ZBORNIK RADOVA
Prirodno-matematičkog fakulteta
Univerziteta u Novom Sadu
Serija za matematiku, 16,2(1986)

REVIEW OF RESEARCH
Faculty of Science
University of Novi Sad
Mathematics Series, 16,2(1986)

ÜBER ZUFÄLLIGE FIXPUNKTE BEI STETIGEN ZUFÄLLIGEN OPERATOREN IN METRISCHEN VEKTORRÄUMEN

S. Hahn

Pädagogische Hochschule „Karl Friedrich Wilhelm Wander" Dresden, DDR 8060 Dresden, Wigardstraße 17, Sektion Mathematik

ZUSAMMENFASSUNG

In der vorliegenden Arbeit wird ein Homotopieerweiterungsatz für zufällige Operatoren bewiesen. Er verallgemeinert ein entsprechendes deterministisches Resultat aus [7] und erlaubt die Herleitung von verschiedenen Fixpunktaussagen für zufällige Operatoren, ohne ständig die dazugehörigen deterministischen Aussagen zu verwenden.

1. EINLEITUNG

Fixpunktaussagen für zufällige Operatoren gehen auf Arbeiten der Prager Schule der Wahrscheinlichkeitstheorie um Spacek und Hanš zurück (s.z. B. [8]).
Derartige Aussagen sind nützliche Hilfsmittel bei der Untersuchung von zufälligen Differential - bzw. Integralgleichungen (s.z. B. [1]). Seit dem Artikel von Bharucha-Reid 1976 ([2]) sind sehr viele Arbeiten über zufällige Fixpunkte erschienen. Zunächst übertrug man eine Reihe bekannter Fixpunktsätze auf die stochastische Situation, wobei die deterministi-

AMS Mathematics Subject Classification (1980): 47H10.

Kennwörter: Zufällige Operatoren, zufällige Fixpunkte, meßbare Räume, meßbare (mengenwertige) Abbildungen, Homotopie von kompakten Abbildungen.

schen Ergebnisse verwendet wurden. Neuere Fixpunktaussagen sichern die Lösbarkeit des stochastischen Fixpunktproblems unter der Voraussetzung der Lösbarkeit der zugehörigen deterministischen Probleme ganz allgemein (vgl. Satz 1 aus Abschnitt 2).

Wir wollen in unserer Note eine Möglichkeit andeuten, wie man auf der Grundlage eines zufälligen Fixpunktsatzes vom Schauder-Typ verschiedenartige allgemeine zufällige Fixpunktaussagen herleiten kann, ohne ständig das zugehörige deterministische Problem verwenden (und kennen) zu müssen. Dadurch ist eine Behandlung von Fixpunktproblemen innerhalb der stochastischen Theorie möglich. Hauptinstrument dafür ist ein Homotopieerweiterungssatz für zufällige kompakte Operatoren (Satz 4 aus Abschnitt 3). Er verallgemeinert einen Satz des Verfassers aus [7] durch die Erweiterung des Gültigkeitsbereiches auf zufällige Operatoren. Anwendungen des Homotopieerweiterungssatzes werden in Abschnitt 4 vorgestellt.

Die Ausführungen sollen nur andeuten, daß der von Granas [5] begründete Weg zur Leray-Schauder-Theorie auch für den Fall von zufälligen Operatorengleichungen gangbar ist. Dabei verzichten wir auf eine größte Allgemeinheit.

So betrachten wir hier nicht Operatoren mit zufälligem Definitionsbereich. Ferner beschränken wir uns auf kompakte zufällige Operatoren, obwohl die Sätze auch für kondensierende zufällige Operatoren bewiesen werden könnten.

Im folgenden stellen wir einige Begriffe und Bezeichnungen zusammen.

In der gesamten Arbeit bezeichne (Ω,γ,μ) einen vollständigen σ-finiten Maßraum.

Sei X ein metrischer Raum, so sei $Cl(X)$ das System aller nichtleerer, abgeschlossener Teilmengen von X. Eine (mengenwertige) Abbildung $A : \Omega \to Cl(X)$ heißt meßbar (schwach meßbar), wenn für jede abgeschlossene (offene) Teilmenge M von X das vollständige Urbild $A^{-1}(M) = \{w \in \Omega : A(w) \cap M \neq \emptyset\}$ meßbar ist. Wir bemerken, daß im Falle kompakter Werte Meßbarkeit und schwache Meßbarkeit äquivalent sind. Speziell gilt das also für (punktwertige) Abbildungen $F : \Omega \to X$. Ist X ein vol-

