ZBORNIK RADOVA
Prirodno-matematičkog fakulteta
Univerziteta u Novom Sadu
Serija za matematiku, 16, 1(1986)

REVIEW OF RESEARCH
Faculty of Science
University of Novi Sad
Mathematics Series, 16, 1(1986)

LN-к- И RN-к-ПОЛУСЕТИ

Янез Ушан

Институт за математику Универзитета у Новом
Саду, 21000 Нови Сад, др Илије Ђуричића 4,
Југославија

РЕЗЮМЕ

к-Полусети, описанные автором в [1], являются одним из обобщений к-сетей [2-3]. к-Полусети весьма тесно связаны со специальными ортогональными системами частичных квазигрупп [1], со специальными кодами [12-16], с аффинными пространствами Спернера [6-7] и с r-дизайнами [17]. В [4] получена характеризация к-полусетей $(\mathfrak{T},\{L_1,\dots,L_к\})$ с помощью объектов типа $(\mathfrak{T},\mathfrak{L},\|)$, где $\mathfrak{T} \neq \emptyset$, $\mathfrak{L} \subseteq P(\mathfrak{T}) \setminus \{\emptyset\}$, $\| \subseteq \mathfrak{L}^2$, A$\|$ удовлетворяет "условию евклидовой параллельности". (Подобная проблематика рассматриваетя и в [5].). В настоящей работе обобщаются к-полусети на LN-к-полусети и RN-к-полусети (левые-почти-к-полусети и правые-почти-к-полусети). Справедливо: $(\mathfrak{T},\{L_1,\dots,L_к\})$ является к-полусетью тогда и только тогда, когда $(\mathfrak{T},\{L_1,\dots,L_к\})$ является сразу LN- и RN-к-полусетью. Существуют LN-к-полусети $(\mathfrak{T},\{L_1,\dots,L_к\})$, имеющие носитель $(\mathfrak{T},\mathfrak{L})$,

$$\mathfrak{L} = \bigcup_{i=1}^{k} L_i,$$

недопустимый для к-полусетей. Так же существуют RN-к-полусети, имеющие носитель $(\mathfrak{T},\mathfrak{L})$,

$$\mathfrak{L} = \bigcup_{i=1}^{k} L ,$$

недопустимый для LN-к-полусетей. Носитель каждой LN-k-полусети является L-геометрией (примечание 8) [8]. Однако, существуют RN-к-полусети, носитель, которых не является L-геометрией. Любую

AMS Mathematics Subject Classification (1980): 20N05.

Key words and phrases: LN-k-seminets, RN-k-seminets, k-seminets, L-geometry, A_t-, A_t^m-quasigroups.

конечную LN-к-полусеть, в которой каждая прямая имеет по меньшей мере три точки и любые две различные точки являются колинеарными, можно координатизировать с помощью одной A_t-квазигруппы [8]. Получается характеризация LN-к-полусетей $(\mathfrak{T}, \{L_1, \dots, L_к\})$ с помощью объектов типа $(\mathfrak{T}, \mathcal{L}, \parallel)$, где $\mathfrak{T} \neq \emptyset$, $\mathcal{L} \subseteq P(\mathfrak{T}) \setminus \{\emptyset\}$, $\parallel \subseteq \mathcal{L}^2$, A$\parallel$ удовлетворяет условию: для каждой $A \in \mathfrak{T}$ и каждой $p \in \mathcal{L}$ существует не больше, чем одна $p' \in \mathcal{L}$ такая, что $p' \parallel p$ и $A \in p'$.

* * *

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $\mathfrak{T}$ непустое множество, элементы которого назовем точки и пусть $\mathcal{L}$ непустое множество некоторых непустых подмножеств множества $\mathfrak{T}$, элементы которого назовем линии (или прямые). Пусть множества $L_1, \dots, L_к$, $к \in N \setminus \{1,2\}$, разбивают множество $\mathcal{L}$. Объект $(\mathfrak{T}, \{L_1, \dots, L_к\})$ назовем LN-к-полусетью тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

<u>M1</u> Пересечение каждых двух прямых, принадлежаших различным классам L_i, L_j, $i, j \in \{1, \dots, к\}$, является одноэлементным множеством или пустым множеством[1];

<u>LM2₁</u> Каждая точка из $\mathfrak{T}$ находится не больше чем в одной прямой каждого класса L_i, $i \in \{1, \dots, к\}$; и

<u>M2₂</u> Каждая точка из $\mathfrak{T}$ находится по меньше мере в одной прямой.

Объект $(\mathfrak{T}, \mathcal{L})$, где $\mathcal{L} = \bigcup_{i=1}^{к} L_i$, назовем носителем LN-к-полусети $(\mathfrak{T}, \{L_1, \dots, L_к\})$.

ПРИМЕЧАНИЕ 1. Если в определении 1 вместо $LM2_1$ и $M2_2$ берется

<u>M2</u> Каждая точка из $\mathfrak{T}$ находится в одной и только в одной прямой каждого класса L_i, $i \in \{1, \dots, к\}$;

---

[1] Удобнее: две прямые различных классов пересекаются не больше, чем в одно точке.

то $(\mathfrak{T}, \{L_1, \dots, L_k\})$ станет к-полусетью [1][1]. Если, кроме того, вместо M1 берется

<u>M1'</u> Пересечение каждых двух прямых, принадлежащих различным классам L_i, L_j, $i, j \in \{1, \dots, к\}$, является одноэлементным множеством[2];

то $(\mathfrak{T}, \{L_1, \dots, L_к\})$ станет к-сетью [2 - 3]. Непосредственно находим, что имеют место импликации:

$$M2 \Rightarrow LM2_1 \wedge M2_2 \quad \text{и} \quad M1' \Rightarrow M1.$$

Отсюда получаем, что каждая к-сеть является к-полусетью и каждая к-полусеть является LN-к-полусетью.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. В LN-к-полусетях $(\mathfrak{T}, \{L_1, \dots, L_к\})$ прямые, принадлежащие одному и тому же классу L_i, $i \in \{1, \dots$ $\dots, к\}$, не пересекаются.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение является следствием аксиомы $LM2_1$. Именно предположение, что существуют различные прямые, принадлежащие одному и тому же классу, имеющиеся непустое пересечение, противечит условию $LM2_1$.

