Зборник радова Природно-математичког факултета — Универзитет у Новом Саду, 2 (1972)
Review of Research of Science — University of Novi Sad, 2 (1972)

Мирко Стојаковић

О ЈЕДНОМ СТАВУ Г. П. БАРКЕРА О ТРОУГАОНИМ МАТРИЦАМА

У раду [1] G. P. Barker доказао је следећи став о троугаоним матрицама:

Теорема 1. — Ако су S_1, S_2, .., S_n матрице формата $n \; x \; n$ (над прстеном R) троугаоне, с нулама испод дијагонале, („горње троугаоне") и ако је елеменат с индексима (i, i) матрице S_i једнак нули, тада је и

$$S_1 \; S_2 \cdot \cdot S_n = 0.$$

Аутор је ову теорема искористио за доказ Кејли-Хамилтонове теореме која тврди да свака матрица задовољава свој карактеристични полином.

Ми ћемо овде дати два нова доказа те теореме и саму теорему уопштити.

Поређења ради наводимо доказ аутора Баркера.

Нека је

$$T = S_1 \; S_2 \cdot \cdot S_n = [t_{ij}].$$

Нека је

$$t_{ij} = \Sigma \cdot \cdot \Sigma s_{i \, i_1} s_{i_1 \, i_2} \cdot \cdot s_{i_{n-1} \, j}$$

где је стављено да је $s_{i_p \, i_{p+1}}$ елеменат матрице S_{p+1}.

Пошто је S_i горње троугаона матрица, мора бити $t_{ij} = 0$ за $i<j$. Доказ би био завршен када бисмо показали да сваки сабирак $s_{i \, i_1} \; s_{i_1 \, i_2} \cdot \cdot \cdot \cdot s_{i_p \, i_{p+1}}$ где је $i \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \cdot \cdot \cdot \leqslant i_{n-1} \leqslant j$ мора бити једнак нули, Аутор сада детаљно анализира могуће вредности индекса у низу па изводи да мора бити $T=0$. Ево скраћено те анализе: ако је $i_p = p+1$, тада је $i_{p+1} \geqslant p+2$; а ако је $i_p > i_{p+1}$ тада је $i_{p+1} \geqslant i_p + 3$. Стога мора бити $n \leqslant i_{n-1} \leqslant j \leqslant n$, па је $s_{i_{n-1} \, j} = s_{nn} = 0$. Тако се било где у низу индекса мора појавити веза $i_p = i_{p+1} = p+1$ и отуда $s_{i_p \, i_{p+1}} = 0$.

Ми ћемо ову теорему најпре доказати индукцијом по формату n.

За $n=1$ нема шта да се доказује. Ту је $S_1 = \mathrm{T} = 0$.

За $n=2$ имамо

$$S_1 = \begin{bmatrix} o & x \\ o & y \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} u & v \\ o & o \end{bmatrix}$$

где су x, y, u, v произвољни елементи из прстена R. Јасно је да је $S_1 S_2 = 0$ (док није увек $S_2 S_1 = 0$).

Претпоставимо сад да је теорема доказана за неки природни број m

Тада је:

$$S_1 S_2 \cdot \cdot S_m S_{m+1} = T S_{m+1},$$

где је:

$$S_I = \begin{bmatrix} \underline{T_1} & a_1 \\ O & x_1 \end{bmatrix}, \ldots, S_m = \begin{bmatrix} \underline{T_m} & a_m \\ O & x_m \end{bmatrix},$$

а $T_1, \ldots, T_m$ су mxm горње троугаоне матрице такве да је елеменат с. индексима $(i,\ i)$ у матрици T_i једнак нули.

Под тим претпоставкама је:

$$T = S_1 S_1 \ldots S_m = \begin{bmatrix} O_m & u_m \\ O & x \end{bmatrix} \text{ а } S_{m+1} = \begin{bmatrix} \underline{A_m} & t_m \\ O & o \end{bmatrix}$$

где је O_m нула матрица формата mxm док је A_m горње троугаона матрица формата mxm; u_m t_m су вектори колоне реда mx1. При томе је 0 нула врста реда 1xm а x је неки елеменат из R.

Непосредним множењем се добија

$$TS_{m+1} = 0.$$

Теорема је доказана.

За други доказ користићемо следеће добро познате чињенице из линеарне алгебре:

1. — Троугаони облик матрица с нулама испод дијагонале инваријантан је у односу на множење матрица.

2. — Производ АВ двеју матрица формата nxn може се добити из матрице А (одн. из В) вршећи на њеним колонама (одн. на врстама матрице В) исте оне промене које треба извршити на колонама (одн. врстама) јединичне матрице E формата nxn да би се добила матрица В (одн. матрица А).

Почињемо сад са анализом производа $S_1 S_2$. Како је S_2 матрица добијена из E

a) множењем прве колоне са x;

b) множењем друге колоне са нулом;

c) додавањем прве колоне другој пошто је прва претходно помножена са z;

d) другим променама на колонама индекса већег од 2 које нећемо наводити пошто су без утицаја на даље резоновање.

