Зборник радова Природно-математичког факултета — Универзитет у Новом Саду, 2 (1972)
Review of Reseach of Science — University of Novi Sad, 2 (1972)

Милева Прurвановић

О НЕКИМ ПОЛУЧЕБИШЕВСКИМ КОМПОЗИЦИЈАМА

1. *Композиција диференцијабилних простора.* — Уопштавајући појам мреже дводимензионалног простора, А. П. Норден [1] је дошао до појма композиције вишедимензионалног простора. Идеја се састоји у овом. Посматрамо r диференцијабилних базисних многострукости X_{n_a} при чему n_a означава димензију мнострукости, а a њен индекс. Изаберимо у свакој од тих многострукости одређену тачку M_a; на тај начин добијамо скуп $\{M_1, M_2, \ldots, M_r\}$ r тачака. Композиција многострукости X_{n_a} је онај простор $X_n = X_{n_1} \times X_{n_2} \times \ldots \times X_{n_r}$ чији се елементи налазе у узајамно једнозначној коресподенцији са свим могућим скуповима $\{M_1, M_2, \ldots, M_r\}$. Очевидно је да је димензија простора X_n једнака збиру димензија базисних простора, тј. $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_r$. Узимамо да је диференцијална структура простора X_n одређена диферецијалним структурама базисних простора.

Ако у скупу $\{M_1, M_2, \ldots, M_r\}$ фиксирамо све тачке $M_1 M_2, \ldots M_r$ сем тачке M_a, одговарајућа тачка M простора X_n описује n_a-димензионални потпростор који је у узајамно једнозначној кореспонденцији са базисним простором X_{n_a}. Тај подпростор је позиција базисног X_{n_a}. Две разне позиције исте базисне многострукости су аналогне, а позиције две разне базисне многострукости су трансверзалне. Две аналогне позиције немају заједничких тачака, а две трансверзалне позиције имају једну и само једну заједничку тачку. Кроз сваку тачку простора X_n композиције пролази r узајамно трансверзалних позиција свих базисних многострукости. Скуп свих аналогних позиција је свежањ позиција.

Нека је на свакој базисној многострукости задан криволинијски координатни систем. Тиме је и у простору X_n композиције задан систем криволинијских координата. Он је специјалан, наиме адаптиран је композицији простора X_n. Зато ћемо такав координатни систем простора X_n звати адаптирани координатни систем. На позицији базисног X_{n_a}, тачка је одређена са n_a адаптираних координата X^{α} које се мењају кад се тачка креће по позицији и $n - n_a$ адаптираних координата $x^{\bar{\alpha}}$ које одређују положај те позиције у x_n. Координате x^{α} зваћемо унутрашње, а координате $x^{\bar{\alpha}}$ — спољашње координате с обзиром на уочену позицију.

У овом раду, у првом делу § 2, наведени су услови који карактеришу получебишевску, Чебишевску и Декартову композицију а које су дали А. П. Норден [1] и Е. К. Леонтьев [2]. У другом делу истог параграфа дефинисан је torse-forming свежањ позиција и изведени услови који морају бити задовољени да би свежањ позиција био torse-forming. . У §

3 је показано да је получебишевска композиција Римановог простора, под одређеним условима, полудекомпоновани Риманов простор. У § 4 испитани су услови под којима је получебишевска композиција Римановог простора Риманова екстензија простора афине конексије или Риманова екстензија метричког простора.

2. *Чебишевски, Декартов и torse-forming свежањ позиција.*

Посматрајмо композицију $X_q \times X_{n-q}$ и нека се тангентне равни позиција базисног X_q померају паралелно дуж произвољне линије C позиције базисног X_{n-q}. Тада се свежањ позиција базисног X_q зове чебишевски свежањ, док је композиција $X_q \times X_{n-q}$ получебишевска у односу на базисни X_q [2].

Да би свежањ позиција базисног X_q био чебишевски, потребно је и довољно да у адаптираном координатном систему компоненте афине конексије задовољавају услов

$$\Gamma_{\beta\bar{\gamma}}^{\bar{\alpha}} = 0, \tag{2.1}$$

при чему су x^{α} $(\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots\ q)$ унутрашње, а $x^{\bar{\alpha}}$, $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma} = q+1, q+2, \ldots n)$ спољашње координате.

Композиција је чебишевска ако је она получебишевска у односу на сваку базисну многострукост. Таква композиција је окарактерисана условима

$$\Gamma_{\beta\bar{\gamma}}^{\bar{\alpha}} = 0, \quad \Gamma_{\bar{\beta}\gamma}^{\alpha} = 0. \tag{2.2}$$