Учитывая определение 1_L, примечание 1 и факт, что в к-полусетях $(\mathfrak{T}, \{L_1, \dots, L_к\})$ справедливо $|L_i| \geq 2$ для каждого $i \in \{1, \dots, к\}$, находим, что имеет место следующее утверждение:

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть $(\mathfrak{T}, \{L_1, \dots, L_к\})$ к-полусеть. Пусть, далее, $\bar{L}_i$ и $\bar{L}_{i+1}$ непустые множества такие, что $\bar{L}_i \cup \bar{L}_{i+1} = L_i$ и $\bar{L}_i \cap \bar{L}_{i+1} = \emptyset$. Тогда $(\mathfrak{T}, \{L^{i-1}, \bar{L}_i, \bar{L}_{i+1}, L^k_{i+1}\})$ является LN-(к+1)-полусетью, не удовлетворяющей условию M2 (т.е. не

---

1) к-Полусети введены в [1]. Там же получено, что к-полусети можно координатизировать с помощью одного класса ортогональных систем частичных квазигрупп.

2) Удобнее: две прямые различных классов пересекаются в одной и только в одной точке.

являющейся (к+1)-полусетью).

ПРИМЕЧАНИЕ 2.

2_1. Для каждой LN-t-полусети, полученной способом из утверждения 2 будем сказать, что она является декомпозитом к-полусети.

2_2. В частности, объект $(\mathfrak{C},\{\{\ell_1\},\ldots,\{\ell_t\}\})$, где $\mathfrak{L} = \{\ell_i \mid i \in \{1,\ldots,t\}\}$, $|\mathfrak{L}| = t \in N \setminus \{1,2\}$, и где имеет место импликация $i \neq j \Rightarrow |\ell_i \cap \ell_j| \leq 1$ для любых $i,j \in \{1,\ldots,t\}$ и справедливо $M2_2$, является LN-t-полусетью. Удобнее ее назвать тривиальной. Таким образом, каждую конечную проективную плоскость $(\mathfrak{C},\mathfrak{L})$, $|\mathfrak{L}| = t$, можно считать носителем одной тривиальной LN-t-полусети.

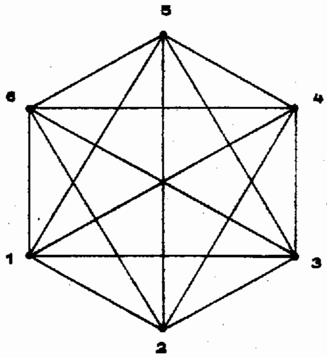

Рис. 1.

Пусть $\mathfrak{C} = \{1,2,3,4,5,6\}$, и пусть $\mathfrak{L} = \{p_i \mid i \in \{1,\ldots,15\}\}$, где множества p_i, $i \in \{1,\ldots,15\}$, определены следующим образом:

$p_1 = \{1,2\}$, $p_2 = \{3,6\}$,
$p_3 = \{4,5\}$, $p_4 = \{1,6\}$,
$p_5 = \{2,5\}$, $p_6 = \{3,4\}$,
$p_7 = \{2,3\}$, $p_8 = \{1,4\}$,
$p_9 = \{5,6\}$, $p_{10} = \{1,5\}$,
$p_{11} = \{2,4\}$, $p_{12} = \{3,5\}$,
$p_{13} = \{2,6\}$, $p_{14} = \{1,3\}$,
$p_{15} = \{4,6\}$;

см. и рис. 1.

В [5] доказано, что для каждого разбиения $\{L_1,\ldots,L_k\}$ только что описанного множества, объект $(\mathfrak{C},\{L_1,\ldots,L_k\})$ не является к-полусетью. Однако, множество $\{L_1,\ldots,L_6\}$, где

$L_1 = \{p_1, p_2, p_3\}$, $L_2 = \{p_4, p_5, p_6\}$,
$L_3 = \{p_7, p_8, p_9\}$, $L_4 = \{p_{10}, p_{11}\}$,
$L_5 = \{p_{12}, p_{13}\}$, $L_6 = \{p_{14}, p_{15}\}$,

является таким разбиением множества $\mathcal{L}$, что объект $(\mathfrak{T},\{L_1,\dots,L_6\})$ является LN-6-полусетью. Отсюда получаем, что имеет место следующее утверждение:

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Существуют множества $\mathfrak{T}$ и $\mathcal{L} \subseteq P(\mathfrak{T}) \setminus \{\emptyset\}$ такие, что имеет место:

а) существует разбиение $\{L_1,\dots,L_k\}$ множества $\mathcal{L}$ такое, что объект $(\mathfrak{T},\{L_1,\dots,L_k\})$ является нетривиальной LN-к-полусети; и (сразу)

б) для каждого разбиения $\{L_1,\dots,L_k\}$ множества объект $(\mathfrak{T},\{L_1,\dots,L_k\})$ не является к-полусетью.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ $1'_L$. Носитель $(\mathfrak{T},\mathcal{L})$ LN-k-полусети $(\mathfrak{T},\{L_1,\dots,L_k\})$ назовем s-допустимым тогда и только тогда, когда существует разбиение $\{\bar{L}_1,\dots,\bar{L}_k\}$ множества $\mathcal{L}$ $(=\bigcup_{i=1}^{k} L_i)$ такое, что объект $(\mathfrak{T},\{\bar{L}_1,\dots,\bar{L}_k\})$ является t-полусетью. В противоположном случае скажем, что LN-к-полусеть $(\mathfrak{T},\{L_1,\dots,L_k\})$ имеет s-недопустимый носитель.

