Univ. u Novom Sadu,
Zb. Rad. Prirod.-Mat. Fak.
Ser. Mat. 17,2, 109-127(1987)

REVIEW OF RESEARCH
FACULTY OF SCIENCE
MATHEMATICS SERIES

ЧАСТИЧНЫЕ A_t-ГРУППОИДЫ

Янез Ушан

University of Novi Sad, Faculty of Science,
Institute of Mathematics, Dr. I. Djuričića 4,
21000 Novi Sad, Yugoslavia

РЕЗЮМЕ

В [1] введены понятия A_t^3- и A_t^4-алгебр. В [2] дано такое определение A_t^m-квазигруппы (A_t^m-алгебры), что A_t^3- и A_t^4-алгебры оказываются ее частными случаями. В [4] введено понятие A_t-квазигруппы как одно обобщение понятия A_t^m-квазигруппы. В [5] введено понятие A_t-группоида как одно обобщение понятия A_t-квазигруппы. В настоящей работе дано такое определение частичного A_t-группоида, что A_t-группоиды оказываются ее частными случаями. С помощью частичных A_t-группоидов можно координатизировать конечные Р2Н-геометрии. В самом деле, каждому частичному группоиду соответствует конечная Р2Н-геометрия, и каждой конечной Р2Н-геометрии соответствует класс попарно генероморфных частичных A_t-группоидов. Притом, каждый частичный A_t-группоид удовлетворяющий условию $|[a,b]| \geq 3$, $a \neq b$, $(a,b) \in D$, генероморфен некоторой частичной A_t-квазигруппе.

☆

Объект $(\mathfrak{C}, A)$ является частичным группоидом тогда и только тогда, когда

$$A : D \to \mathfrak{C},\ D \subseteq \mathfrak{C}^2\ ^{1)}.$$

---

1) $D \neq \emptyset$.

AMS Mathematics Subject Classification (1980): 20N05.

Key words and phrases: A_t^m-quasigroups, A_t-quasigroups, A_t-groupoids, partial A_t-groupoids, 2H-geometry, P2H-geometry.

Частичный группоид $(\mathfrak{T},A)$ является группоидом тогда и только тогда, когда $D = \mathfrak{T}^2$. Частичный подгруппоид частичного группоида $(\mathfrak{T},A)$ порождающий элементами $a,b \in \mathfrak{T}$ будем обозначать через $([\{a,b\}],A)$, или просто через $([a,b],A)$; $[a,b] = [b,a] \neq \emptyset$[1]. Притом, пусть имеет место:

$$(0) \qquad [a,b] = \emptyset \overset{\text{деф}}{\Leftrightarrow} (a,b) \notin D \wedge (b,a) \notin D^{2)}.$$

Определение 1. Частичным A_t-группоидом назовем частичный группоид $(\mathfrak{T},A)$, $|\mathfrak{T}| = t \in N \setminus \{1\}$, тогда и только тогда, когда имеет место:

<u>G0</u> $(\forall a \in \mathfrak{T})A(a,a) = a$;

<u>G1</u> $a \neq b \wedge c \neq d \wedge [a,b] \neq [c,d]^{3)} \Rightarrow$
$\Rightarrow |[a,b] \cap [c,d]| \leqslant 1$ для любых $a,b,c,d \in \mathfrak{T}$;

<u>G2</u> Если $(a,b) \in D$ и $a \neq b$, то $([a,b],A)$ является группоидом для любых $a,b \in \mathfrak{T}$; и

<u>G3</u> $(\forall a \in \mathfrak{T})(\exists b \in \mathfrak{T})(a \neq b \wedge (a,b) \in D)$.

В каждом группоиде $(\mathfrak{T},A)$ удовлетворяющем условию $|\mathfrak{T}| \geqslant 2$ имеет место: G2 и G3. Группоид $(\mathfrak{T},A)$, $|\mathfrak{T}| = t \in N \setminus \{1\}$ является A_t-группоидом тогда и только тогда, когда имеет место: G0 и G1 [5].

Утверждение 1. Никакое из условий G0, G1, G2, G3 не вытекает из остальных.

Доказательство.

а) Непосредствено находим, что частичный группоид

---

1) $D \neq \emptyset$.

2) Эквивалентно с: $[a,b] \neq \emptyset \Leftrightarrow (a,b) \in D \vee (b,a) \in D$.

3) см. и (0).

заданный таблицей 1_1 удовлетворяет условию G3 и не удовлетворяет условию G0. Далее, находим, что имеет место:

$$[1,2] = [1,3] = [2,3] = \{1,2,3\} ;$$
$$[3,4] = [3,5] = [4,5] = \{3,4,5\} ; \text{ и}$$
$$[1,4] = [1,5] = [2,4] = [2,5] = \emptyset.$$

Притом, $(\{1,2,3\},A)$ и $(\{3,4,5\},A)$ являются группоидами. Таким образом, частичный группоид заданный таблицей 1_1 удовлетворяет условиям G2 и G1.[1]