lständiger, separabler metrischer Raum, so ist ebenfalls eine Abbildung $A : \Omega \to Cl(X)$ meßbar genau dann, wenn sie schwach meßbar ist. In diesem Fall sind beide Meßbarkeitsbegriffe auch gleichwertig mit der Meßbarkeit des Graphen $Gr(A) := \{(w,x) \in \Omega \times X : x \in A(w)\}$, d. h., mit der Beziehung $Gr(A) \in \in (\gamma \times \mathcal{L}(X))$.
Dabei ist $\gamma \times \mathcal{L}(X)$ die von allen Mengen $S \times B$ ($S \in \gamma$, $B \in \mathcal{L}(X)$, $\mathcal{L}(X)$ System aller Borelmengen von X) erzeugte σ-Algebra. (vgl. [9], Theorem 3.5). Sei Y ein metrischer Raum, Ω und X wie oben erklärt.
Eine Abbildung $F : \Omega \times X \to Y$ heißt ein zufälliger Operator, wenn $F(\cdot,x)$ meßbar für jedes $x \in X$ ist. Der zufällige Operator $F : \Omega \times X \to Y$ heißt stetig (kompakt), wenn die Abbildung $F(w,\cdot)$ für jedes feste w stetig (kompakt) ist. Sei nun $X \subseteq Y$. Unter einem zufälligen Fixpunkt des zufälligen Operators $F : \Omega \times X \to Y$ verstehen wir eine meßbare Abbildung $x : \Omega \to X$ mit $F(w,x(w)) = x(w)$ für alle $w \in \Omega$.

2. EIN ALLGEMEINER ZUFÄLLIGER FIXPUNKTSATZ

Wir geben zunächst einen allgemeinen zufälligen Fixpunktsatz an, der das stochastische Problem vollständig auf ein deterministisches Problem zurückführt. Der Satz ist prinzipiell bekannt, er wurde für separable Banachräume und zufällige Definitionsbereiche von Engl [4] erstmals bewiesen (siehe auch [3], [13], [14]).
Wir geben eine Formulierung für metrische Räume an.

Satz 1. *Sei* Y *ein vollständiger, separabler metrischer Raum,* X *eine abgeschlossene Teilmenge von* Y *sowie* $F : \Omega \times X \to Y$ *ein stetiger zufälliger Operator. Für jedes* $w \in \Omega$ *habe die Abbildung* $F(w,\cdot)$ *einen Fixpunkt. Dann hat* F *einen zufälligen Fixpunkt.*

Beweis. Sei $A(w) := \{x \in X : x = F(w,x)\}$ ($w \in \Omega$). Nach Voraussetzung gilt $A(w) \neq \emptyset$ ($w \in \Omega$) und $A(w)$ ist für jedes $w \in \Omega$ abgeschlossene Teilmenge von X, da F stetig bezü-

gleich x und X abgeschlossen ist.
Wir zeigen nun die schwache Meßbarkeit der Abbildung $A : \Omega \to Cl(X)$. Sei dazu d die Metrik in Y und $f(w,x) := d(x,F(w,x))$ $(w \in \Omega,\ x \in X)$. Da $F(\cdot,x)$ für jedes feste $x \in X$ meßbar ist, folgt aus Theorem 3.5 in [9] die Meßbarkeit von $f(\cdot,x)$ für jedes $x \in X$. Da ferner $f(w,\cdot)$ stetig ist für jedes feste $w \in \Omega$, können wir Theorem 6.1 aus [9] auf f anwenden und $f : \Omega \times X \to \mathbb{R}$ ist damit $(\gamma \times \mathcal{L}(X))$-meßbar. Speziell gilt daher $f^{-1}(\{0\}) \in \gamma \times \mathcal{L}(X)$. Nun ist

$$Gr(A) = \{(w,x) : x \in A(w)\} = \{(w,x) : x = F(w,x)\} =$$

$$= \{(w,x) : f(w,x) = 0\} = f^{-1}(\{0\}) \in \gamma \times \mathcal{L}(X).$$

Daher hat A einen meßbaren Graphen und A ist somit schwach meßbar. Nach dem Selections-Theorem von Kuratowski und Ryll-Nardzewski [12] hat A einen meßbaren Selektor, das heißt, es existiert eine meßbare Abbildung $x : \Omega \to X$ mit $x(w) \in A(w)$ für jedes $w \in \Omega$. Damit gilt $x(w) = F(w,x(w))$ $(w \in \Omega)$ und $x : \Omega \to X$ ist zufälliger Fixpunkt für F.

Bemerkung. Wenden wir im Beweis von Satz 1 auf nicht das zitierte Selektionstheorem aus [12], sondern Theorem 5.6 aus [9] an, so erhalten wir wie in [4] sogar die Existenz einer höchstens abzählbaren Menge $\{x_1, x_2, \dots\}$ von zufälligen Fixpunkten von F derart, daß für jedes $w \in \Omega$ die Menge $\{x_n(w)\}$, $n \in N$ dicht in $\{x \in X : x = F(w,x)\}$, also in der Menge aller Fixpunkte von $F(w,\cdot)$ liegt.
Realisierung von Satz 1 an (Satz 3). Eine naheliegende Verallgemeinerung des bekannten stochastischen Analogons zum Fixpunktsatz von Schauder (s.z. B. [2]) formulieren wir zur Demonstration mit Satz 2, der sofort aus dem Fixpunktsatz von Tychonoff und Satz 1 mit $X = Y = K$ folgt.