ПРИМЕЧАНИЕ 3. Описанная LN-6-полусеть имеет s-недопустимый носитель. Конечная проективная плоскость $(\mathfrak{T},\mathcal{L})$, $|\mathcal{L}| = t$, является s-недопустимым носителем тривиальной LN-t-полусети $(\mathfrak{T},\{\{\ell\}\mid \ell \in \mathcal{L}\})$. Однако, каждый декомпозит к-полусети, ясно, имеет s-допустимый носитель.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ $1''_L$. LN-к-полусеть $(\mathfrak{T},\{L_1,\dots,L_k\})$ назовем ℓ-LN-к-полусетью, $\ell \in N$, тогда и только тогда, когда имеет место:

<u>$M2'_2$</u> каждая точка из $\mathfrak{T}$ находится в ℓ и только в ℓ прямых.

Описанная LN-6-полусеть является 5-LN-6-полусетью.

Учитывая определение к-полусети (примечание 1) как и определения 1_L, $1'_L$, $1''_L$, находим, что имеет место следующее утверждение

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Если LN-к-полусеть не является ℓ-LN-к-полусетью, то она имеет s-недопустимый носитель.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Если объект $(\mathfrak{T},\{L_1,\dots,L_к\})$ является ℓ-LN-к-полусетью, тогда $\ell \le к$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение является следствием аксиомы $LM2_1$ и $M2_2'$. Именно, так как через каждую точку проходит в точности ℓ прямых ($M2_2'$), предположение, что $\ell > к$ влечет в контрадикцию с $LM2_1$.

Подобными рассуждениями доказывается и следующее утверждение:

УТВЕРЖДЕНИЕ 5'. Если объект $(\mathfrak{T},\{L_1,\dots,L_к\})$ является LN-к-полусетью и $\ell(A)$ является числом прямых, проходящих через точку A, тогда $\ell(A) \le к$ для каждой точки $A \in \mathfrak{T}$.

ТЕОРЕМА 6. ℓ-LN-к-полусеть $(\mathfrak{T},\{L_1,\dots,L_к\})$ является к-полусетью тогда и только тогда, когда $\ell = к$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

а) $\Rightarrow$

Утверждение в этом направлении является непосредственным следствием определения к-полусети (примечание 1) и определения 1_L.

б) $\Leftarrow$

Если $\ell = к$, то, на основании $M2_2'$, через каждую точку проходит в точности к прямых. Отсюда, ввиду $LM2_1$, заключаем, что в $(\mathfrak{T},\{L_1,\dots,L_к\})$ имеет место M2. Именно, так как через каждую точку проходит в точности к прямых, то из предположения, что существует точка $A \in \mathfrak{T}$ не принадлежащая ни одной прямой некоторого класса L_i, заключаем, что существуют прямые $\ell_j \ne \ell_j'$, принадлежащие одному и тому же классу $L_j \ne L_i$ такие, что $\ell_j \cap \ell_j' = \{A\}$. Так как это влечет в контрадикцию с $LM2_1$, заключаем, что утверждение доказано и в направлении $\Leftarrow$.

Учитывая теорему 6 и примечание 1, находим, что имеет место и следующее утверждение:

СЛЕДСТВИЕ 7. ℓ-LN-к-полусеть $(\mathfrak{T},\{L_1,\ldots,L_к\})$ является к-сетью тогда и только тогда, когда ℓ = к и имеет место M1′.

ТЕОРЕМА 8. Если в ℓ-LN-к-полусети $(\mathfrak{T},\{L_1,\ldots,L_к\})$ справедливы M1′ и $\ell <$ к, тогда $(\mathfrak{T},\{L_1,\ldots,L_к\})$ имеет s-недопустимый носитель.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\ell <$ к, в виду теорем 6, заключаем, что в $(\mathfrak{T},\{L_1,\ldots,L_к\})$ не имеет место M2. Для данных множеств $\mathfrak{T}$ и $\mathcal{L} = \bigcup_{i=1}^{k} L_i$, $\ell \in N$ является фиксированным. Далее, на основании M1′ и утверждения 1, находим, что максимальные множества попарно не пересекающихся прямых являются, в точности, множества $L_1,\ldots,L_к$. Отсюда находим, что каждое разбиение множества $\mathcal{L}$, имеющее число классов меньше, чем к, имеет по меньшей мере один класс, в котором существуют пересекающиеся прямые. Утверждение доказано.

На рис. 3 - 5 изображены, в том же порядке, 2-LN-3-полусеть, 2-LN-4-полусеть и 3-LN-5-полусеть, удовлетворяющие условию M1′. Таким образом, имеет место следующее утверждение:

УТВЕРЖДЕНИЕ 9. Существуют ℓ-LN-к-полусети, в которых имеет место M1′ и имеют s-недопустимый носитель.

На рис. 2 изображена LN-3-полусеть, в которой имеет место M1′ и не являющаяся ℓ-LN-3-полусетью. Отсюда, учитывая утверждение 4, находим, что имеет место следующее утверждение:

УТВЕРЖДЕНИЕ 10. Существуют LN-к-полусети, не являющиеся ℓ-LN-к-полусетями, в которых имеет место M1′ и имеют s-недопустимый носитель.