	1	2	3	4	5
1	2	3	2		
2	3	1	1		
3	1	2	3	5	4
4			5	4	3
5			4	3	5

Табл. 1_1

	1	2	3	4	5
1	2	1	3		
2	1	3	2		
3	3	2	1		
4				4	5
5				4	5

Табл. 1_2

б) Непосредственно находим, что частичный группоид заданый таблицей 2 удовлетворяет условиями G0 и G3. Далее, находим, что имеет место:

$$[1,2] = [1,3] = \{1,2,3\};$$
$$[2,4] = [3,4] = \{2,3,4\};$$
$$[2,3] = \{2,3\}; \text{ и}$$
$$[1,4] = \emptyset.$$

Притом, $(\{1,2,3\},A)$, $(\{2,3,4\},A)$ и $(\{2,3\},A)$ являются группоидами. Таким образом, частичный группоид заданный таблицей 2 удовлетворяет и условию G2. Наконец,,ввиду равенств

$$|[1,2] \cap [2,3]| = |\{2,3\}| = 2,$$

[1] Частичный группоид заданный таблицей 1_2 также удовлетворяет условиям G1 - G3 и не удовлетворяет условию G0.

находим, что частичный группоид заданный таблицей 2 не удовлетворяет условию G1.

A	1	2	3	4
1	1	3	2	
2	3	2	3	3
3	2	2	3	2
4		3	2	4

Табл. 2

A	1	2	3
1	1	3	2
2	3	2	
3	2		3

Табл. 3_1

ц) Непосредственно находим, что частичный группоид заданный таблицей 3_1 удовлетворяет условиям G0 и G3. Далее, находим, что имеет место:

$$[1,2] = [1,3] = \{1,2,3\} \quad \text{и} \quad [2,3] = \emptyset.$$

Притом, $(\{1,2,3\},A)$ не является группоидом. Таким образом, частичный группоид заданый таблицей 3_1 не удовлетворяет условию G2. Наконец, ввиду импликаций

$$1 \neq 2 \wedge 2 \neq 3 \wedge [1,2] \neq [2,3] \Rightarrow |[1,2] \cap [2,3]| = |\emptyset| = 0;$$
$$1 \neq 3 \wedge 2 \neq 3 \wedge [1,3] \neq [2,3] \Rightarrow |[1,3] \cap [2,3]| = |\emptyset| = 0;$$
$$1 \neq 2 \wedge 1 \neq 3 \wedge [1,2] \neq [1,3] \Rightarrow |[1,2] \cap [1,3]| = = |\{1,2,3\}| = 3^{1)};$$

находим, что частичный группоид заданный таблицей 3_1 удовлетворяет условию G1[2].

A	1	2	3
1	1	3	2
2	3	2	
3	2	1	3

Табл. 3_2

A	1	2	3
1	1	2	
2	1	2	
3			3

Табл. 4

1) $\vartheta(\perp \Rightarrow p) = T$.
2) частичный группоид заданый таблицей 3_2 также удовлетворяет условиям G0, G1, G3 и не удовлетворяет условию G2.

д) Непосредственно находим, что частичный группоид заданный таблицей 4 удовлетворяет условию G0 и не удовлетворяет условию G3. Далее, находим, что имеет место:

$$[1,2] = \{1,2\} \text{ и } [1,3] = [2,3] = \emptyset.$$

Притом, $(\{1,2\},A)$ является группоидом. Таким образом, частичный группоид заданный таблицей 4 удовлетворяет условию G2. Наконец, ввиду импликаций

$$1 \neq 2 \wedge 1 \neq 3 \wedge [1,2] \neq [1,3] \rightarrow |[1,2] \cap [1,3]| = |\emptyset| = 0;$$
$$1 \neq 2 \wedge 2 \neq 3 \wedge [1,2] \neq [2,3] \rightarrow |[1,2] \cap [2,3]| = |\emptyset| = 0;$$
$$1 \neq 3 \wedge 2 \neq 3 \wedge [1,3] \neq [2,3] \rightarrow |[1,3] \cap [2,3]| = |\emptyset| = 0^{1)};$$

находим что частичный группоид заданный таблицей 4 удовлетворяет условию G1.

Утверждение 1 доказано.

На табл. 5_1 - 5_4 заданы частичные A_t-группоиди не являющиеся A_t-группоидами.

A	1	2	3
1	1	2	
2	1	2	3
3		2	3

Табл. 5_1

A	1	2	3	4
1	1	2		
2	1	2		
3			3	4
4			3	4

Табл. 5_2

A	1	2	3	4	5
1	1	3	2		
2	3	2	1		
3	2	1	3	5	4
4			5	4	3
5			4	3	5

Табл. 5_3

A	1	2	3	4	5
1	1	3	2		
2	1	2	1		
3	1	1	3		
4				4	5
5				4	5

Табл. 5_4

1) $\vartheta(\perp \rightarrow p) = T$.

Утверждение 2. Пусть $(\mathfrak{C},A)$, $|\mathfrak{C}| = t \in N \setminus \{1\}$, частичный группоид. Тогда, если в $(\mathfrak{C},A)$ имеет место G1, то в $(\mathfrak{C},A)$ справедливо

<u>G1'</u> $a \neq b \wedge [a,b] \neq \emptyset \Rightarrow (\forall c \in \mathfrak{C})(\forall d \in \mathfrak{C})(c \in [a,b] \wedge$
$\wedge\ d \in [a,b] \wedge c \neq d \wedge [c,d] \neq \emptyset \Rightarrow [c,d] =$
$= [a,b])$ для каждых $a,b \in \mathfrak{C}$.