Свежањ позиција базисног X_q је Декартов ако се тангентне равни површи свежња померају паралелно дуж произвољне линије C простора X_n. Потребан и довољан услов да простор X_n допушта Декартов свежањ X_q јесте:

$$\Gamma_{\beta i}^{\bar{\alpha}} = 0, \tag{2.3}$$

при чему су, као и раније, x^{α} унутрашње а $x^{\bar{\alpha}}$ спољашње координате, док индекси $i, j, k, \ldots$ узимају вредности од 1 до n. Ако је и свежањ позиција X_{n-q} Декартов, композиција $X_q \times X_{n-q}$ је Декартова, а у адаптираном координатном систему компоненте конексије задовољавају услов

$$\Gamma_{\bar{\beta} i}^{\alpha} = 0, \qquad \Gamma_{\beta i}^{\bar{\alpha}} = 0. \tag{2.4}$$

Сад ћемо дефинисати torse-forming свежањ позивија. Посматрајмо, прво, поље q линеарно независних вектора $v_{a|}{}^{i}$ (индекс a испред црте, који узима вредности $1, 2, \ldots, q$, означава разне векторе у скупу q линеарно независних, тј. он нема тензорски карактер) који задовољавају услов

$$\delta v_{a|}{}^{i} = \frac{1}{2} T_a \, dx^i + B_a^b \, v_{b|}{}^{i}, \tag{2.5}$$

где је са δ означено апсолутно диференцирање дуж криве C, а T_a и B_a^b су неке функције координата x^i. За поље q-димензиалних равни које образују вектори $v_{a|}{}^{i}$ кажемо да је torse-forming дуж криве C. (У случају $q=1$ поље вектора v^i које задовољава услов (2.5) је torse-forming дуж криве C [3]. Због тога је и за посматрано поље q-димензионалних равни уведен термин torse-forming). Кад су све функције T_a једнаке нули, услов (2.5) се своди на

$$\delta \, v_{a|}{}^{i} = B_a^b \, v_{b|}{}^{i},$$

тј. q-димензионално поље равни образује поље паралелних равни дуж криве C.

За свежањ позиција базисног X_{n-q} кажемо да је torse-forming ако су задовољени ови услови:

1) тангентне равни позиција базисног X_{n-q} су torse-forming дуж сваке линије позиције базисног X_q;

2) позиције базисног X_{n-q} су тотално геодезијски потпростори простора X_n.

Доказаћемо ову теорему:

Ако композиција $X_q \times X_{n-q}$ допушта torse-forming свежањ позиција базисног X_{n-q}, постоји адаптирани координатни систем у односу на који је

$$(a) \quad \Gamma_{\bar{\beta}\bar{\gamma}}^{\alpha} = 0 \qquad (b) \quad \Gamma_{\beta\bar{\gamma}}^{\alpha} = \frac{1}{2} \delta_{\beta}^{\alpha} T_{\bar{\gamma}}. \tag{2.6}$$

У том координатном систему тангентне равни позиција базисног X_{n-q} одређене су са ових n-q вектора

$$v_{\bar{\alpha}|}{}^{i} = \delta_{\bar{\alpha}}^{i}. \tag{2.7}$$

Приметимо, прво, да је услов (2.5) еквивалентан са ова два услова:

$$
(2.8)\qquad
\begin{aligned}
&(a)\quad dv_{\bar\delta|}{}^{\bar\alpha} + \Gamma^{\bar\alpha}_{jk}\, v_{\bar\delta|}{}^{j}\, dx^k = \frac{1}{2}\, T_{\bar\delta}\, dx^{\bar\alpha} + B^{\bar\eta}_{\bar\delta}\; v_{\bar\eta|}{}^{\bar\alpha}\\
&(b)\qquad dv_{\bar\delta|}{}^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{jk}\, v_{\bar\delta|}{}^{j}\, dx^k = \frac{1}{2}\, T_{\bar\delta}\, dx^{\alpha} + B^{\bar\eta}_{\bar\delta}\, v_{\bar\eta|}{}^{\alpha},
\end{aligned}
$$

где су $v_{\bar\delta|}{}^{i}$ n-q линеарно независних вектора тангентне равни позиције базисног X_{n-q}. Како су те равни torse-forming дуж сваке линије позизиција базисног x_q, то је $v_{\bar\delta|}{}^{\bar\alpha}$ и dx^{α} произвољно, $v_{\bar\delta|}{}^{\alpha}=0$, $dx^{\bar\alpha}=0$, па се релација (2.8b) своди на

$$\Gamma^{\alpha}_{\bar\beta\gamma}\, v_{\bar\delta}{}^{\beta}\, dx^{\gamma} = \frac{1}{2}\, T_{\bar\delta}\, dx^{\alpha},$$

коју можемо написати и у овом облику

$$\left(\Gamma^{\alpha}_{\bar\beta\gamma}\, v_{\bar\delta|}{}^{\beta} - \frac{1}{2}\, T_{\bar\delta}\; \delta^{\alpha}_{\gamma}\right) dx^{\gamma} = 0.$$

Како су dx^{γ} произвољни, ова релација је задовољена онда и само онда кад је

$$\Gamma^{\alpha}_{\bar\beta\gamma}\, v_{\bar\delta|}{}^{\beta} - \frac{1}{2}\, T_{\bar\delta}\delta^{\alpha}_{\gamma} = 0.$$

Тиме је услов (2.6б) испуњен јер се у тангентној равни позиције базисног X_{n-q}, n-q линеарно независних вектора увек могу изабрати тако да је $v_{\bar\delta|}{}^{i} = \delta^{i}_{\bar\varepsilon}$.