УТВЕРЖДЕНИЕ 11_1. Пусть $(\mathfrak{T},\{L_1,\ldots,L_к\})$ LN-к-полусеть, а $\|$ бинарное отношение в $\mathfrak{L} = L_1 \cup \ldots \cup L_k$, определяемое следующим образом:

(e) $$p \parallel q \overset{\text{деф}}{\Leftrightarrow} p \in L_i \wedge q \in L_j \wedge i = j.$$

Тогда в объекте $(\mathfrak{T}, \mathfrak{L}, \|)$ имеет место:

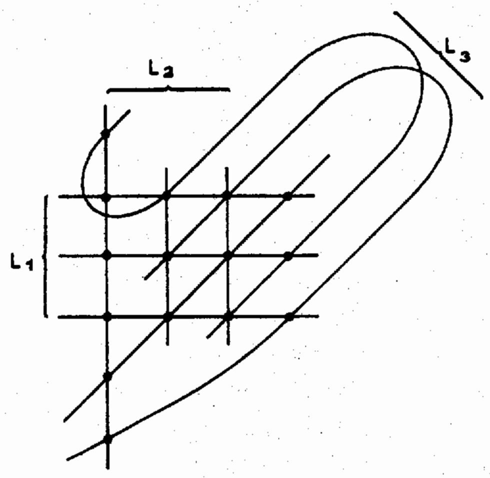

Рис. 2.

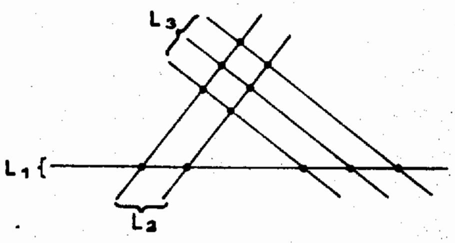

Рис. 3.

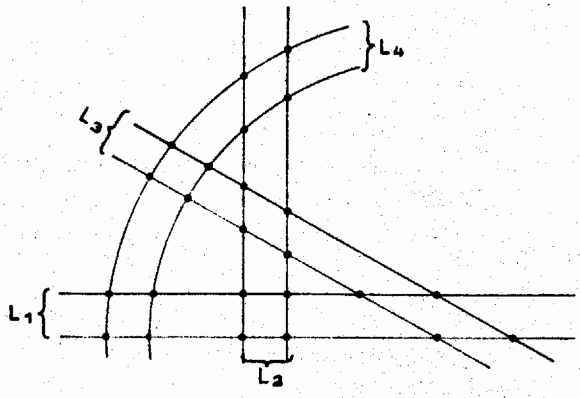

Рис. 4.

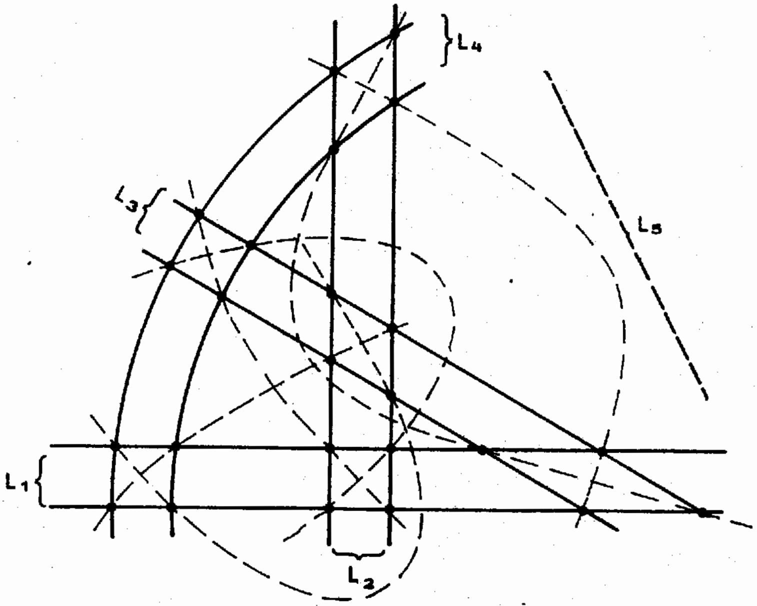

Рис. 5.

ЛП1 каждая точка $A \in \mathfrak{T}$ находится в $\ell(A) \in N$ прямых;

ЛП2 через любые две различные точки проходит не более одной прямой;

ЛП3 $\parallel$ является РСТ отношением в $\mathfrak{L}$;

ЛП4 для каждой $A \in \mathfrak{T}$ и каждой $p \in \mathfrak{L}$ существует не более чем одна $p' \in \mathfrak{L}$ такая, что имеет место

$$A \in p' \wedge p' \parallel p;$$

и

ЛП5 $$|\mathfrak{L}/\parallel| = k \in N \setminus \{1,2\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. ЛП1 является следствием аксиомы $M2_2$, утверждения 5′ и факта, что $к \in N$. ЛП2 является следствием аксиомы M1 и утверждения 1. ЛП3 является следствием определения (в) и факта, что $\{L_1,\dots,L_k\}$ является разбиением множества $\mathcal{L}$. ЛП4 является следствием амксиомы $LM2_1$ и определения (в). ЛП5 является следствием определения (в) и факта, что $к \in N \setminus \{1,2\}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 11_2. Пусть $\mathfrak{T}$ непустое множество, элементы которого назовем точками и пусть $\mathcal{L}$ непустое множество некоторых непустых подмножеств множества $\mathfrak{T}$, элементы которого назовем линии (или прямые). Пусть, далее, $\|$ бинарное отношение в $\mathcal{L}$. Тогда, если в объекте $(\mathfrak{T},\mathcal{L},\|)$ выполняются условия ЛП1 - ЛП5 (из утверждения 11_1), тогда объект $(\mathfrak{T},\{L_1,\dots,L_к\})$, где $\{L_1,\dots,L_к\} = \mathcal{L}/\|$, является LN-к-полусетью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1) На основании ЛП3 - ЛП5 находим, что прямые, принадлежащие одному и тому же классу L_i, $i \in \{1,\dots,k\}$, попарно не пересекаются;

2) Учитывая ЛП2 и 1), находим, что в $(\mathfrak{T},\{L_1,\dots,L_к\})$ имеет место M1;

3) Учитывая 1) и ЛП4, находим, что в $(\mathfrak{T},\{L_1,\dots,L_к\})$ имеет место $LM2_1$; и

4) Учитывая ЛП1, находим, что в $(\mathfrak{T},\{L_1,\dots,L_к\})$ имеет место $M2_2$.