Доказательство. Если $[a,b] = \emptyset$ или если $[a,b] \neq \emptyset$ и $[c,d] = \emptyset$, то высказывание под G1' истинное[1]; $a \neq b$, $c \neq d$.

Пусть $a,b,c,d \in \mathfrak{C}$ любые элементы, удовлетворяющие условиями:

$$a \neq b \text{ и } [a,b] \neq \emptyset;$$
$$c \neq d \text{ и } [c,d] \neq \emptyset;$$
$$c,d \in [a,b].$$

Отсюда получаем,.что имеет место:

(1) $$|[a,b] \cap [c,d]| \geqslant 2.$$

Далее, учитывая G1, ввиду предположения $a \neq b \wedge c \neq d$ и тавтологии $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$, находим, что имеет место:

(2) $$|[c,d] \cap [a,b]| > 1 \Rightarrow [c,d] = [a,b].$$

Наконец, ввиду (1) и (2), находим, что утверждение доказано.

Утверждение 3. Существует частичный группоид $(\mathfrak{C},A)$, $|\mathfrak{C}| = t \setminus N \in \{1\}$, удовлетворяющий условию G1' и не удовлетворяющий условию G1.

Доказательство. В частичном группоиде заданным таблицей 6 имеет место:

$$[1,2] = [1,3] = \{1,2,3\};$$
$$[2,4] = [3,4] = \{2,3,4\};$$

---

[1] $\vartheta(\perp \Rightarrow p) = T$.

$$[2,3] = [1,4] = \emptyset\,, \quad \text{и}$$
$$|\{1,2,3\} \cap \{2,3,4\}| = 2.$$

A	1	2	3	4
1	1	3	2	
2	3	2		3
3	2		3	2
4		3	2	4

Табл. 6

Отсюда находим, что частичный группоид заданный таблицей 6 удовлетворяет условию G1′ и не удовлетворяет условию G1.

Утверждение 4. Пусть $(\mathfrak{T},A), |\mathfrak{T}| = t \in N \setminus \{1\}$, частичный группоид. Тогда, если в $(\mathfrak{T},A)$ имеют место G1′ и G2, то в $(\mathfrak{T},A)$ имеет место G1.

Доказательство. Если $[a,b] = [c,d] = \emptyset$ или если $[a,b] = \emptyset$ и $[c,d] \neq \emptyset$ ($[a,b]\neq\emptyset$ и $[c,d] = \emptyset$), то высказывание под G1 справедливо. Таким же образом, высказывание под G1 справедливо если справедливо следующее высказывание: $a \neq b \wedge c \neq d \wedge [a,b] \neq \emptyset \neq [c,d] \neq \emptyset \wedge [a,b] = [c,d]$.

Пусть, далее, $a,b,c,d \in \mathfrak{T}$ любые элементы, удовлетворяющие условию:

(a) $$a \neq b \wedge c \neq d \wedge [a,b] \neq \emptyset \wedge [c,d] \neq \emptyset \wedge [a,b] \neq [c,d].$$

Предположим, что имеет место:

(б) $$|[a,b] \cap [c,d]| > 1.$$

Из (б) получаем, что существуют $p,q \in \mathfrak{T}$ такие что имеет место:

(ц) $$p \neq q \wedge p,q \in [a,b] \wedge p,q \in [c,d].$$

Из (ц), ввиду G2, сначала, находим, что $(p,q) \in D$. Отсюда, ввиду (0), находим, что $[p,q]\neq \emptyset$. Далее, учитывая (ц) и G1′, находим, что справедливы равенства

$$[a,b] = [p,q] = [c,d],$$

т.е., что имеет место равенство

$$[a,b] = [c,d].$$

Так как это равенство противоречит условию (a), находим, что утверждение доказано.

Примечание 1. Если $D = \mathfrak{C}^2$, то имеет место: G1 $\Leftrightarrow$ G1′ [5].

Учитывая определение 1, утверждение 2 и утверждение 4, находим, что имеет место следующее утверждение:

Теорема 5. Частичный группоид $(\mathfrak{C},A)$, $|\mathfrak{C}| = t \in N \setminus \{1\}$, является частичным A_t-группоидом тогда и только тогда, когда имеет место G0, G1′, G2 и G3.

Определение 2. Частичным A_t^m-группоидом назовем частичный группоид $(\mathfrak{C},A)$, $|\mathfrak{C}| = t \in N \setminus \{1\}$, тогда и только тогда, когда имеет место G0, G2, G3 и

G$\bar{1}$ $\quad a \neq b \wedge [a,b] \neq \emptyset \wedge c \neq d \wedge [c,d] \neq \emptyset \Rightarrow$
$\Rightarrow |[a,b]| = |[c,d]| \ (= m \in N \setminus \{1\})$
для любых $a,b,c,d \in \mathfrak{C}$.

Утверждение 6. Если $(\mathfrak{C},A)$ частичный A_t^m-группоид, то $(\mathfrak{C},A)$ частичный A_t-группоид.