3. *Полудекомпоновани Риманов простор.* — Росматрајмо сад Риманов простор V_n који је композиција базисног X_q и X_{n-q} тако да су задовољени ови услови:

I. Свежањ позиција базисног X_q је чебишевски;

IIa. На базисном X_q је задана афина конексија $\Pi^{\alpha}_{\beta\gamma}$ (x^{δ}); конексије аналогних позиција су у пројективној кореспонденцији X или

IIb. На базисном X_q је задана Риманова метрика, а метрике аналогних позиција су у конформној кореспонденцији.

III. Свежањ позиција базисног X_{n-q} је torse-forming.

IV. Трансверзалне позиције су ортогоналне.

Другим речима, посматрани Риманов простор је получебишевска композиција која задовољава још и услове IIa (или IIb), III и IV. Показаћемо да је такав простор полудекомпонован Риманов простор.

Ако је задовољен услов I, у адаптираном координатном систему мора бити задовољен услов (2.1). Услов IIa показује да је, у односу на исти координатни систем,

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \Pi^{\alpha}_{\beta\gamma}(x^{\delta}) + \varphi_{\beta}\,\delta^{\alpha}_{\gamma} + \varphi_{\gamma}\,\delta^{\alpha}_{\beta}, \tag{3.1}$$

где је $\varphi_{\beta} = \varphi_{\beta}(x^{i})$ неко пољ евектора. Ако је, пак, уместо услова IIa задовољен услов IIb, значи да је задано тензорско поље $b_{\alpha\beta}(x^{\gamma})$, а компоненте $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ конексије су, уместо релацијама (3.1), дате овако:

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} b^{\alpha\delta}\left(\frac{\partial b_{\beta\delta}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial b_{\gamma\delta}}{\partial_{x}{}^{\gamma}} - \frac{\partial b_{\beta\gamma}}{\partial_{x}{}^{\delta}}\right) + \varkappa_{\beta}\,\delta^{\alpha}_{\gamma} + \varkappa_{\gamma}\,\partial^{\alpha}_{\beta} - \varkappa_{\delta}\, b^{\delta\alpha}\, b_{\beta\gamma}\,. \tag{3.2}$$

при чему је $\varkappa_{\alpha} = \varkappa_{\alpha}(x^{i})$.

Услов III је еквивалентан са условом (2.6), а услов IV са

$$g_{\alpha\bar{\beta}} = 0. \tag{3.3}$$

Као што је познато, метрички тензор g_{ij} Римановог простора V_n је коваријантно константан:

$$g_{ij,\,k} = 0. \tag{3.4}$$

Ако ставимо: $i=\bar{\alpha}$, $j=\bar{\beta}$, $k=\gamma$ и узмемо у обзир (2.1) и (2.6a), (3.4) се своди на

$$\frac{\partial g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}}{\partial_{x}{}^{\gamma}} = 0, \tag{3.5}$$

тј. компоненте $g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$ метричког тензора су функције само координата $X^{\bar{\alpha}}$.

Ако, пак, у (3.4) ставимо $i=\alpha$, $j=\beta$, $k=\bar{\gamma}$, и узмемо у обзир (2.6*b*) имамо

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} = \frac{1}{2} T_{\bar{\gamma}}\left(\delta^{\delta}_{\alpha} g_{\delta\beta} + \delta^{\delta}_{\beta} g_{\alpha\bar{\delta}}\right) \quad \text{тј.} \quad \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial_{x}{}^{\bar{\gamma}}} = T_{\bar{\gamma}}\, g_{\alpha\beta}.$$

Отуда је

$$\frac{\partial}{\partial x^{\bar{\gamma}}} \log g_{\alpha\beta} = T_{\bar{\gamma}},$$

што значи да је $T_{\bar{\gamma}}$ градијент неке функције T:

$$T_{\bar{\gamma}} = \frac{T\partial}{\partial x^{\bar{\gamma}}} .$$

Тада је

$$g_{\alpha\beta} = e^{T} a_{\alpha\beta} (x^{\delta}), \tag{3.6}$$

где са $a_{\alpha\beta}$ (x^{δ}) функције које зависе само од координата x^{α}.