ПРИМЕЧАНИЕ 4. Ввиду утверждений 11_1 и 11_2, имеет смысл объект $(\mathfrak{T},\mathcal{L},\|)$, удовлетворяющий условиям ЛП1 - ЛП5, считать LN-k-полусетью. Отношение $\|$ назовем отношением параллельности (или: параллельностью).

ТЕОРЕМА 12.. Если объект $(\mathfrak{T},\mathcal{L},\|)$ является LN-k-полусетью, $к = |\mathcal{L}/\||$, $к \in N \setminus \{1,2\}$ [1], тогда эквивалентны следующие высказания:

---

[1] См. Примечание 4.

ЛП1′ $(\forall A \in \mathfrak{T})\ell(A) = \kappa$; и

ЛП4′ $(\forall A \in \mathfrak{T})(\forall p \in \mathfrak{L})(\exists! p' \in \mathfrak{L})(p' \parallel p \wedge A \in p')$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

а) $\Rightarrow$

Пусть в $(\mathfrak{T},\mathfrak{L},\parallel)$ имеет место ЛП1′. Учитывая утверждение 11_2 и теорему 6, находим, что $(\mathfrak{T},\{L_1,\ldots,L_\kappa\})$, где $\{L_1,\ldots,L_\kappa\} = \mathfrak{L}/\parallel$, является к-полусетью. Отсюда, учитывая M2, утверждение 1 и равенство $\mathfrak{L}/\parallel = \{L_1,\ldots,L_\kappa\}$, находим, что в $(\mathfrak{T},\mathfrak{L},\parallel)$ имеет место ЛП4′.

б) $\Leftarrow$

Пусть в $(\mathfrak{T},\mathfrak{L},\parallel)$ имеет место ЛП4′. Учитывая утверждение 11_2, находим, что $(\mathfrak{T},\{L_1,\ldots,L_\kappa\})$, где $\{L_1,\ldots,L_\kappa\} = \mathfrak{L}/\parallel$, является LN-к-полусетью. Так как предположение $(\exists A \in \mathfrak{T})\ell(A) < \kappa$ противоречит условию ЛП4′, находим что имеет место условие ЛП1′.

ПРИМЕЧАНИЕ 5. В [4] к-полусети $(\mathfrak{T},\{L_1,\ldots,L_\kappa\})$ рассматриваются как объекты $(\mathfrak{T},\mathfrak{L},\parallel)$. На основании теоремы 6 и 12, учитывая примечание 4, находим, что объект $(\mathfrak{T},\mathfrak{L},\parallel)$, где $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{L}$ и $\parallel$ имеют значение из утверждения 11_2, имеет смысл считать к-полусетью тогда и только тогда, когда выполняются условия:

1° ЛП1′, ЛП2 - ЛП5;

или

2° ЛП1 - ЛП3, ЛП4′ и ЛП5.

*****

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1_R. Пусть $\mathfrak{T}$ непустое множество, элементы которого назовем точками и пусть $\mathfrak{L}$ непустое множество некоторых непустых подмножеств множества $\mathfrak{T}$, элементы которого назовем линиями. Пусть множества $L_1,\ldots,L_\kappa$, $\kappa \in N \setminus \{1,2\}$, разбывают множество $\mathfrak{L}$. Объект $(\mathfrak{T},\{L_1,\ldots,L_\kappa\})$ назовем RN-к-полусетью тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

<u>M1</u> Пересечение каждых двух линий, принадлежащих различ-

ным классам L_i, L_j, $i,j \in \{1,\dots,к\}$, является одноэлементным множеством или пустым множеством[1];

<u>RM2₁</u> Каждая точка из $\mathfrak{T}$ находится по меньшей мере в одной линии каждого класса L_i, $i \in \{1,\dots,k\}$[2].

Объект $(\mathfrak{T},\mathfrak{L})$, где $\mathfrak{L} = \bigcup_{i=1}^{k} L_i$, назовем <u>носителем</u> RN-к-полусети $(\mathfrak{T},\{L_1,\dots,L_к\})$.

Непосредственным следствием аксиомы $RM2_1$ является:

<u>M2₂</u> Каждая точка из $\mathfrak{T}$ находится по меньшей мере в одной линии.

Учитывая определение 1_L, определение 1_R и определение к-полусети[3], находим, что имеет место следующее утверждение:

УТВЕРЖДЕНИЕ 13. Пусть множества $\mathfrak{T}, L_1,\dots,L_к$ имеют значения из определений 1_L и 1_R. Тогда объект $(\mathfrak{T},\{L_1,\dots,L_к\})$ является к-полусетью если и только, если $(\mathfrak{T},\{L_1,\dots,L_к\})$ является LN- и RN-к-полусетью.

УТВЕРЖДЕНИЕ 14. RN-к-полусеть $(\mathfrak{T},\{L_1,\dots,L_к\})$ является к-полусетью тогда и только тогда, когда имеет место

(o) $$(\forall i \in \{1,\dots,к\})(\forall j \in \{1,\dots,к\})(\forall p \in L_i)(\forall p' \in L_j)$$
$$(p \neq p' \wedge i = j \Rightarrow p \cap p' = \emptyset)$$[4].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

а) $\Rightarrow$

Так как каждая к-полусеть является LN-к-полусетью, то, на основании утверждения 1, имеет место (o).