Доказательство. Ввиду теоремы 5, мы будем доказать, что в $(\mathfrak{C},A)$ имеет место G1′.

Если $[a,b] = \emptyset$ или если $[a,b] \neq \emptyset$ и $[c,d] = \emptyset$, то высказывание под G1′ справедливо; $a \neq b$, $c \neq d$.

Пусть, далее, $a,b,c,d \in \mathfrak{C}$ любые элементы удовлетворяющие условию:

$$a \neq b \wedge [a,b] \neq \emptyset \wedge c \neq d \wedge [c,d] \neq \emptyset \wedge \ c,d \in [a,b].$$

Так как имеет место $c,d \in [a,b]$, находим, что справедливо:

$$[c,d] \subseteq [a,b].$$

Отсюда, ввиду $G\bar{1}$, получаем, что имеет место:

$$[c,d] = [a,b].$$

Утверждение доказано.

На табл. 5_1 - 5_3 заданны частичные A_t^m-группоиди. На табл. 5_4 заданный частичный A_t-группоид не являющийся частичным A_t^m-группоидом.

Учитывая теорему 5 и определение 2, находим, что имеет место:

Утверждение 7. Пусть $(\mathfrak{C},A)$, $|\mathfrak{C}| = t \in N \setminus \{1\}$, частичный A_t-группоид. Тогда, если $|[a,b]| = m \in N \setminus \{1\}$, то $([a,b],A)$ A_m^m-группоид[1].

Теорема 8. Пусть $(\mathfrak{C},A)$, $|\mathfrak{C}| = t \in N \setminus \{1\}$, частичный A_t-группоид не являющийся A_t-группоидом. Тогда существует A_t--группоид $(\mathfrak{C},\bar{A})$ такой, что $\bar{A}(x,y) = A(x,y)$ для каждого $(x,y) \in$ $\in D$[2].

Доказательство. Пусть $a \neq b$ и $(a,b) \notin D$; $(a,b) \in \mathfrak{C}^2$. Тогда, ввиду G2, имеет место и: $(b,a) \notin D$; табл. 7_1. Пусть, далее,

$$\bar{A}(x,y) \overset{\text{деф}}{=} \begin{cases} A(x,y), & (x,y) \in D \\ b, & (x,y) = (a,b); \\ a, & (x,y) = (b,a) \end{cases} \qquad \text{Табл. } 7_2.$$

Тогда имеет место: $[a,b]_{\bar{A}} = \{a,b\}$ и $(\{a,b\},\bar{A})$ является A_2^2-группоидом; табл. 7_3.

---

[1] A_t^m-группоиды введены в [5].

[2] Всякий частичный A_t-группоид $(\mathfrak{C},A)$ вкладывается в A_t-группоид $(\mathfrak{C},\bar{A})$.

A		a		b	
a		a		■	
b		■		b	

Табл. 7_1

Ā		a		b	
a		a		b	
b		a		b	

Табл. 7_2

Ā	a	b
a	a	b
b	a	b

Табл. 7_3

Непосредственно находим, что в частичном группоиде $(\mathfrak{T},\bar{A})$ имеет место G0, G2 и G3. Далее, предположим, что существуют $p,q \in \mathfrak{T}$ удовлетворяющие условию: $[p,q]_A \neq \emptyset$ и $a,b \in [p,q]_A$. Так как это условие противоречит предположению $a \neq b$ и $(a,b) \notin D$, находим, что в частичном группоиде $(\mathfrak{T},\bar{A})$ имеет место и условие G1. Таким образом, ввиду условия $|\mathfrak{T}| \in N \setminus \{1\}$, теорема доказана.

Примечание 2. Частичной A_t-квазигруппой (A_t^m-квазигруппой) назовем частичный A_t-группоид (A_t^m-группоид) $(\mathfrak{T},A)$ тогда и только тогда, когда $(\mathfrak{T},A)$ является частичной квазигруппой. Частичный A_t-группоид заданный таблицей 5_3 является частичной A_t-квазигруппой. На множестве из двух элементов не существует A_m^m-квазигруппа. Таким образом, A_t-группоиды построены методом из доказательства теоремы 8 не являются A_t-квазигруппамы. Иначе, имеет место: для любого $m \in N \setminus \{1,2\}$ существует A_m^m-квазигруппа $(\mathfrak{T},A)$, $|\mathfrak{T}| = m$ [3]. Притом, отметим: для частичной A_5^3-квазигруппы $(\mathfrak{T},A)$ заданной таблицей 5_3 не существует A_5-квазигруппа $(\mathfrak{T},\bar{A})$ удовлетворяющая условию: $\bar{A}(x,y) = A(x,y)$ для всех $(x,y) \in D$; $A : D \to \mathfrak{T}$, $D \subseteq \mathfrak{T}^2$.

☆ ☆

Пусть $\mathfrak{T}$ непустое множество и пусть непустое множество $\mathfrak{L}$ множество некоторых непустых подмножеств множества $\mathfrak{T}$. Множество $\mathfrak{L}$ называется разбиением Хармантиса типа 2 множества $\mathfrak{T}$[1] тогда и

[1] короче: 2Н-разбиением множества $\mathfrak{T}$.