Релације (3.5) и (3.6) показују да се метрика простора V_n у адаптираном координатном систему изражава у облику

$$ds^2 = g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} (x^{\bar{\gamma}})\, dx^{\bar{\alpha}}\, dx^{\bar{\beta}} + e^{T} a_{\alpha\beta} (x^{\gamma})\, dx^{\alpha}\, dx^{\beta}. \tag{3.7}$$

Сад ћемо показати да функција T, под условом (3.1), зависи само од координата $X^{\bar{\alpha}}$. Одредимо, у ту сврху, Кристофелове симболе $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ метрике (3.7). Како је $g^{\alpha\bar{\delta}} = 0$, то имамо

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = e^{T} g^{\alpha\delta} \left(\frac{\partial a_{\beta\delta}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial a^{\delta\gamma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial a_{\beta\gamma}}{\partial x^{\delta}} + \frac{\partial T}{\partial x^{\gamma}} a_{\delta\beta} + \frac{\partial T}{\partial x^{\beta}} a^{\gamma\delta} - \frac{\partial T}{\partial x^{\delta}} a_{\beta\gamma} \right).$$

Међутим је $g^{\alpha\delta} = a^{\alpha\delta}\, e^{-T}$, па ако ставимо $T_{\alpha} = \dfrac{\partial T}{\partial x^{\alpha}}$ имамо:

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = a^{\alpha\delta} \left(\frac{\partial a_{\beta\delta}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial a_{\gamma\delta}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial a_{\beta\gamma}}{\partial x^{\beta}} \right) + T_{\gamma}\, \delta^{\alpha}_{\beta} + T_{\beta}\, \delta^{\alpha}_{\gamma} - T_{\delta}\, a^{\delta\alpha}\, a_{\beta\gamma}.$$

Отуда је

$$\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}}{\partial x^{\bar{\delta}}} = \frac{\partial T_{\gamma}}{\partial x^{\bar{\delta}}} \delta^{\alpha}_{\beta} + \frac{\partial T_{\beta}}{\partial x^{\bar{\delta}}} \delta^{\alpha}_{\beta} - \frac{\partial T_{\eta}}{\partial x^{\bar{\delta}}} a^{\eta\alpha}\, a_{\beta\gamma}.$$

С друге стране, из (3.1) је

$$\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}}{\partial x^{\bar{\delta}}} = \frac{\partial \varphi_{\beta}}{\partial x^{\bar{\delta}}} \delta^{\alpha}_{\beta} + \frac{\partial \varphi_{\gamma}}{\partial x^{\bar{\delta}}} \delta^{\alpha}_{\beta} \tag{3.8}$$

тако да из претходне две релације следи:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\bar\delta}}\left[(T_\gamma - \varphi_\gamma)\,\delta^\alpha_\beta + (T_\beta - \varphi_\beta)\,\delta^\alpha_\gamma\right] = \frac{\partial T_\eta}{\partial x^{\bar\delta}}\,a^{\eta\alpha}\,a_{\beta\gamma}\,. \tag{3.9}$$

Ако је $q > 1$, међу овим релацијама постоји макар једна код које је $\alpha \neq \beta$. $\alpha \neq \gamma$. Но тада је

$$\frac{\partial}{\partial x^{\delta}}\,(T_\eta)\,a^{\eta\alpha}\,a_{\beta\gamma} = 0.$$

па како је $a^{\eta\alpha}\ a_{\beta\gamma} \neq 0$, то мора бити

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^{\bar\delta}\,\partial x^{\eta}} = 0.$$

Али $T\delta = \dfrac{\partial T}{\partial x^{\delta}} \neq 0$, па је

$$\frac{\partial T}{\partial x^{\alpha}} = 0,$$

тј. функција T зависи само од координата $x^{\bar\alpha}$. И тако се, у адаптираном координатном систему, метрика простора изражава у облику

$$ds^2 = g_{\bar\alpha\bar\beta}\,(x^{\bar\gamma})\,dx^{\bar\alpha}\,dx^{\bar\beta} + e^{T(x)^{\gamma}}\,a_{\alpha\beta}(x^{\gamma})dx^{\alpha}dx^{\beta}. \tag{3.10}$$

Међутим, Риманов простор чија се метрика може изразити у облику (3.10) је полудекомпоновани Риманов простор. Тако имамо теорему:

Ако је Риманов простор V_n получебишевска композиција $x_q \times x_{n-q}$, и ако су задовољени услови IIa III и IV, простор V_n је полудекомпонован Риманов простор.

Ако је, пак, $T_{\bar\gamma} = 0$, $T = \text{const.}$, па из (3.6) следи да функције $g_{\alpha\beta}$ зависе само од координата x^{γ} и простор је декомпонован Риманов простор. У том случају услови *IIa* се не користе, а услов (2.6) се своди на услов

$$\Gamma^{\alpha}_{\bar\beta\gamma} = 0, \quad \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0,$$

који показује да је свежањ позиција базисног X_{n-q} Декартов. Тако имамо теорему:

Ако је Риманов простор V_n *композиција* $X_q \times X_{n-q}$ *тако да је свежањ позиција базисног* x_q *чебишевски;*

свежањ позиција базисног X_{n-q} *Декартов;*

трансверзалне позиције су ортогоналне,

простор V_n *је декомпонован Риманов простор*, тј. у адаптираном координатном систему метрика има овај облик

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x^\gamma)\,dx^\alpha\,dx^\beta + g_{\bar\alpha\bar\beta}(x^{\bar\gamma})\,dx^{\bar\alpha}\,dx^{\bar\beta}.$$