Satz 2. *Es seien* E *ein lokalkonvexer, metrisierbarer topologischer Vektorraum und* K *eine nichtleere, konvexe, kompakte Teilmenge von* E. *Dann hat jeder stetiger zufälliger Operator* $F : \Omega \times K \to E$ *mit* $F(\Omega \times K) \subseteq K$ *einen zufälligen Fix-*

punkt.

Die Teilmenge K des topologischen Vektorraumes heißt zulässig, wenn zu jedem Kompaktum $K_0 \subset K$ und zu jeder Nullumgebung $V \subset E$ eine finite Abbildung $f_V : K_0 \to K$ existiert mit $f_V(x) - x \in V$ $(x \in K_0)$.
Bisher ist kein Beispiel für eine nicht zulässige konvexe Menge bekannt. Jede konvexe Menge eines lokalkonvexen Raumes ist bekanntlich zulässig. Untersuchungen über die Zulässigkeit von Mengen wurden u.a. in den Arbeiten [6],[10], [11] durchgeführt. Ein topologischer Raum X heißt zusammenziehbar, wenn ein $x_0 \in X$ und eine stetige Abbildung $h : X \times [0,1] \to X$ existiert, so daß $h(x,0) = x$, $h(x,1) = x_0$ $(x \in X)$ gilt. Jede bezüglich eines $x_0 \in E$ sternförmige Teilmenge X eines topologischen Vektorraumes E ist zum Beispiel zusammenziehbar.
Aus Satz 1 und einem Resultat von Jerofsky [10] erhalten wir nun ein später verwendetes Ergebnis:

Satz 3. *Sei* E *ein vollständiger separabler metrischer Vektorraum,* K *eine nichtleere, zulässige, zusammenziehbare Teilmenge von* E, *die eine endliche Vereinigung von abgeschlossenen, konvexen Teilmengen von* E *ist. Weiter sei* $F : \Omega \times K \to K$ *ein kompekter zufälliger Operator. Dann hat* F *einen zufälligen Fixpunkt.*

Beweis: Wir setzen in Satz 1 $X = Y = K$. Für jedes $w \in \Omega$ gilt $\{x \in K : F(w,x) = x\} \neq \emptyset$ nach einem Satz von Jerofsky ([10], Satz 1.5.6, dieser Satz gilt sogar für nichtmetrisierbare topologische Vektorräume). Satz 1 liefert die Behauptung.

Wir bemerken, daß in jedem lokalkonvexen Raum die endliche Vereinigung von abgeschlossenen konvexen Mengen eine zulässige Menge ist ([10], Folgerung 1.5.4), in nichtlokalkonvexen Folgenraum ℓ^p $(0 < p < 1)$ ist zum Beispiel jede kompakte Menge K, die endliche Vereinigung von abgeschlossenen, konvexen

Mengen ist, zulässig. (Folgerung 1.5.5. aus [1]).
Das im Beweis von Satz 3 verwendete Resultat ist das einzige deterministische Hilfsmittel, das wir in der weiteren Arbeit verwenden. Aus Satz 3 leiten wir in Abschnitt 4 einige Fixpunktaussagen ohne Rückgriff auf entsprechende deterministische Ergebnisse her. Dazu benötigen wir einen allgemeinen Homotopieerweiterungssatz.

3. HOMOTOPIEERWEITERUNGSSATZ FÜR ZUFÄLLIGE KOMPAKTE OPERATOREN

Definition. *Sei* E *ein metrischer Raum,* $X \subseteq Y \subseteq E$ *und* $F : \Omega \times Y \to E$, $G : \Omega \times X \to E$ *kompakte zufällige Operatoren. Wir nennen* F *und* G *homotop auf* X *(in Zeichen* $F \overset{X}{\sim} G$ *), wenn eine Abbildung* $H : \Omega \times Y \times [0,1] \to E$ *existiert, für die gilt:*

(1) H *ist meßbar bezüglich* w *für jedes* $(x,t) \in Y \times [0,1]$

(2) H *ist kompakt bezüglich* $(x,t) \in Y \times [0,1]$ *für jedes feste* $w \in \Omega$

(3) $H(w,x,0) = F(w,x)$, $H(w,x,1) = G(w,x)$ $(x \in Y,\ w \in \Omega)$

(4) $x \neq H(w,x,t) \quad (w \in \Omega,\ x \in X,\ t \in [0,1])$.

H *heißt dann Homotopie zwischen* F *und* G.

Ausgehend vom Konzept von Granas [5] bewies der Verfasser in [7] einen allgemeinen Homotopieerweiterungssatz für kompakte mengenwertige Operatoren. Für den punktwertigen Fall beweisen wir nun diesen Satz für die Situation der zufälligen Operatoren. Der Satz aus [7] ist damit (für punktwertige Abbildungen und Metrisierbarkeit) ein echter Spezialfall des folgenden Satzes.