и только тогда, когда выполняются следующие условия:

H1 $(\forall a \in \mathfrak{T})(\forall b \in \mathfrak{T})(a \neq b \Rightarrow (\exists! \ell \in \mathfrak{L})(a \in \ell \wedge b \in \ell))$, и
H2 $(\forall \ell \in \mathfrak{L})|\ell| \geqslant 2$ [6][1) .

Объект $(\mathfrak{T},\mathfrak{L})$ называется 2H-геометрия [5]. Притом, элементы множества $\mathfrak{T}$ называются точками, а элементы множества $\mathfrak{L}$ линиями[2) .

Пусть $(\mathfrak{T},\mathfrak{L})$ 2H-геометрия. Тогда имеет место:

H1´ $(\forall \ell \in \mathfrak{L})(\forall \ell' \in \mathfrak{L})(\ell \neq \ell' \Rightarrow |\ell \cap \ell'| \leqslant 1)$, и
H1´´ $(\forall a \in \mathfrak{T})(\exists \ell \in \mathfrak{L}) a \in \ell$.

Притом, существуют объекты $(\mathfrak{T},\mathfrak{L})$ удовлетворяющие условиям H1´, H1´´, H2 и не удовлетворяющие условию H1[3). Объект $(\mathfrak{T},\mathfrak{L})$ позволим себе назват P2H-геометрия тогда и только тогда, когда выполняются условия H1´, H1´´ и H2.

Примечание 3. Носители $(\mathfrak{T},\mathfrak{L})$ к-полусетей[4) $(\mathfrak{T},\{L_i^k\})$, $\mathfrak{L} = \bigcup_{i=1}^{k} L_i$, являются L-геометриями. L-геометрии являются обобщением P2H-геометрии. Именно, объект $(\mathfrak{T},\mathfrak{L})$ является L-геометрией тогда и только тогда, когда справедливо H1´ и H1´´ [4]. Таким образом, L-геометрия $(\mathfrak{T},\mathfrak{L})$ тогда и только тогда будет P2H-геометрией, если в $(\mathfrak{T},\mathfrak{L})$ имеет место H2. На рис. 1 изображен носитель $(\mathfrak{T},\mathfrak{L})$ 3-полусети $(\mathfrak{T},\{L_i^3\})$, $\mathfrak{L} = L_1 \cup L_2 \cup L_3$, удовлетворяющий условиям H1´ - H1´´ и неудовлетворяющий условию H2, $\mathfrak{T} = \{1,2,3\}$,

---

1) Каждому nH-разбиению, $n \in N$, множества $\mathfrak{T}$ соответствует $(n+1)$-арное отношение эквивалентности на множестве $\mathfrak{T}$, и обратно [7].

2) Регулярные плоскости [1 - 3] являются 2H-геометриями удовлетворяющими условию: $(\forall \ell \in \mathfrak{L})(\forall \ell' \in \mathfrak{L})|\ell| = |\ell'|$.

3) Например, носители $(\mathfrak{T},\mathfrak{L})$ 3-сетей [8 - 9] $(\mathfrak{T},\{L_i^3\})$, $\mathfrak{L} = L_1 \cup L_2 \cup L_3$, при $|\mathfrak{T}| \geqslant 3$.

4) к-Полусети, описанные автором в [10], являются одним обобщением к-сетей [8 - 10]. Кстати, к-полусети весьма тесно связаны с ортогональными системамы частичных квазигрупп [10], с специальными кодами [12 - 15, 19, 20], с r-дизайнами [21], с аффиными пространствами Спернера [16 - 17] и со одним классом (в общем случае частичных) <m,n>-квазигрупп [18].

$$L_1 = \{\{1\},\{2,3\}\},\quad L_2 = \{\{1,2\},\{3\}\},\quad L_3 = \{\{1,3\},\{2\}\}.$$

Притом, в $(\mathfrak{C},\{L_i\}_1^3)$ имеет место H1. L-геометрии удовлетворяющие условию H1 автор позволил себе назват TCL-геометрии [4]. Носители LN-к-полусетей также являются L-геометриями [11].

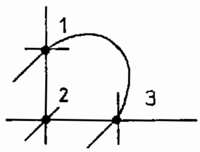

Рис. 1

Теорема 9. Если $(\mathfrak{C},A)$, $|\mathfrak{C}| = t \in N \setminus \{1\}$, частичный A_t-группоид, то $(\mathfrak{C},\mathfrak{L})$, где

$$(\ell)\qquad \mathfrak{L} \overset{\text{деф}}{=} \{[a,b]\,|\,a,b \in \mathfrak{C} \wedge a \neq b \wedge [a,b] \neq \emptyset\},$$

P2H-геометрия.

Доказательство. Ввиду определения 1, имеет место: $|\mathfrak{C}| \geqslant 2$. Ввиду G3 и G2, имеет место: $\mathfrak{L} \neq \emptyset$. Ввиду определения (ℓ), множества $[a,b]$, $a \neq b$, принадлежащие множеству $\mathfrak{L}$ являются непустыми множествами. Ввиду G1, в $(\mathfrak{C},\mathfrak{L})$ имеет место H1′. Ввиду G3 и G2, в $(\mathfrak{C},\mathfrak{L})$ имеет место H1′′. Наконец, так как непустые множества $[a,b]$, $a \neq b$, удовлетворяют условию $|[a,b]| \geqslant 2$, находим, что в $(\mathfrak{C},\mathfrak{L})$ имеет место и H2.[1]

Лемма 10. **(Ю. Шифтар,[3])** Для любого $m \in N \setminus \{1,2\}$, существует A_t-квазигруппа[2].