Уколико уместо услова IIa имамо услов IIb, уместо релације (3.8) имамо

$$\frac{\partial \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}}{\partial x^{\bar\delta}} = \frac{\partial \varkappa_\beta}{\partial \varkappa^{\bar\delta}}\delta^\alpha_\beta + \frac{\partial \varkappa_\gamma}{\delta x^{\bar\delta}}\delta^\alpha_\beta - \frac{\delta \varkappa_\eta}{\partial x^{\bar\delta}} b^{\eta\alpha}\, b_{\beta\gamma},$$

а уместо (3.9) имамо

$$\frac{\beta}{\partial x^{\bar\delta}}\left[(T_\gamma - \varkappa_\gamma)\,\delta^\alpha_\beta + (T_\beta - \varkappa_\beta)\,\delta^\alpha_\gamma\right] = \frac{\partial}{\partial x^{\bar\delta}}(T_\eta - \varkappa_\eta)\, b^{\eta\alpha}\, b_{\beta\gamma},$$

и ако је $q > 1$, отуда следи

$$\frac{\partial}{\partial x^{\bar\delta}}(T_\eta - \varkappa_\eta) = 0.$$

Ако су функције $\varkappa_\eta$ такве да је $\frac{\partial \varkappa_\eta}{\partial x^{\bar\delta}} = 0$, онда, као и напред, следи да функције T зависи само од координата $x^{\bar\delta}$ и простор V_n је полудекомпонован. У противном, метрика простора V_n се изражава, у адаптираном координатном систему, у облику (3.7), где функција T зависи од свих координата.

4. *Риманова екстензија.* — Посматрајмо сад Риманов простор V_n који је композиција $X_q \times X_{n-2q} \times X_q$. У овом параграфу обележавамо са X^α ($\alpha = 1, 2, \ldots, q$) унутрашње координате позиције базисног X_q, са X^s (s, t, p, $r = q+1, \ldots, n-q$) унутрашње координате позиције базисног X_{n-2q}, а са $x^{\bar\alpha}$ ($\bar\alpha = n - 2q + \alpha$) унутрашње координате позиције базисног X_q.

Нека су задовољени ови услови:

I'. Свежањ позиција базисног X_{n-2q} је чебишевски у односу на позиције базисног X_q.

II'$_a$. На базисном X_q је задана афина конексија $\Pi^\alpha_{\beta\gamma}$ (X^δ) а конексије аналогних позиција су у пројективној кореспонденцији, или

II'Ђ. На базисном X_q је задана Риманова метрика а конексије аналогних позиција су у конформној кореспонденцији.

III'. Свежањ позиција базисног X_q је torse-forming.

IV'. Позиције базисног $\overline{X}_q$ су тотално изотропне многострукости.

Другим речима, посматрани Риманов простор је получебишевска композиција која задовољава још и услове II'a (или II'Ђ), III и IV'. Роказаћемо да је такав простор Риманова екстензија простора афине конексије односно Риманова екстензија метричког простора.

У ту сврху приметимо, прво, да се према услову I', тангентне равни позиција базисног X_{n-2q} померају паралелно дуж произвољне линије позиције базисног $\overline{X}_q$. Примењујући поступак аналоган оном који је примењен у § 2, добијамо да се тај услов, у адаптираном координатном систему своди на

$$\Gamma^{\alpha}_{p\bar{\beta}} = \Gamma^{\bar{\alpha}}_{p\bar{\beta}} = 0. \tag{4.1}$$

Из услова II'a, као што је показано у § 3, следи (3.1), а из услова II'Ђ — (3.2). Услов III' је еквивалентан овим условима:

$$(4.2)\begin{cases} \text{(a)} \quad \Gamma^{\alpha}_{\bar{\beta}\bar{\gamma}} = \Gamma^{\alpha}_{t\bar{\gamma}} = \Gamma^{s}_{\bar{\beta}\bar{\gamma}} = \Gamma^{s}_{\bar{\alpha}\bar{\gamma}} = 0, \\ \text{(b)} \quad \Gamma^{\alpha}_{\beta\bar{\gamma}} = \delta^{\alpha}_{\beta} T_{\bar{\gamma}}, \\ \text{(c)} \quad \Gamma^{s}_{t\bar{\gamma}} = \delta^{s}_{t} T_{\bar{\gamma}}. \end{cases}$$

Заиста, сад свака позиција базисног $\overline{X}_q$ има две групе спољашњих индекса x^{α} и x^{s}, па су услови (2.6) еквивалентни условима (4.2). Најзад, због услова IV' је

$$g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = 0.$$

Једначина (3.4) се за $i=\bar{\alpha}$, $j=\bar{\beta}$, $k=\gamma$, односно за $i=\alpha$, $j=\beta$, $k=$ своди респективно на

$$\Gamma^{\delta}_{\gamma\bar{\alpha}} g_{\delta\bar{\beta}} + \Gamma^{\delta}_{\gamma\bar{\beta}} g_{\bar{\alpha}\delta} = 0, \qquad \Gamma^{t}_{s\bar{\alpha}} g_{t\beta} + \Gamma^{t}_{s\bar{\beta}} g_{\alpha t} = 0$$