---

1) См. определение 1_L.

2) $(\forall A \in \mathfrak{T})(\exists p_1 \in L_1)\dots(\exists p_к \in L_к)(A \in p_1 \wedge \dots \wedge A \in p_к)$

3) См. Примечание 1.

4) Пересечение каждых двух различных линий, принадлежащих одному и тому же классу является пустым множеством.

б) $\Leftarrow$

Пусть в RN-к-полусети $(\mathfrak{T},\{L_1,\ldots,L_к\})$ имеет место (о). Через каждую точку проходит по меньшей мере одна линия из каждого класса L_i, $i \in \{1,\ldots,к\}$ ($RM2_1$). Отсюда, учитывая (о), находим, что в $(\mathfrak{T},\{L_1,\ldots,L_к\})$ имеет место M2, т.е. что $(\mathfrak{T},\{L_1,\ldots,L_к\})$ является к-полусетью.

Учитывая M2 (примечание 1) и определение 1_R, находим, что имеет место и следующее утверждение:

УТВЕРЖДЕНИЕ 15. Пусть $(\mathfrak{T},\{L_1,\ldots,L_к\})$ к-полусеть и $к \geq 4$. Тогда $(\mathfrak{T},\{L_1^{i-1},L_i \cup L_{i+1},L_{i+2}^{k}\})$ является RN-(к-1)-полусетью не удовлетворяющей условию M2 (т.е. не являющейся (к-1)-полусетью).[1]

ПРИМЕЧАНИЕ 7. Для каждой RN-t-полусети, полученой способом из утверждения 15, скажем, что она является композитом к-полусети. 5-LN-6-полусеть, носитель которой изображен на рис. 1 имеет s-недопустимый носитель. В этой 5-LN-6-полусети имеет место: $|L_1| = |L_2| = |L_3| = 3$, $|L_4| = |L_5| = |L_6| = 2$, через каждую точку проходит одна и только одна линия из каждого класса L_i, $i \in \{1,2,3\}$, и через каждую точку проходят в точности две линии, принадлежащие множеству $\bar{L}_4 = L_4 \cup L_5 \cup L_6$. Так как $\{L_1,L_2,L_3,\bar{L}_4\}$ также является разбиением множества $\mathfrak{L}$, отсюда получаем, что $(\mathfrak{T},\{L_1,L_2,L_3,\bar{L}_4\})$ является RN-4-полусетью, не удовлетворяющей условию $LM2_1$. (В таких случаях позволим себе сказать, что речь идет о композите LN-к-полусети со s-недопустимым носителем.)

На рис. 6 изображено одно из разбиений множества $\mathfrak{L}$, где $|\mathfrak{L}| = 16$ и $|\mathfrak{T}| = 16$. Объект $(\mathfrak{T},\{L_1,L_2,L_3,L_4\})$ не является 4-сетью, так как существуют линии $p \in L_3$ и $q \in L_4$, пересекающиеся в двух различных точках. Заметим, что объекты $(\mathfrak{T},\{L_1,L_2,L_3,\})$ и $(\mathfrak{T},\{L_1,L_2,L_4\})$ являются 3-сетями. Так как множество $\{L_1,L_2,L_3 \cup L_4\}$ также является разбиением множества $\mathfrak{L}$, отсюда находим,

[1] См. утверждение 2.

что объект $(\mathfrak{T},\{L_1,L_2,L_3 \cup L_4\})$ является RN-3-полусетью. Далее, учитывая факт, что носитель этой RN-3-полусети не является носителем ни одной LN-к-полусети (ввиду M1 и утверждения 1)[1], находим, что имеет место следующее утверждение:

УТВЕРЖДЕНИЕ 16. Существуют множества $\mathfrak{T}$ и $\mathfrak{L} \subseteq P(\mathfrak{T}) \setminus \{\emptyset\}$ такие, что имеет место:

а) существует разбиение $\{L_1,\ldots,L_k\}$ множества $\mathfrak{L}$ такое, что объект $(\mathfrak{T},\{L_1,\ldots,L_k\})$ является RN-к-полусетью; и

б) не существует разбиение $\{\bar{L}_1,\ldots,\bar{L}_{\bar{k}}\}$ множества $\mathfrak{L}$ такое, что объект $(\mathfrak{T},\{\bar{L}_1,\ldots,\bar{L}_{\bar{k}}\})$ является LN-$\bar{k}$-полусетью.

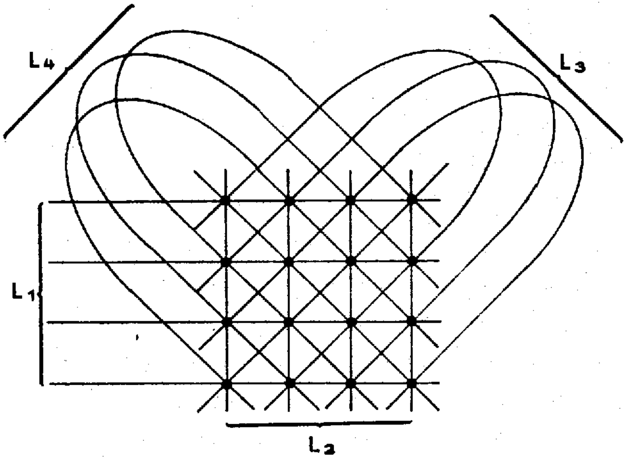

Рис. 6.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ $1'_R$. Носитель $(\mathfrak{T}\ \mathfrak{L})$ RN-к-полусети $(\mathfrak{T},\{L_1,\ldots,L_k\})$ назовем LS-допустимым (s-допустимым) тогда и

[1] Заметим, что кроме этого, имеет место: через каждые три попарно различные точки проходит не более одной линии.