Отсюда, учитывая факт, что существуют A_2^2-группоиды (табл. 7_3), находим, что имеет место:

---

[1] Ввиду G2 и G1′, для каждой линии $\ell \in \mathfrak{L}$ имеет место: каждые две различные точки принадлежащие линии ℓ однозначно определяют линию ℓ. Притом, отметим: в частичном группоиде заданным таблицей 1_1, удовлетворяющем условиям G1 – G3 и не удовлетворяющем условию G0, имеет место: $[1] = [2] = [3] = [1,2] = [1,3] = [2,3] = \{1,2,3\}$.

[2] Утверждение доказано построением одного класса A_m^m-квазигрупп.

Лемма 10′. Для каждого $m \in N \setminus \{1\}$, существует A_m^m-группоид.

Теорема 11. Каждой конечной Р2Н-геометрии $(\mathfrak{T},\mathfrak{L})$ соответствует частичный A_t-группоид.

Доказательство. Пусть $(\mathfrak{T},\mathfrak{L})$ конечная Р2Н-геометрия. Тогда, ввиду Н2, имеет место: $|\mathfrak{T}| = t \in N \setminus \{1\}$.

Учитывая лемму 10′ и Н2, находим, что имеет место:

1° На каждой линии $\ell_i \in \mathfrak{L}$, $i \in I$, можно определить бинарную операцию $A^{(i)}$, $i \in I$, такую, что $(\ell_i, A^{(i)})$ становится A_m^m-группоидом; $m = |\ell_i|$.

Учитывая 1° и Н1′, находим, что имеет место:

2° Для любых различных $a,b \in \mathfrak{T}$ для которых существует линия $\ell_i \in \mathfrak{L}$ такая, что $a,b \in \ell_i$, существует одна и только одна (из в 1° выбранных) $A^{(i)}$, $i \in I$, такая, что $A^{(i)}(a,b) \in \ell_i \subseteq \mathfrak{T}$.

Учитывая 1° и факт, что A_m^m-группоиды являются идемпотентными группоидами (утверждение 6, утверждение 7, определение 1), находим, что имеет место:

3° Если $a \in \ell_i$ и $a \in \ell_j$, то $A^{(i)}(a,a) = A^{(j)}(a,a) = a$ для любых $i,j \in I$.

Учитывая 2° и 3°, находим, что имеет место:

4° $(\mathfrak{T},A)$, где $A \overset{\text{деф}}{=} \bigcup_{i \in I} A^{(i)}$, является частичным группоидом[1].

Учитывая Н1′′ и 3°, находим, что имеет место:

5° В $(\mathfrak{T},A)$ справедливо G0.

Учитывая 1°, 4° и Н1′, находим, что имеет место:

6° В $(\mathfrak{T},A)$ справедливо G1.

Далее, учитывая 1°, находим, что имеет место:

7° В $(\mathfrak{T},A)$ справедливо G2.

Наконец, учитывая Н2, находим, что имеет место:

8° В $(\mathfrak{T},A)$ справедливо G3.

Теорема доказана.

---

[1] Если в $(\mathfrak{T},\mathfrak{L})$ имеет место Н1, то $(\mathfrak{T},A)$ является группоидом.

Примечание 4. В доказательстве теоремы 11 (под 1°) на множествах $\ell_i \in \mathcal{L}$ выбрани операции $A^{(i)}$ такие, что $(\ell_i, A^{(i)})$ являются A_m^m-группоидами; $m = |\ell_i|$. Если имеет место $|\ell_i| \geqslant 3$ для каждой $\ell_i \in \mathcal{L}$, то, ввиду леммы 10, на каждом из множеств $\ell_i \in \mathcal{L}$ можно выбрать операцию $A^{(i)}$ такую, что $(\ell_i, A^{(i)})$ станет A_m^m-квазигруппой; $m = |\ell_i|$. В этом случае, частичный A_t-группоид, построенный в доказательстве теоремы 11, является частичной A_t-квазигруппой. Именно: конечный частичный группоид $(\mathfrak{T}, A)$ является частичной квазигруппой тогда и только тогда, когда в соответствующей таблице элементы из $\mathfrak{T}$ в столбцах и в строках не повторяются. Отсюда, учитывая предположение, что $(\ell_i, A^{(i)}), i \in I$, являются A_m^m-квазигруппами, ввиду H1′, находим что частичный A_t-группоид, построенный в доказательстве теоремы 11, является частичной A_t-квазигруппой.

☆ ☆ ☆

На табл. 8_1 и 8_2 заданы различные A_2^2-группоиды, а на табл. 8_3 и 8_4 различные A_3^3-группоиды. Притом, A_2^2-группоидам соответствует 2H-геометрия изображена на рис. 2_1, а A_3^3-группоидам 2H-геометрия изображена на рис. 2_2.