тј. на

$$\delta^{\delta}_{\gamma} T_{\bar{\alpha}} g_{\delta\bar{\beta}} + \delta^{\delta}_{\gamma} T_{\bar{\beta}} g_{\bar{\alpha}\delta} = 0, \qquad \delta^{t}_{s} T_{\bar{\alpha}} g_{t\bar{\beta}} + \delta^{t}_{s} T_{\bar{\beta}} g_{\alpha t} = 0,$$

или најзад

$$T_{\bar{\alpha}} g_{\gamma\bar{\beta}} + T_{\bar{\beta}} g_{\bar{\alpha}\gamma} = 0, \quad T_{\bar{\alpha}} g_{s\bar{\beta}} + T_{\bar{\beta}} g_{\alpha s} = 0.$$

Отуда, за $\bar{\alpha} = \bar{\beta}$ добијамо

$$T_{\bar{\alpha}} g_{s\bar{\alpha}} = 0, \qquad T_{\bar{\alpha}} g_{\gamma\bar{\alpha}} = 0.$$

Како сви $g_{s\bar{\alpha}}$ и $g_{\gamma\bar{\alpha}}$ не могу бити једнаки нули, јер би у том случају метрика простора V_n била дегенерисана, то мора бити $T_{\bar{\alpha}} = 0$. Но тада се релације (4.2b) и (4.2c) своде на

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\bar{\gamma}} = \Gamma^{s}_{t\bar{\gamma}} = 0. \tag{4.3}$$

Оне, заједно са (4.2), показују да је свежањ позиција $\overline{X}_q$ Декартов.

Ако у (3.4) ставимо $i = \alpha$, $j = \bar{\beta}$, $k = \bar{\gamma}$ и узмемо у обзир (4.2a) и (4.3), добијамо:

$$\frac{\partial g_{\alpha\bar{\beta}}}{\partial x^{\bar{\gamma}}} - \Gamma^{\bar{\delta}}_{\bar{\beta}\bar{\gamma}} g_{\alpha\bar{\delta}} = 0. \tag{4.4}$$

Ако фиксирамо индекс α, $g_{\alpha\bar{\beta}}$, можемо посматрати као вектор $g_{\alpha|\beta}$. (4.4) показује да је тај вектор, на позицији базисног $\overline{X}_q$, апсолутно паралелан. за разне вредности α, на свакој позицији базисног $\overline{X}_q$, имамо q линеарно независних апсолутно паралелних вектора $g_{\alpha|\beta}$. То значи да је унутрашња геометрија сваке позиције базисног $\overline{X}_q$ — геометрија равног простора. С друге стране, тангентне равни позиција базисног $\overline{X}_q$ одређене су са q линеарно независних вектора $\underset{\alpha|}{\overset{i}{v}} = \underset{\alpha}{\overset{i}{\delta}}$. Но управо је показано да се те тангентне равни поклапају са самим позицијама. То значи да је свака позиција одређена са q вектора $\underset{\bar{\alpha}}{\overset{i}{\delta}}$. Стога се на позицији базисног $\overline{X}_q$ увек може изабрати координатни систем тако да је

$$g_{\alpha\bar{\beta}} = \delta^{\bar{\alpha}}_{\beta}. \tag{4.5}$$

У тако адаптираном координатном систему је, према (4.4)

$$\Gamma^{\bar{\delta}}_{\bar{\alpha}\beta} = 0.$$

Имајући то у виду, (3.4) се за $i = \alpha$, $j = \bar{\beta}$, $k = s$ и $i = \alpha$, $j = \beta$, $k = \gamma$ своди респективно на

$$(4.6)\begin{cases} (a) & \Gamma^{\beta}_{\gamma\alpha}+\Gamma^{t}_{\gamma\alpha}g_{t\bar\beta}+\Gamma^{\bar\alpha}_{\gamma\bar\beta}=0, \\ (b) & \Gamma^{\beta}_{s\alpha}+\Gamma^{t}_{s\alpha}g_{t\bar\beta}=0, \end{cases}$$

а за $i=r$, $j=\beta$, и k респективно γ, s и $\bar\gamma$ своди се на

$$(4.7)\begin{cases} (a) & \dfrac{\partial g_{r\bar\beta}}{\partial x^{\gamma}}-\Gamma^{\beta}_{\gamma r}-\Gamma^{t}_{\gamma r}g_{t\bar\beta}-\Gamma^{\bar\delta}_{\gamma\bar\beta}g_{r\bar\delta}=0, \\ (b) & \dfrac{\partial g_{r\bar\beta}}{\partial x^{s}}-\Gamma^{\beta}_{rs}-\Gamma^{t}_{sr}g_{t\bar\beta}=0, \\ (c) & \dfrac{\partial g_{r\bar\beta}}{\partial x^{\bar\gamma}}=0. \end{cases}$$

Ако се (4.6b) уврсти у (4.7a), добија се

$$\frac{\partial g_{r\bar\beta}}{\partial x^{\gamma}}=\Gamma^{\bar\delta}_{\gamma\bar\beta}g_{r\bar\delta}.$$

Из (4.7b), међутим следи

$$\frac{\partial g_{r\bar\beta}}{\partial x^{s}}=\frac{\partial g_{s\bar\beta}}{\partial x^{t}},$$

што показује да постоје функције $F_{\bar\beta}$ такве да је

$$g_{r\bar\beta}=\frac{\partial F_{\bar\beta}}{\partial x^{r}}.$$

Из (4.7c) се види да те функције не зависе од координата $x^{\bar\gamma}$.