только тогда, когда существует разбиение $\{\bar{L}_1,\dots,\bar{L}_t\}$ множества $\mathcal{L}$ (= $\bigcup_{i=1}^{k} L_i$) такое, что объект $(\mathfrak{C},\{\bar{L}_1,\dots,\bar{L}_t\})$ является LN-t-полусетью (t-полусетью). В противоположеном случае скажем, что RN-к-полусеть $(\mathfrak{C},\{L_1,\dots,L_к\})$ имеет LS-недопустимый (s-недопустимый) носитель.

На рис. 7 изображено одно из разбиений $\{L_1,L_2,L_3,L_4\}$ множества $\mathcal{L}$, где $|\mathcal{L}| = 15$ и $|\mathfrak{C}| = 16$. Объект $(\mathfrak{C},\{L_1,L_2,L_3 \cup L_4\})$ является RN-3-полусетью, имеющей LS-недопустимый носитель. Кроме того, здесь $\ell(A) \in \{3,4\}$, где $\ell(A)$ число линии, проходящих через точку $A \in \mathfrak{C}$. Заметим, что в RN-3-полусети, изображенной на рис. 6 $\ell(A) = 4$ для всех $A \in \mathfrak{C}$.

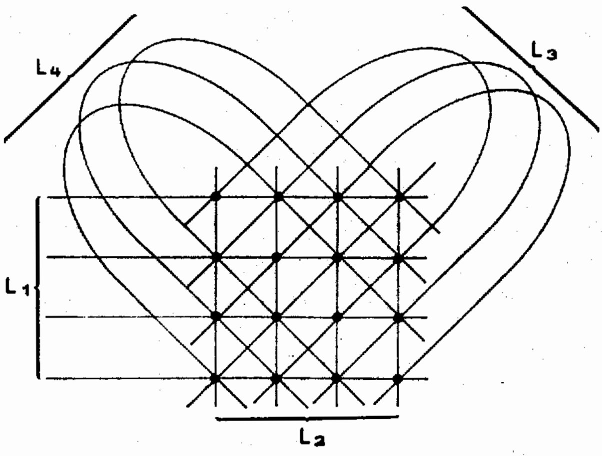

Рис. 7.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ $1'_R$. RN-к-полусеть $(\mathfrak{C},\{L_1,\dots,L_к\})$ назовем ℓ-RN-к-полусетью, $\ell \in N$, тогда и только тогда, когда имеет место:

M$2'_2$ каждая точка из $\mathfrak{C}$ находится в ℓ и только в ℓ линии.

Следующее утверждение является следствием условий RM2_1 и M$2'_2$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 17. Если объект $(\mathfrak{C},\{L_1,\ldots,L_н\})$ является ℓ-RN-к-полусетью, то $\ell \geq к$.

Более того, имеет место:

УТВЕРЖДЕНИЕ 17'. Если объект $(\mathfrak{C},\{L_1,\ldots,L_к\})$ является RN-k-полусетью и $\ell(A)$ числом линий, проходящих через точку точку $A \in \mathfrak{C}$, тогда $\ell(A) \geq к$ для каждой точки $A \in \mathfrak{C}$.

ТЕОРЕМА 18. ℓ-RN-к-полусеть $(\mathfrak{C},\{L_1,\ldots,L_к\})$ является к-полусетью тогда и только тогда, когда $\ell = к$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

а) $\Rightarrow$

Утверждение в этом направлении является непосредственным следствием определения к-полусети (примечание 1) и определения 1_R.

б) $\Leftarrow$

Если $\ell = н$, то, на основании $M2_2'$, через каждую точку проходит в точности к линии. Отсюда, ввиду $RM2_1$, находим, что в $(\mathfrak{C},\{L_1,\ldots,L_к\})$ имеет место M2. Именно предположение, что существует точка $A \in \mathfrak{C}$, непринадлежащая ни одной линии некото рого класса L_i, $i \in \{1,\ldots,к\}$, влечет в контрадикцию с $RM2_1$.

Ввиду примечания 1 и теоремы 18, имеет место:

СЛЕДСТВИЕ 19. ℓ-RN-к-полусеть $(\mathfrak{C},\{L_1,\ldots,L_к\})$ является к-сетью тогда и только тогда, когда выполняется равенство $\ell = к$ и имеет место M1'.

4-RN-3-полусеть, изображенная на рис. 6, имеет LS--недопустимый носитель. Все-таки она удовлетворяет условию M1'. Таким образом, имеет место:

УТВЕРЖДЕНИЕ 20. Существуют ℓ-RN-к-полусети, в которых имеет место M1' и имеется LS-недопустимый носитель.

RN-3-полусеть, изображенная на рис. 7, имеет LS-недопустимый носитель. Все-таки она удовлетворяет условию M1'. Таким образом, имеет место и следующее утверждение:

УТВЕРЖДЕНИЕ 21. Существуют RN-к-полусети, в которых имеет место M1' и которые имеют LS-недопустимый носитель.

ПРИМЕЧАНИЕ 8. В [8] "L-геометия" имеет следующий смысл:

Пусть $\mathfrak{T}$ непустое множество[1] и пусть непустое множество $\mathfrak{L}$ множество некоторых непустых подмножеств множества $\mathfrak{T}$. Элементы множества $\mathfrak{T}$ называются точками, элементы множества $\mathfrak{L}$ прямыми. Объект $(\mathfrak{T},\mathfrak{L})$ называется L-геометрий тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

L1 через любые две различные точки проходит не более одной прямой; и

L2 каждая точка находится по меньшей мере в одной прямой.