Satz 4. *Es seien* E *ein vollständiger, separabler metrischer Raum,* X *und* Y *abgeschlossene Teilmengen von* E *mit* $X \subseteq Y$ *sowie* $F : \Omega \times Y \to E$, $G : \Omega \times Y \to E$ *kompakte zufällige Operatoren.* F *sei auf* X *zu* G *homotop.* H *bezeichne eine*

Homotopie zwischen F *und* G. *Hat* F *keinen zufälligen Fixpunkt, so existiert ein kompakter zufälliger Operator* $G_1 :$ $: \Omega \times Y \to E$ *ohne zufälligen Fixpunkt, für den* $G_1(w,x) =$ $= G(w,x)$ $(w \in \Omega,\ x \in X)$ *sowie* $G_1(\Omega \times Y) \subseteq H(\Omega \times Y \times [0,1])$ *gilt.*

Beweis: Wir nehmen an, jeder kompakte zufällige Operator $G_1 : \Omega \times Y \to E$ mit $G_1(w,x) = G(w,x)$ $(w \in \Omega,\ x \in X)$ und $G_1(\Omega \times Y) \subseteq H(\Omega \times Y \times [0,1])$ habe einen zufälligen Fixpunkt. Dann hat insbesondere auch G selbst einen zufälligen Fixpunkt, so daß alle $w \in \Omega$ stets $\{x \in Y : x = G(w,x)\} \neq$ $\neq \emptyset$ gilt. Wegen $G(w,x) = H(w,x,1)$ $(x \in Y,\ w \in \Omega)$ sind dann auch alle Mengen.

$$A(w) := \{x \in Y : x = H(w,x,t) \text{ für ein } t \in [0,1]\} \qquad (w \in \Omega)$$

nichtleer. Aus der Stetigkeit von H bezüglich (x,t) und der Kompaktheit von $[0,1]$ folgt ferner leicht die Abgeschlossenheit jeder Menge $A(w)$ $(w \in \Omega)$. Wir zeigen nun die schwache Meßbarkeit der Abbildung $A : \Omega \to Cl(Y)$.

Sei M eine beliebige abgeschlossene Teilmenge von Y. Es existieren abzählbar dichte Teilmengen M_0 von M und I_0 von $[0,1]$. Dann gilt

$$A^{-1}(M) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{x_n \in M_0} \bigcup_{t_n \in I_0} \left\{w \in \Omega : d(x_n, H(w,x_n,t_n)) < \frac{1}{2}\right\}.$$

Ist nämlich $w \in A^{-1}(M)$, so existiert ein $x \in M$ mit $x =$ $= H(w,x,t)$ für ein $t \in [0,1]$. Für jedes $n \in N$ existiert ein $x_n \in M_0$ und ein $t_n \in I_0$ mit $d(x_n,x) < 1/2n$ und $d(H(w,x_n,t_n),$ $H(w,x,t)) < 1/2n$. Hieraus folgt $d(x_n,H(w,x_n,t_n)) < 1/n$.

Sei umgekehrt $w \in \Omega$ so gegeben, daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in M_0$ und ein $t_n \in I_0$ existiert mit $d(x_n,H(w,x_n,t_n)) < 1/n$. Weil H bezüglich (x,t) kompakt ist, können wir o.B.d.A. die Konvergenz $H(w,x_n,t_n) \to y_0$ annehmen. Hieraus folgt auch $x_n \to y_0$ und $y_0 \in M$. Ferner gilt o.B.d.A. die Konvergenz $t_n \to t_0 \in [0,1]$ und damit $H(w,x_n,t_n) \to H(w,y_0,t_0)$, woraus

$y_0 = H(w,y_0,t_0)$ folgt. Daher gilt in der Tat $w \in A^{-1}(M)$. Aus der Darstellung für $A^{-1}(M)$ folgt die Meßbarkeit dieser Menge, da H meßbar bezüglich w ist und nach [9], Theorem 3.5 dann auch die Abbildung $w \to d(x,H(w,x,t))$ $(w \in \Omega)$ für jedes feste $x \in Y$, $t \in [0,1]$ meßbar ist.
Damit haben wir die schwache Meßbarkeit von A gezeigt. Wir setzen nun (wobei d die Metrik in E bezeichne)

$$f(w,x) = \frac{d(x,A(w))}{d(x,A(w)) + d(x,X)} \quad (x \in E,\ w \in \Omega).$$