Најзад, ако у (3.4) ставимо $i=r$, $j=p$, $k=\gamma$ добијамо

$$(4.8)\qquad \frac{\partial g_{rp}}{\partial x^{\bar\gamma}}=0,$$

а ако ставимо $i=\alpha$, $j=p$, $k=\bar\gamma$ имамо

$$(4.9) \qquad \frac{\partial g_{\alpha p}}{\partial x^{\bar{\gamma}}} = \Gamma^{\bar{\delta}}_{\bar{\gamma}\alpha} g_{\bar{\delta} p} + \Gamma^{\bar{\alpha}}_{\bar{\gamma} p} .$$

Тако можемо формулисати ову теорему

Ако је Риманов простор композиције $X_q \times X_{n-2q} \times X_q$ а задовољени су ус- I′ II′ IV′, постоји адаптирани координатни систем у односу на који матрица метричког тензора има овај облик:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{\alpha\beta} & g_{\alpha s} & g_{\alpha\bar{\gamma}} \\ g_{t\beta} & g_{ts} & g_{t\alpha\bar{\gamma}} \\ g_{\bar{\alpha}\beta} & g_{\bar{\alpha}s} & g_{\bar{\alpha}\bar{\gamma}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{\alpha\beta} & g_{\alpha s} & \delta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \\ g_{t\beta} & g_{ts} & \dfrac{\partial F_{\bar{\gamma}}(x^\alpha, x^s)}{\partial x^t} \\ \delta_{\alpha\beta} \dfrac{\partial F_{\bar{\gamma}}(x^\alpha, x^s)}{\delta x^t} & & 0 \end{pmatrix}$$

Ако функције $F_{\bar{\gamma}}$ не зависе од x^s, $g_{t\bar{\gamma}} = 0$ па се претходна матрица изражава у облику

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{\alpha\beta} & g_{\alpha s} & g_{\alpha\bar{\gamma}} \\ g_{t\beta} & g_{ts} & g_{t\bar{\gamma}} \\ g_{\bar{\alpha}\beta} & g_{\bar{\alpha}s} & g_{\bar{\alpha}\bar{\gamma}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{\alpha\beta} & g_{\alpha s} & \delta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \\ g_{t\beta} & g_{ts} & 0 \\ \delta_{\alpha s} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

а (4.9) се своди на $\dfrac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\bar{\gamma}}} = 0$, тако да, ако се има у виду и (4.8) у матрици (4.10) функције g_{ts} и $g_{\alpha s}$ не зависе од координата $x_{\bar{\gamma}}$.

Под условом $g_{t\bar{\gamma}} = 0$, једначине (4.5) се своде на

$$(4.11) \qquad \Gamma^{\beta}_{\gamma\alpha} = -\Gamma^{\bar{\alpha}}_{\gamma\beta}, \qquad \Gamma^{\beta}_{s\alpha} = 0.$$

С друге стране, из (3.4) за $i = \alpha$, $j = \beta$, $k = \bar{\gamma}$, с обзиром на (4.2а) и (4.5) имамо:

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\bar{\gamma}}} = \Gamma^{\bar{\alpha}}_{\bar{\gamma}\beta} + \Gamma^{\bar{\beta}}_{\bar{\gamma}\alpha}$$

што се, с обзиром на (4.11) може написати у облику

$$(4.12) \qquad \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\bar{\gamma}}} = -2\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} .$$

Узмимо, сад у обзир да је задавољен услов II'a, тј.

$$\Gamma^{\gamma}_{\beta\alpha} = \Pi^{\gamma}_{\alpha\beta}(x^{\delta}, x^{s}) + \varphi^{\beta}(x^{\delta} x^{s})\,\delta^{\gamma}_{\alpha} + \varphi_{\alpha}(x^{\delta}, x^{s})\delta^{\alpha}_{\beta}. \tag{4.13}$$

Тада из (4.12) имамо

$$g_{\alpha\beta} = -2\sum_{\gamma}\left[\Pi^{\gamma}_{\alpha\beta}(x^{\delta}, x^{s}) + \varphi_{\beta}\,\delta^{\gamma}_{\alpha} + \varphi_{\alpha}\,\delta^{\gamma}_{\beta}\right]x^{\bar{\gamma}} + a_{\alpha\beta}(x^{\delta}, x^{s}). \tag{4.14}$$

Мо смо раније показали [4] до је Риманов простор са метриком (4.10) под условом (4.14) Риманова екстензија q-димензионалног простора афине конексије. Тако имамо теорему:

Риманов простор V_n који је композиција $X_q x \times X_{k-2q} \times \overline{X}_q$ тако да су задовољени услови I' II'_a III' и IV'јесте Риманова екстензија q-димензионалног простора афине конексије.