Если в $(\mathfrak{T},\mathfrak{L})$ имеет место:

L1' через любые две различные точки проходит одна и только одна пряма ;

то в $(\mathfrak{T},\mathfrak{L})$ справедливы условия L1 - L2.

L-геометрию $(\mathfrak{T},\mathfrak{L})$, в которой имеет место L1', автор в [8], позволил себе назвать TCL-геометрией (тотально колинеаризированной L-геометрией)[2].

Носители LN-к-полусетей являются L-геометриями. L-геометрии являются носителями и некоторых RN-к-полусетей. Но

---

[1] В [8] речь идет о конечном множестве.

[2] В самом деле, если $(\mathfrak{T},\mathfrak{L})$ является TCL-геометрией и $|\ell| \geq 2$ для всех $\ell \in \mathfrak{L}$, то $\mathfrak{L}$ является разбиением Хартманиса типа 2 множества $\mathfrak{T}$ [18].

существуют RN-к-полусети, имеющие носители, не являющиеся L-геометриями. Примеры таких RN-к-полусетей изображены на рис. 6 и 7. Для этих носителей имеет место: L2 и

$L^{(2)}1$ через каждые три попарно различные точки проходит не более одной линии.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ušan J., к-seminets, Mat. Bilten, Skopje, 1(XXVII), 1977, 41 - 46.

[2] Белоусов В.Д., Алгебраические сети и квазигруппы, Кишинев, "Штиинца", 1971.

[3] Dénes J. and Keedwell A.D., Latin Squares and Application, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1974.

[4] Ušan,J., On k-seminets, Review of Research Faculty of Science - University of Novi Sad, Vol. 15(2) (1985), 131 - 140.

[5] Ушан Я., Об отношениях параллельности в к-полусетях, Review of Research Faculty of Science - University of Novi Sad, Vol. 15(2), (1985), 155 - 161.

[6] Ушан Я., О одном классе конечных к-полусетей, Review of Research Faculty of Science - University of Novi Sad, Vol. 12 (1982), 387 - 398.

[7] Ušan J., A construction of special k-seminets, Review of Research Faculty of Science - University of Novi Sad, Vol. 14, 1 (1984), 109 - 115.

[8] Ушан Я., A_t-квазигруппы, Review of Research Faculty of Science - University of Novi Sad, Vol. 15(2) (1985), 141 - 154.

[9] Szamkolowicz L., On the problem of existence of finite regular planes, Coloq. Math., 9 (1962), 245 - 250.

[10] Пухарев Н.Н., Об A_n^k-алгебрах и регулярных конечных плоскостях, Сибирский мат. ж., том. VI, №. 4 (1965), 892-899.

[11] Siftar J., On the existence of A_n^k-quasigroups, Glasnik Mat., Vol. 18.(38), 1983, 217 - 219.

[12] Dénes J., Gergely E., Groupoids and codes, Colloquia Mathematica Societatis, János Bolyai, 16, Topics Information Theory, Keszthely (Hungary), 1975, 155-162.

[13] Ušan J., Stojaković Z., Orthogonal Systems of Partial operations, Zb. Rad. Prirod.-Mat. Fak. u Novom Sadu, Ser. za Mat., 8, 1978, 47 - 51.

[14] Ушан Я., Тошич Р., Сурла Д., Один способ построени ортогональных систем латинских прямоугольников, кодов и к-семисетей, Зб. Рад. Природ.-Мат. Фак. у Новом Саду, Сер. за Мат., 9, 1979, 191 - 197.

[15] Ушан Я., Стоякович З., О-польные ортогональные системы частичных квазигрупп, Зб. Рад. Природ.-Мат. фак. у Новом Саду, Сер. за Мат., 9, (1979), 175 - 184.

[16] Usan J., Stojaković Z., Partial Quasigroups, Proc. of Algebraic Conference, Skopje, 980, 73 - 85.

[17] Bonisoli A., Deza M., Orthogonal Permutation Arrays and Related Structures, Acta Universitatis Carolinae - mathematica et physica, Vol. 24, №. 2, (1983), 23- - 38.

[18] Hartmanis J., Generalized Partitions and Lattice Embedding Theorems, Proc. of Symposium in Pure Math., Vol. II, Lattice Theory, Amer. Math. Soc. (1961), 22 - 30.

REZIME

LN-k- I RN-k-POLUREŠETKE

k-Polurešetke, koje je autor uveo u [1], predstavljaju jedno uopštenje k-rešetaka [2-3]. k-Polurešetke su u tesnoj vezi sa specijalnim ortogonalnim sistemima parcijalnih kvazigrupa [1], sa specijalnim kodovima [12-16], sa afinim prostorima Spernera [6-7] i sa r-dizajnima [17]. U ovom radu se k-polurešetke uopštavaju na LN-k-polurešetke i RN-k-polurešetke (leve-skoro-k-polurešetke i desne-skoro-k-polurešetke). Pri tom važi: objekat $(\mathfrak{T},\{L_1,\ldots,L_k\})$ jeste k-polurešetka akko je LN-k- i RN-k-polurešetka. Izmedju ostalog, u radu se nalazi karakterizacija LN-k-polurešetaka $(\mathfrak{T},\{L_1,\ldots,L_k\})$, pomoću objekata tipa $(\mathfrak{T},\mathfrak{L},\parallel)$, gde $\mathfrak{T} \neq \emptyset$, $\mathfrak{L} \subseteq P(\mathfrak{T}) \setminus \{\emptyset\}$, $\parallel \subseteq \mathfrak{L}^2$, a $\parallel$ zadovoljava uslov: za svako $A \in \mathfrak{T}$ i svako $p \in \mathfrak{L}$ postoji najviše jedna $p' \in \mathfrak{L}$ takva da je $p' \parallel p$ i $A \in p'$.

Received by the editors June 17, 1986.