Wegen $x \neq H(w,x,t)$ $(x \in X,\ w \in \Omega,\ t \in [0,1])$ gilt $A(w) \cap X = \emptyset$ $(w \in \Omega)$. Ferner waren X und $A(w)$ $(w \in \Omega)$ abgeschlossen. Somit ist $f : \Omega \times E \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit $f(w,x) = 0$ $(w \in \Omega,\ x \in A(w))$ und $f(w,x) = 1$, $(w \in \Omega,\ x \in X)$. Weiterhin ist $f(w,\cdot)$ stetig für jedes feste $w \in \Omega$. Weil $A : \Omega \to Cl(Y)$ schwach meßbar war, muß nach [9], Theorem 35 auch die Abbildung $w \to d(x,A(w))$ für jedes feste $x \in E$ meßbar sein. Damit ist $f(\cdot,x)$ meßbar für jedes feste $x \in E$.
Sei nun $G_1(w,x) = H(w,x,f(w,x))$ $(w \in \Omega,\ x \in Y)$. Dann ist $G_1 : \Omega \times Y \to E$ ein kompakter zufälliger Operator (die Meßbarkeit von G_1 bezüglich w folgt aus der Meßbarkeit von $f(\cdot,x)$ und Theorem 6.5 aus [9]). Für jedes $x \in X$ gilt

$$G_1(w,x) = H(w,x,1) = G(w,x) \quad (w \in \Omega).$$

Nach unserer Annahme muß G_1 einen zufälligen Fixpunkt besitzen, für jedes $w \in \Omega$ gilt damit $\{x \in Y : x = G_1(w,x)\} \neq \emptyset$. Sei $w \in \Omega$. Dann existiert also ein $x \in Y$ mit $x = G_1(w,x) = H(w,x,f(w,x))$. Wegen $f(w,x) \in [0,1]$ folgt $x \in A(w)$, also $f(w,x) = 0$ und damit $x = H(w,x,0) = F(w,x)$. Somit erhalten wir für jedes $w \in \Omega$ die Relation $\{x \in Y : x = F(w,x)\} \neq \emptyset$ und nach Satz 1 hat F einen zufälligen Fixpunkt. Dieser Widerspruch beweist Satz 4.

4. ANWENDUNGEN DES HOMOTOPIEERWEITERUNGSSATZES

Wir verwenden nun Satz 4 zur Herleitung dreier

verschiedenartiger Fixpunktaussagen, ohne nochmals auf analoge deterministische Ergebnisse Bezug nehmen zu müssen.
Zunächst beweisen wir eine Existenzaussage mit Leray-Schauder-Randbedingung.

Satz 5. *Sei* E *vollständiger, separabler metrischer Vektorraum,* W *eine offene Nullumgebung von* E *und* K *eine bezüglich* $o \in E$ *sternförmige, zulässige Menge, die eine endliche Vereinigung von abgeschlossenen konvexen Teilmengen von* E *ist. Sei* $F : \Omega \times (\overline{W} \cap K) \to K$ *ein kompakter zufälliger Operator. Es gelte für alle* $w \in \Omega$ *stets* $F(w,x) \neq \beta x (x \in \partial W \cap K, \beta > 1)$. *Dann hat* F *einen zufälligen Fixpunkt.*

Beweis: Wir nehmen an, F habe keinen zufälligen Fixpunkt. Sei $G(w,x) = 0$ $(w \in \Omega,\ x \in \overline{W} \cap \overline{K})$ und $H(w,x,t) = (1-t)F(w,x)$, $(w \in \Omega,\ x \in \overline{W} \cap \overline{K})$, $(t \in [0,1])$.
Man erkennt leicht, daß F und G mittels H homotop auf $\partial W \cap K$ sind. Nach Satz 4 existiert ein kompakter zufälliger Operator $G_1 : \Omega \times (W \cap K) \to K$ mit $G_1(w,x) = 0$ für alle $w \in \Omega$ und $x \in \partial W \cap K$ ohne zufälligen Fixpunkt. Sei

$$T(w,x) = \begin{cases} G_1(w,x) & \text{für } x \in \overline{W} \cap K,\ w \in \Omega \\ 0 & \text{für } x \in K \setminus \overline{W},\ w \in \Omega. \end{cases}$$

Dann ist $T : \Omega \times K \to K$ ein kompakter zufälliger Operator, der nach Satz 3 einen zufälligen Fixpunkt $x_0 : \Omega \to K$ besitzen muß. Dann ist sogar $x_0(w) \in \overline{W} \cap K$ für alle $w \in \Omega$ (sonst wäre für ein $w_0 \in \Omega$ die Beziehung $T(w_0, x_0(w_0)) = 0 = x_0(w_0)$ und $x_0(w_0) \in K \setminus \overline{W}$ gültig, was wegen $0 \in W$ ein Widerspruch ist), also $G_1(w, x_0(w)) = x_0(w)$. Damit hätte G_1 doch einen zufälligen Fixpunkt.
Satz 5 ist daher bewiesen.

Unsere nächste Aussage gibt eine hinreichende Bedingung für die Existenz eines nichttrivialen zufälligen Fixpunktes für einen positiven zufälligen Operator an.