Ако је уместо II'a задовољен услов II'Ъ, уместо релације (4.13) имамо релацију (3.2) где су $b_{\alpha\beta}$ функције само координата x^{α}. Што се тиче функција $\varkappa_{\alpha}$, претпоставимо да су оне дате у облику

$$\varkappa_{\alpha} = \theta\, x^{\bar{\alpha}} + \varphi_{\alpha}, \qquad \theta = \theta\ (x^{\alpha}, x^{s}), \qquad \varphi_{\alpha} = \varphi_{\alpha}(x^{\beta}, x^{s}). \tag{4.15}$$

Означимо са $L^{\alpha}_{\beta\gamma}$ Кристофелове симболе у односу на тензор $b_{\alpha\beta}$.
Тада из (4.12) добијамо

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= \theta\,(2\,x^{\bar{\alpha}}\,x^{\beta} - \sum_{\gamma,\delta} x^{\bar{\gamma}}\,x^{\bar{\delta}}\,b^{\gamma\delta}\,b_{\alpha\beta}) + \\ &+ \sum\left(-2\,L^{\delta}_{\alpha\beta} + \varphi_{\alpha}\,\delta^{\delta}_{\beta} + \varphi_{\beta}\,\delta^{\delta}_{\alpha} - \varphi_{\gamma}\,b^{\gamma\delta}\,b_{\alpha\beta}\right)x^{\bar{\delta}} + c_{\alpha\beta}(x^{\gamma}, x^{s}). \end{aligned} \tag{4.16}$$

Но простор са метриком (4.10) под условом (4.16), јесте Риманова екстензија комформног или Вајловог простора према томе да ли је $\theta \neq 0$ или $\theta = 0$. У овом последњем случају, ако је $\varphi_{\alpha} = 0$, V_n је Риманова екстензија q-димензионалног Римановог постора [5]. Тако је доказана теорема:

Риманов простор V_n који је композиција $X_q \times X_{n-2q} \times \overline{X}_q$ и то тако да су задовољени услови I', $II'b$, III' и IV' Риманова је екстензија комфорног, Вајловог или Римановог q-димензионалног простора.

Ако је $n = 2q$ посматрани простор, V_n је композиција $X_q \times \overline{X}_q$. Ако су, при том, задовољени услови III', и IV', а уместо услова II' услов:

— Свака позиција базисног X_q је изотропна многострукост, матрица метричког тензора V_n има, у адаптираном координатоом систему, облик

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & \delta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \\ \delta_{\alpha\beta} & 0 \end{pmatrix},$$

а то значи [1] да је V_n или простор Рашевског (кад су позиције базисних X_q X_q реалне) или простор Келера (кад су позиције базисних X_q и $\overline{X}$ коњуговано комплексне).

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. П. Норден — Пространство декартовой композиции, Изв. вузов. Математика, № 4, 1963.

[2] Е. К. Леотьев — О чебышевских композициях, Ученые записки Казан. унив. том 126, кн. I (1966), 23-40.

[3] Yano K. — On torse forming directions in Riemannian spaces. Proc. Imp. Acad. Tokyo 20 (1944). 701-705.

[4] М. Прванович — Римановы пространства садержащие геодезическое поле направлений, Publication de l'Inst. Math. t. 8 (22), Beograd 1968, 76-86.

[5] М. Прванович — r — бипланарное пространство параболического типа, Математички весник 3 (18), Београд 1966.

Mileva Prvanović

ON SOME SEMI-CHEBISHEV COMPOSITIONS

Summary

A torse-forming bundle of positions was defined and it was shown that if the space permits such a bundle, conditions are satisfied in the adapted coordinate system (2.6).

The basic theorems are the following:

T h e o r e m 1. The Riemannian space V_n which is the composition of $x_q \times x_{n-q}$ is a semi-decomposed Riemannian space if the following conditions are satisfied:

I) The bundle of positions of the base space x_q is Chebishevian;

IIa) On the base space x_q the affine connection is given, while the connections of a analogous positions are in projective relationship;

o r:

IIb) On the base space x_q the Riemannian metric is given, while the metrics of analogous posetions are in conformal correspondence;

III) The bundle of positions of the base space x_{n-q} is torse-forming;

IV) The transversal positions are orthogonal.

T h e o r e m 2. The Riemannian space V_n which is the composition of $x_q \times x_{n-2q} \times \dot{x}$ is a Riemannian extension of the q-dimensional space of the affine connection (or of the q-dimensional conformal space) if the following conditions are satisfied:

I′) The bundle of positions of she base space x_{n-2q} is Chebishevian in relation to the positions of the base space x_q;

IIa′) On the base x_q the affine connection is given, while the connections of analogous positions are in projective correspondence;

o r;

IIb′) On the base space x_q the Riemannian metric is given, while the metrics of analogous positions are in conformal correspondence;

III′) The bundle of positions of the base space x_q is torse-forming;

IV′) The positions of the base space x_q are totally isotropic manifolds.