E	1	2
1	1	2
2	1	2

Табл. 8_1

F	1	2
1	1	1
2	2	2

Табл. 8_2

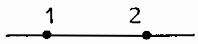

Рис. 2_1

A	1	2	3
1	1	3	2
2	3	2	1
3	2	1	3

Табл. 8_3[1]

B	1	2	3
1	1	3	2
2	1	2	1
3	1	1	3

Табл. 8_4

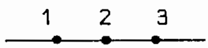

Рис. 2_2

---

[1] A_3^3-квазигруппа.

Частичные группоиды $(\mathfrak{T},A)$ и $(\mathfrak{T},B)$ назовем *генероморфными* тогда и только тогда, когда имеет место:

$$\text{(г)} \qquad [a,b]_A = [a,b]_B$$

для каждых $a,b \in \mathfrak{T}$.[1]

На табл. 1_1 и 5_3 заданы частичные группоиды имеющие один и тот же носитель $\mathfrak{T} = \{1,2,3\}$. Они не являются генероморфными. В самом деле, например, имеет место:

а) $[1,1] = [1] = \{1,2,3\}$, табл. 1_1; и
б) $[1,1] = [1] = \{1\}$, табл. 5_3.

Непосредственно находим что имеет место:

Утверждение 12. Генероморфность является РСТ отношением на множестве $\mathfrak{G}(\mathfrak{T})$ всех частичных группоидов определенных на множестве $\mathfrak{T}$.

Теорема 13. Если частичный группоид $(\mathfrak{T},A)$ находится в отношении генероморфности к частичному A_t-группоиду $(\mathfrak{T},B)$ то $(\mathfrak{T},A)$ является частичным A_t-группоидом.

Доказательство.

а) Ввиду равенств $[a,a]_A = [a,a]_B = \{a\}$ для каждого $a \in \mathfrak{T}$, в $(\mathfrak{T},A)$ имеет место G0.

б) В $(\mathfrak{T},B)$ имеет место G1, т.е. в $(\mathfrak{T},B)$ имеет место следующее высказывание:

$$(\forall a \in \mathfrak{T})(\forall b \in \mathfrak{T})(\forall c \in \mathfrak{T})(\forall d \in \mathfrak{T})(a \neq b \wedge c \neq d \wedge \wedge [a,b]_B \neq [c,d]_B \Rightarrow |[a,b]_B \cap [c,d]_B| \leqslant 1).$$

Отсюда, учитывая предположение, что имеет место высказывание

---

[1] $[a,b] = \emptyset \Leftrightarrow (a,b) \notin D \wedge (b,a) \notin D$; (0).

$$(\forall x \in \mathfrak{T})(\forall y \in \mathfrak{T})[x,y]_A = [x,y]_B,$$

находим, что в $(\mathfrak{T},A)$ имеет место

$$(\forall a \in \mathfrak{T})(\forall b \in \mathfrak{T})(\forall c \in \mathfrak{T})(\forall d \in \mathfrak{T})(a \neq b \wedge c \neq d \wedge \wedge [a,b]_A \neq [c,d]_A \rightarrow |[a,b]_A \cap [a,b]_A| \leq 1),$$

т.е., что в $(\mathfrak{T},A)$ имеет место G1.

ц) Ввиду генероморфности, A и B определены на одном и том же множесте $0 \subseteq \mathfrak{T}$. Отсюда, учитывая факт, что $(\mathfrak{T},B)$ является частичным A_t-группоидом, находим, что в $(\mathfrak{T},A)$ имеют место G2 и G3.

Теорема доказана.

Учитывая теорему 9 и определение генероморфности, непосредственно находим, что имеет место следующее утверждение:

Утверждение 14. Если частичные A_t-группоиды $(\mathfrak{T},A)$ и $(\mathfrak{T},B)$ являются генероморфными, то им соответствует[1] одна и та же P2H-геометрия, т.е. тогда справедливо $(\mathfrak{T},\mathfrak{L}_A) = (\mathfrak{T},\mathfrak{L}_B)$, где $\mathfrak{L}_A \overset{\text{деф}}{=} \{[a,b]_A | a,b \in \mathfrak{T} \wedge a \neq b \wedge [a,b]_A \neq \emptyset\}$, $\mathfrak{L}_B \overset{\text{деф}}{=} \{[a,b] | a,b \in \in \mathfrak{T} \wedge a \neq b \wedge [a,b]_B \neq \emptyset\}$.

Учитывая доказательство теоремы 11 и определение генероморфности, находим, что имеет место:

Утверждение 15. Пусть $(\mathfrak{T},\mathfrak{L})$ конечная P2H-геометрия. Пусть, далее, $(\mathfrak{T},A)$ и $(\mathfrak{T},B)$ соответствующие[2] частичные A_t-группоиды. Тогда $(\mathfrak{T},A)$ и $(\mathfrak{T},B)$ являются генероморфными.

Учитывая теорему 11, примечание 4 (лемму 10) и утверждение 15, находим, что имеет место:

Теорема 16. Пусть $(\mathfrak{T},A)$ частичный A_t-группоид удовлетворяющий условию:

---

[1] по теореме 9.