Satz 6. *Es seien* E *ein vollständiger, separabler metrischer Vektorraum,* W *eine offene Nullumgebung sowie* K *ein abgeschlossener zulässiger Kegel aus* E. *Weiter sei* $G : \Omega \times (\overline{W} \cap K) \to K$ *ein zufälliger kompakter Operator. Es seien die beiden folgenden Bedingungen erfüllt:*

(1) Für alle $w \in \Omega$ *sei* $G(w,x) \neq \beta x \quad (x \in \partial W \cap K, \beta > 1)$

(2) Es existiere eine Nullumgebung $V \subset W$ *und eine meßbare Abbildung* $y : \Omega \to E$ *mit* $y(w) \in K \setminus \overline{V}$ *derart, daß für alle* $w \in \Omega$ *stets* $\beta x + (1 - \beta)y(w) \neq G(w,x)$ $(x \in \partial V \cap K, \beta \geq 1)$ *gilt.*

Dann hat G *einen zufälligen Fixpunkt* $x_0 : \Omega \to W \cap K$ *mit* $x_0(w) \neq 0$ *für jedes* $w \in \Omega$.

Beweis: Sei $F(w,x) = y(w)$ $(x \in \overline{V} \cap K,\ w \in \Omega)$ und $H(w,x,t) = tG(w,x) + (1 - t)F(w,x)$ $(w \in \Omega,\ x \in \overline{V} \cap K,\ t \in [0,1])$. Dann folgt aus (2) die Relation $x \neq H(w,x,t)$ $(w \in \Omega,\ x \in \partial V \cap K,\ t \in [0,1])$ und es gilt $F \overset{\partial V \cap K}{\sim} G$. F hat wegen $F(w,x) \notin \overline{V}$ $(w \in \Omega,\ x \in \overline{V} \cap K)$ auf $\overline{V} \cap K$ keinen zufälligen Fixpunkt. Nach Satz 4 existiert ein kompakter zufälliger Operator $G_1 : \Omega \times (\overline{V} \cap K) \to K$ ohne zufälligen Fixpunkt mit $G_1(w,x) = G(w,x)$ $(x \in \partial V \cap K,\ w \in \Omega)$. Dann muß aber $G|\Omega \times [(W \setminus V) \cap K]$ einen zufälligen Fixpunkt $x_0 : \Omega \to (\overline{W \setminus V}) \cap K$ besitzen, denn sonst wäre durch

$$T(w,x) = \begin{cases} G_1(w,x) & (x \in \overline{V} \cap K, \quad w \in \Omega) \\ G(w,x) & (x \in (\overline{W \setminus V}) \cap K,\ w \in \Omega) \end{cases}$$

ein kompakter zufälliger Operator $T : \Omega \times (\overline{W} \cap K) \to K$ erklärt, der keinen zufälligen Fixpunkt hat.

Jedoch gilt wegen $T(w,x) = G(w,x)$ $(x \in \partial W \cap K,\ w \in \Omega)$ und (1) auch $T(w,x) \neq \beta x$ $(w \in \Omega,\ x \in \partial W \cap K, \beta > 1)$ und T hat nach Satz 5 doch einen zufälligen Fixpunkt. Damit hat G einen zufälligen Fixpunkt $x_0 : \Omega \to E$ mit $x_0(w) \neq 0$ für alle $w \in \Omega$.

Die Voraussetzungen (1) und (2) von Satz 6 sind schwächer als die bekannten Voraussetzungen von Krasnoselski in einem entsprechenden deterministischen Resultat (s.z. B.[16], S. 154). Wir bemerken, daß für lokalkonvexes E die Zulässigkeit von K stets erfüllt ist und für konvexes W die Voraussetzung (1) z. B. durch die Bedingung $G(\Omega \times (\partial W \cap K)) \subseteq \subseteq \overline{W} \cap K$ gesichert ist (dies gilt natürlich auch für Satz 5).

Am Schluß unserer Arbeit sei E ein separabler Banachraum, W eine offene, konvexe Teilmenge von E (mit o.B.d.A. $0 \in W$) und $F : \Omega \times \overline{W} \to E$ ein kompakter zufälliger Operator. Für die Anwendung von Näherungsverfahren ist es zweckmäßig, neben F eine Folge von kompakten, zufälligen Operatoren $F_n : \Omega \times \overline{W} \to E$ $(n = 1,2,\ldots)$ zu betrachten, die oft finit sein werden und für $n \to \infty$ 'nahe' bei F liegen. Es interessieren Bedingungen, unter denen aus der Existenz und Eindeutigkeit eines zufälligen Fixpunktes x_0 von F die Existenz von zufälligen Fixpunkten x_n von F_n $(n \geq n_0)$ und die Konvergenz von (x_n) gegen x_0 in einem möglichst starkem Sinne folgt. Wir geben im abschließenden Satz 7 als erneute Anwendung von Satz 4 hinreichende Bedingungen dafür an, daß diese Konvergenz sogar gleichmäßig erfolgt.
Um die Eindeutigkeit des zufälligen Fixpunktes von F zu sichern, verwenden wir ein Resultat von Smith und Stuart [15] und fordern:
"Für jedes $w \in \Omega$ sei die Abbildung $F(w,\cdot)$ stetig Frechet--differenzierbar in W und die Mengen

(S) $\{x \in W : 1 \text{ ist Eigenwert von } F'(w,\cdot)(x)\}$

haben für jedes $w \in \Omega$ keinen Häufungspunkt in W."
Dann gilt:

Satz 7. *Sei* Dim (E) > 1 *und* Ω *zusätzlich ein kompakter topologischer Raum. Der kompakte zufällige Operator* $F : \Omega \times \overline{W} \to \overline{W}$ *sei gleichmäßig stetig bezüglich* $(w,x) \in \Omega \times \overline{W}$ *und es gelte* $F(w,x) \neq x$ $(x \in \partial W,\ w \in \Omega)$. *Gilt die Bedingung (S) und konvergieren die kompakten zufälligen Operatoren* $F_n : \Omega \times \overline{W} \to E$ *gleichmäßig bezüglich* $w \in \Omega$ *und* $x \in \overline{W}$ *gegen* F, *so haben* F *genau einen zufälligen Fixpunkt* $x_0 : \Omega \to \overline{W}$ *und alle* F_n $(n \geq n_0)$ *einen zufälligen Fixpunkt*

$x_n : \Omega \to \overline{W}$ *und für jede Folge* (x_n) *von zufälligen Fixpunkten von* F_n *gilt die gleichmäßige Konvergenz*

$$\sup_{w\in\Omega} \|x_n(w) - x_0(w)\| \to 0.$$

Beweis: Nach Smith und Stuart [15] hat für jedes $w \in \Omega$ die Abbildung $F(w,\cdot)$ genau einen Fixpunkt. Aus dem Beweis von Satz 1 erkennt man sofort, daß dann F genau einen zufälligen Fixpunkt $x_0 : \Omega \to \overline{W}$ hat.
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir zeigen, daß ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so daß alle F_n $(n \geq n_0)$ einen zufälligen Fixpunkt $x_n : \Omega \to \overline{W}$ haben und für diese $\|x_n(w) - x_0(w)\| < \varepsilon$ für alle $w \in \Omega$ und $n \geq n_0$ gilt. Sei dazu $M(w) := \{x \in \overline{W} : \|x - x_0(w)\| \geq \varepsilon\}$ $(w \in \Omega)$. $M(w)$ ist für jedes $w \in \Omega$ abgeschlossen und es gilt $x \neq F(w,x)$ $(w \in \Omega,\ x \in M(w))$. Wegen der Kompaktheit von $F(w,\cdot)$ und der Abgeschlossenheit von $M(w)$ ist für jedes $w \in \Omega$ die Menge $\{z \in E : z = x - F(w,x),\ x \in M(w)\}$ abgeschlossen. Wegen $0 \neq x - F(w,x)$ $(w \in \Omega,\ x \in M(w))$ gilt $\rho(w) := \inf\{\|x - F(w,x)\|,\ x \in M(w)\} > 0$ für jedes $w \in \Omega$. Aus der gleichmäßigen Stetigkeit von F folgt leicht die Stetigkeit von $\rho : \Omega \to \mathbb{R}^+$. Da Ω kompakt ist, hat ρ ein Minimum.
Sei $\delta_0 := \min_{w\in\Omega} \rho(w)$. Weiterhin gilt nach Voraussetzung $x \neq F(w,x)$ für alle $x \in \partial W$ und alle $w \in \Omega$. Mit analogen Überlegungen wie soeben ergibt sich die Existenz eines $\delta_1 > 0$ derart, daß $\|x - F(w,x)\| > \delta_1$ $(x \in \partial W,\ w \in \Omega)$ gilt.
Wir setzen $\delta := \min\{\delta_0, \delta_1\}$ und wählen ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, daß für alle $n \geq n_0$ stets $\|F_n(w,x) - F(w,x)\| < \delta$ $(w \in \Omega,\ x \in \overline{W})$ gilt.
Sei

$$H(w,x,t) := (1 - t)F(w,x) + tF_n(w,x)$$
$$(w \in \Omega,\ x \in \overline{W},\ t \in [0,1],\ n \geq n_0).$$

Dann gilt $x \neq H(w,x,t)$ für alle $w \in \Omega$, $x \in \partial W$ und $t \in [0,1]$. Sonst würde ein $w' \in \Omega$, $x' \in \partial W$, $t' \in [0,1]$ existieren mit

$$x' = (1 - t')F(w',x') + t'F_n(w',x'),$$

woraus $\|x' - F(w',x')\| < \delta$ folgen würde. Dies würde $\|x - F(w,x)\| > \delta_1 (x \in \partial W,\ w \in \Omega)$ widersprechen. Somit sind F und F_n $(n \geq n_0)$ homotop auf $\overline{W}$. Dann hat F_n $(n \geq n_0)$ auf $\overline{W}$ einen zufälligen Fixpunkt, denn sonst würde nach Satz 4 ein kompakter zufälliger Operator $G_1 : \Omega \times \overline{W} \to E$ ohne zufälligen Fixpunkt existieren, für den $G_1(w,x) = F(w,x)$ $(w \in \Omega,\ x \in \partial W)$ gilt. Wegen $F(w,x) \in \overline{W}$ $(w \in \Omega,\ x \in \overline{W})$ gilt $G_1(\Omega \times \partial W) \subseteq \overline{W}$ und das impliziert mit der Konvexität von W die Bedingung $G_1(w,x) \neq \beta x$ $(\beta > 1,\ x \in \partial W)$ für alle $w \in \Omega$. Dann müßte aber nach Satz 3 (mit $K = E$) G_1 doch einen zufälligen Fixpunkt haben.