Пошто матрица S_1 има прву колону сачињену само од нула, промене под a и c су без ефекта у овом случају па промена b казује да производ $S_1 S_2$ има обе прве колоне сачињене само од нула. Тако исто бисмо закључили да $S_1 S_2 S_3$ има све три прве колоне сачињене само од нула итд. На крају закључујемо да производ $S_1 S_2 \cdot \cdot S_n$ има свих n колона које су сачињене од самих нула.

Тако се добија прецизнија

Теорема 2. — Нека су S_i, $i=1, 2, \, ., k$ S_k, $k \leqslant n$ матрице формата nxn као у теореми 1, док је S_k за $k>n$ произвољно, тада је

$$S_1 S_2 \cdot \cdot S_k, \quad k=1, 2, \, . \, .$$

матрица која има $n \dot{-} (n \dot{-} k)$ првих колона које су сачињене од самих нула при чему је $x \dot{-} y = 0$ кад је $x \leqslant y$, а иначе је то $x - y$.

Наводимо да теорема 2 важи и у облику који се односи на партиционаране матрице пошто се у доказима оперише аргументима који важе и за блокове уместо за елементе.

Захваљујем професору G. N. Wollan-у (Purdue *Univ. Lafayette* USA) на сугестијама у вези са нотацијом.

---

* Саопштено у Amer. math. soc. фебруара 1971.

Mirko Stojaković

ON A THEOREM OF G. P. BARKER ON TRIANGULAR MATRICES

Summary

In a recent paper [1] G. P. Barker gave a proof of the following

Theorem. — If $S_1 S_2, \ldots, S_n$ are (upper) triangular matrices (over a ring) such that the (i, i) element of S_i is zero, then

$$S_1 S_2 \ldots S_n = 0.$$

We give here two simple proofs and a generalization of that theorem.

1. — Proof (by induction on n).

For $n=1$ there is nothing to be proved as $S_1=0$.

For $n=2$ we have

$$S_1 = \begin{bmatrix} o & x \\ o & x \end{bmatrix} \qquad S_2 = \begin{bmatrix} x & x \\ o & o \end{bmatrix}$$

and by straightforward verification $S_1 S_2 = 0$.

(Remark. — We note by x an arbitrary element which may also be or not be equal to zero. We also note by the same letter S different matrices because there cannot be any ambiguity about the meaning of the letter. We see that even in the case $n=2$ the order of matrices in $S_1 S_2$ cannot be reversed. Here $S_2 S_1$ could be different from zero).

Assume now that the theorem is proved for $n=m$. Then

$$S_1 S_2 \ldots S_m S_{m+1} = T S_{m+1} = 0$$

because of

$$T = S_1 S_2 \ldots S_m = \begin{bmatrix} O_m & u_m \\ o_m & x \end{bmatrix}, \quad S_{m+1} = \begin{bmatrix} A_m & t_m \\ o_m & o \end{bmatrix}$$

where: O_m is zero matrix of the order mxm (bu the induction hypothesis), A_m is an upper triangular matrix of the order mxm (by the definition), u_m and t_m are some column m-dimensional vectors and o_m is a row m-dimensional vector.

The proof is also valid in the partitioned form of the theorem.

2. — Proof (by direct verification).

We use the following well-known facts from linear algebra:

The upper triangularity of matrices is invariant under the multiplication of matrices.

The product $A\ B$ of two matrices A, B can be obtained from A (resp. from B) by just making the same changes on the columns of A (on the rows of B) as one has to do in order to obtain B (resp A) by making the necessary changes on columns (resp. rows) of the identity matrix E.

Now, we start to calculate $S_1 S_2$.

As S_2 is obtained from E by

a) multiplying the first column by x;

b) multiplying the second column bu zero;

c) adding the first colnmn multiplied by x to the second column;

d) some changes on the rest of columns which we ignore as unimportant to our goal.

Due to these changes $S_1 S_2$ has two first columns equal to zero (the operations *a* and *c* having no effect at all, the first column of S_1 being entirely composed of zeros).

In the same manner we conclude that $S_1 S_2 S_3$ has its first three columns equal to zero and so on. Finally, $S_1 S_2 \ldots S_n$ has all elements equal to zero.

This proof is also valid in the partitioned form of the theorem. We have now in a more precise form

Theorem 2. — Let the matrices S_i, $i=1, 2, \ldots, n$ be as in theorem 1 and S_i arbitrary for $i>n$. Then the matrix

$$S_1 S_2 \ldots S_k$$

has $n \dot{-} (n \dot{-} k)$ first columns composed entirely of zeros.

For $k=n$ we have theorem 1.

REFERENCES

[1]. G. P. Barker — Triangular matrices and the Cayley-Hamilton Theorem-Math. Magazine vol. 44. №. 1-L971 pp. 34-37.

[2]. M. Stojaković-On a theorem of G. P. Barker on triangular matrices-Math. Magazine, vol. 44 May 1971.

[3]. A group of authors (Nat. sc. foundation Program) — Products of triangular matrices — — Math. Magazine — (44) — №5 — 1971, p. 276.