[2] по теореме 11.

$$(\forall a \in \mathfrak{C})(\forall b \in \mathfrak{C})(a \neq b \wedge [a,b] \neq \emptyset \Rightarrow |[a,b]| \geq 3).$$

Тогда существует частичная A_t-квазигруппа $(\mathfrak{C},B)$ такая, что $(\mathfrak{C},A)$ и $(\mathfrak{C},B)$ являются генероморфными.

ЛИТЕРАТУРА

[1] **Szamicolowicz L.**, On the problem of existence of finite regular planes, Colloq. Math., 9(1962), 245 - - 250.

[2] **Пухарев Н.К.**, Об A_n^k-алгебрах и регулярных конечных плоскотях, Сибирский мат. ж., том. VI, №. 4(1965), 892 - 899.

[3] Šiftar J., On the existence of A_n^k-quasigroups, Glasnik mat., Vol. 18(38), 1983, 217 - 219.

[4] **Ушан Я.**, A_t-квазигруппы, Review of Research, Faculty of Science - University of Novi Sad, Vol. 15-2, 1985, 141 - 154.

[5] **Ušan J.**, A_t-groupoids, Proceedings of the Conference "Algebra and Logic", Cetinje 1986, Novi Sad 1987.

[6] **Hartmanis J.**, Generalized Partitions and Lattice Embedding Theorems, Proc. of Symphosium in Pure Math., Vol. II, Lattice Theory, Amer. Math. Soc. (1961), 22 - 30.

[7] **Pickett A.E.**, A note Generalized Equivalence Relations, Amer. Math. Manthly, 1966, 73, № 8, 860 - 861.

[8] **Белоусов В.Д.**, Алгебраические сети и квазигруппы, Кишинев, "Штиинца", 1971.

[9] **Dénes J. and Keedwell A.D.**, Latin Squares and their Applications, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1974.

[10] **Ušan J.**, k-Seminets, Mat. Bilten, Skopje, 1 (XXVII), 1977, 41 - 46.

[11] **Ушан Я.**, LN- и RN-k-полусети, Review of Research, Faculty of Science - University of Novi Sad, Vol. 16-1, 1986,

[12] **Ušan J., Stojaković Z.**, Orthogonal Systems of Partial Operations, Zb. Rad. Prirod.-Mat. Fak. u Novom Sadu, Ser. Mat., 8, 1978, 47 - 51.

[13] **Ушан Я., Стоякович З.,** D-польные ортогональные системы частичных квазигрупп, Zbor. Rad. Prirod.-Mat. Fak. u Novom Sadu, Ser. Mat., 9, 1979, 175 - 184.

[14] **Ушан Я., Тошич Р., Сурла Д.,** Один способ построения ортогональных систем латинских прямоугольников, кодов и к-семисетей, Zb. Rad. Prirod.-Mat. Fak. u Novom Sadu, Ser. Mat., 9, 1979, 191 - 197.

[15] **Ušan J., Stojaković Z.,** Partial Quasigroups, Proc. of Algebraic Conference, Skopje, 1980, 73 - 85.

[16] **Ушан Я.,** О одном классе конечных к-полусетей, Review of Research Faculty of Science, University of Novi Sad, Vol. 12 (1982), 387 - 398.

[17] **Ušan J.,** A construction of special k-seminets, Review of Research Faculty of Science, University of Novi Sad, Vol. 14, 1(1984), 109 - 115.

[18] **Čupona Ǵ., Ušan J., Stojaković Z.,** Multiquasigroups and some related structures, Macedonian Academy of sciences and arts, Contributions, Section of Mathematical and Technical sciences, 12, 1980, 5 - 12.

[19] **Dénes J., Gergely E.,** Groupoids and codes, Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai, 16, Topics in Information Theory, Keszthely (Hungary), 1975, 155 - 162.

[20] **Tošić R.,** On a class of D-complete OSPK and complete error-correcting codes, Review of Research Faculty of Science - University of Novi Sad, Ser. Math., Vol. 9, 1979, 123 - 126.

[21] **Bonisoli A., Deza M.,** Orthogonal Permutation Arrays and Related Structures, Acta Universitatis Carolinae - Mathematica et Physica, Vol. 24, No. 2, (1983), 23 - 38.

REZIME

PARCIJALNI A_t-GRUPOIDI

U radu se uvode i razmatraju parcijalni A_t-grupoidi. Predstavljaju jedno uopštenje A_t-grupoida [5]. Pokazano je da se svaki pravi parcijalni A_t-grupoid $(\mathfrak{T},A)$ može dodefinisati do A_t-grupoida $(\mathfrak{T},\bar{A})$. U radu je, izmedju ostalog, pokazano da svakom

parcijalnom A_t-grupoidu odgovara odredjena konačna P2H-geometrija, te da svakoj konačnoj P2H-geometriji odgovara klasa u parovima generomorfnih parcijalnih A_t-grupoida. Pri tom, svaki parcijalni A_t-grupoid u kome za neprazne $[a,b]$ važi $|[a,b]| \geqslant 3$, $a \neq b$, jeste generomorfan nekoj parcijalnoj A_t-kvazigrupi.

Received by the editors March 31,1987.