{0\},\ 0 \notin \hat{Q};$$

и имеет место

$$(\bar{2})\qquad x \circledtriangledown y \overset{\text{деф}}{=} \begin{cases} x \nabla y, & (x,y) \in \hat{Q}^2 \\ 0, & y=0, x \in Q \\ 0, & x = 0, y \in Q \end{cases}$$

$$(\bar{3})\qquad x \circledtriangleup y \overset{\text{деф}}{=} \begin{cases} x \Delta y, & (x,y) \in \hat{Q}^2 \\ 0, & y = 0, x \in Q \\ 0, & x = 0, y \in Q. \end{cases}$$

Тогда $(Q,\circledtriangledown,\circledtriangleup)$ почти-решетка неявляющаяся решеткой.

Доказательство.

а) Из определения $(\bar{\bar{2}})$ и $(\bar{\bar{3}})$ непосредственно следует, что $0 \in Q$, $0 \notin \hat{Q}$, является нулем группоидов $(Q,\circledtriangledown)$ и $(Q,\circledtriangleup)$, т.е., что имеют место формулы

$$(\forall x \in Q)(\forall y \in Q)(x = 0 \vee y = 0 \Rightarrow x \nabla y = 0) \quad и$$

$$(\forall x \in Q)(\forall y \in Q)(x = 0 \vee y = 0 \Rightarrow x \Delta y = 0).$$

б) Учитывая предположение, что $(\hat{Q},\nabla,\Delta)$ почти-решетка, т.е., что в $(\hat{Q},\nabla,\Delta)$ имеет место ПР1, ввиду $(\bar{\bar{2}})$, $(\bar{\bar{3}})$ и а), находим, что в $(Q,\circledtriangledown,\circledtriangleup)$, также, имеет место ПР1.

в) Ввиду а) и предположения, что $(\hat{Q},\nabla,\Delta)$ почти-решетка, находим, что $(Q,\circledtriangledown)$ и $(Q,\circledtriangleup)$ коммутативние полугруппы.

г) Учитывая предположение, что (Q,∇,Δ) почти-решетка, т.е., что в (Q,∇,Δ) имеет место ПР3 и, ввиду а), имеют место равенства

$$(\bar{e})\qquad x \circledtriangleup (0 \circledtriangledown x) = x \circledtriangledown (0 \circledtriangleup x) = 0 \quad и$$

$$0 \circledtriangleup (x \circledtriangledown 0) = 0 \circledtriangledown (x \circledtriangleup 0) = 0$$

для любого $x \in Q$, находим, что в $(Q,\circledtriangledown,\circledtriangleup)$, также, имеет место ПР3. Притом, так как равенства под $(\bar{e})$ имеют место для любого $x \in Q$, где $|Q| \geq 2$, находим, что в $(Q,\circledtriangledown,\circledtriangleup)$ не имеют место законы поглощения. В самом деле, отсюда получаем, что $(Q,\triangledown,\vartriangle)$ не является решеткой.

д) Так как ПР2 имеет место в $(\hat{Q},\triangledown,\vartriangle)$, то ПР2 имеет место в $(Q,\triangledown,\vartriangle)$ для всех $x,y,z \in Q \setminus \{e\}$. Далее, ввиду а) и в), непосредствено находим, что ПР2 имеет место в $(Q,\triangledown,\vartriangle)$ для всех $x,y,z \in Q$.

Примечание. Следствием ассоциативности являются, например, законы:

$$(a * b) * (c * d) = (a * (b * c)) * d \quad \text{и}$$

(м) $$(a * b) * (c * a) = (a * (b * c)) * a.$$

Притом, существуют группоиды $(Q,*)$ удовлетворяющие закону (м) и неявляющиеся полугруппамы. Примерами таких группоидов являются муфанговы лупы [1 - 3]. Подобним способом построен закон обессиленной дистрибутивности ПР2.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Курош А.Г., Общая алгебра, лекции 1969-1970 учебного года, "Наука", Москва 1974.

[2] Белоусов В.Д., Основы теории квазигрупп и луп, "Наука", Москва 1967.

[3] Bruck R., A survey of binary systems, Berlin - Heidelberg - Gőtingen, Springer-Verlag, 1958.

REZIME

O JEDNOM UOPŠTENJU MREŽA

U radu se uvode i razmatraju skoro-mreže kao jedno uopštenje mreža. Pri tom, u radu se opisuju neke konstrukcije skoro-mreža jednoelementnim produživanjima mreža ili skoro-mreža.

Received by the editors June 1,1988.