Sei nun für jedes $n \geq n_0$ ein zufälliger Fixpunkt $x_n : \Omega \to \overline{W}$ von F_n gewählt.

Angenomen, es gilt für ein $w_0 \in \Omega$ und ein $n \geq n_0$ die Beziehung $\|x_n(w_0) - x_0(w_0)\| \geq \varepsilon$. Dann ist $\overline{x} := x_n(w_0) \in M(w_0)$ und es gilt daher $\|\overline{x} - F(w_0,\overline{x})\| \geq \rho(w_0) > \delta_0 \geq \delta$. Wegen $\overline{x} = F_n(w_0,\overline{x})$ gilt andererseits $\|\overline{x} - F(w_0,\overline{x})\| < \delta$. Dieser Widerspruch zeigt die Gültigkeit von $\|x_n(w) - x_0(w)\| < \varepsilon$ für alle $w \in \Omega$ und alle $n \geq n_0$ und die gleichmäßige Konvergenz von (x_n) gegen x_0 ist gezeigt.

Bemerkung: Statt (S) kann natürlich gefordert werden, daß F höchstens einen zufälligen Fixpunkt hat. Aus der Bemerkung nach Satz 1 folgt dann, daß jedes $F(w,\cdot)$ genau einen Fixpunkt besitzt $(w \in \Omega)$. (Die Existenz ist wegen $F(\Omega \times \overline{W}) \subseteq \overline{W}$ gesichert).

LITERATUR

[1] **Bharucha-Reid, A.T.:** *Random Integral Equations. Academic Press, New York, 1972.*

[2] **Bharucha-Reid, A.T.:** *Fixed point theorems in probabilistic analysis, Bull. Amer. Math. Soc., 82 (1976), 641 - 657.*

[3] Bocsan, G.: *A general random fixed point theorem and applications to random equations*, Seminarul de teoria functiilor si matematici aplicate, Ser. A, nr. 41 (1979).

[4] Engl, H.W.: *Random fixed point theorems*, Nonlinear Equations in Abstract Spaces (V. Lakshmikantham, ed.), Academic Press, New York, 1978, 67 - 80.

[5] Granas, A.: *The theory of compact vector fields and some of its applications to topology of functional spaces (I)*.

[6] Hadžić, O.: *On the admissibility of topological vector spaces*, Acta Sci. Math., 42 (1980), 81 - 85.

[7] Hahn, S.: *Ein elementarer Zugang zur Leray-Schauder-Theorie*, Comm. Math. Univ Carolinae, 19 (1978), 71 - 87.

[8] Hanš, O.: *Random fixed point theorems*, Trans. First Prague Conf. on Information Theory, Statist., Decision Funct. and Random Processes 1956, Prague, 1957, 105 - 125.

[9] Himmelberg, C.J.: *Measurable relations*, Fundamenta Math., 87 (1975), 53 - 72.

[10] Jerofsky, Th.: *Zur Fixpunkttheorie mengenwertiger Abbildungen*, Dissertation TU Dresden, 1983.

[11] Krauthausen, C.: *Der Fixpunktsatz von Schauder in nicht notwending konvexen Räumen sowie Anwendungen auf Hammersteinsche Gleichungen*, Dissertation RWTH Aachen, 1976.

[12] Kuratowski, K., Ryll-Nardzewski, C.: *A general theorem on selectors*, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys., 13 (1965), 397 - 403.

[13] Nowak, A.: *Random solutions of equations*, Trans. Eighth Prague Conf. on Information Theory, Statist. Decision Funct. and Random Processes 1978, Vol. 8, Prague 1978, 77 - 82.

[14] Römisch, W.: *On the approximate solution of random operator equations*, Humboldt-Universität zu Berlin, Sektion Mathematik, Preprint Nr. 5, 1980.

[15] Smith, H.L., Stuart, C.A.: *A uniqueness theorem for fixed points*, Proc. Amer. Math. Soc., 79, 2 (1980), 237 - 240.

[16] Zeidler, E.: *Vorlesungen über nichtlineare Funktionalanalysis I, Fixpunktsätze, Teubner-Texte zur Mathematik, Teubner Leipzig, 1976.*

REZIME

O STOHASTIČKIM NEPOKRETNIM TAČKAMA
NEPREKIDNIH STOHASTIČKIH OPERATORA
U METRIČKIM VEKTORSKIM PROSTORIMA

U ovom radu je dokazan stav o homotopijskom proširenju za stohastičke operatore. On je uopštenje odgovarajućeg determinističkog rezultata iz [1] i omogućava izvodjenje raznih teorema o nepokretnoj tački za stohastičke operatore bez korišćenja odgovarajućih determinističkih rezultata.

Received by the editors March 26, 1986.