ZBORNIK RADOVA
Prirodno-matematičkog fakulteta
Univerziteta u Novom Sadu
Serija za matematiku, 16, 1(1986)

REVIEW OF RESEARCH
Faculty of Science
University of Novi Sad
Mathematics Series, 16, 1(1986)

A_t^m- И A_t-3-КВАЗИГРУППЫ

Янез Ушан

Институт за математику Универзитета у Новом Саду, 21000 Нови Сад, др Илије Ђуричића 4, Југославија

РЕЗЮМЕ

В [1] введены понятия A_t^3- и A_t^4-алгебр. В [2] дано такое определение A_t^m-квазигруппы (A_t^m-алгебры), что A_t^3- и A_t^4--алгебры оказываются ее частными случаями. В [3] доказано, что A_t^m-квазигруппы являются координатизациоными системами конечных регулярных плоскостей, в которых прямые ℓ удовлетворяют условию $|\ell| \geq 3$. В [4] введены A_t-квазигруппы, являющеся одним из обобщений A_t^m-квазигрупп, и показано, что A_t-квазигруппы являются координатизационными системами конечных TCL-геометрий в которых прямые ℓ удовлетворяют условию $|\ell| \geq 3$. (Если $(\mathfrak{C},\mathfrak{L})$ TCL-геометрия и $|\ell| \geq 2$ для всех $\ell \in \mathfrak{L}$, то $\mathfrak{L}$ является разбиением Хартманиса типа 2 множества $\mathfrak{C}$ [4,6-7]). В настоящей работе определяются и расматриваются A_t^m- и A_t-3-квазигруппы. Показано, что каждой A_t-3-квазигруппе (A_t^m-3-квазигруппе) соответствует конечная $TCL^{(2)}$-геометия (регулярная $TCL^{(2)}$-геометия). Обратное утверждение имеет место, если для каждой линии ℓ, $|\ell| = m \in N \setminus \{1,2,3\}$, существует A_m^m-3-квазигруппа.

AMS Mathematics subject Classification (1980): 20N05.

Key words and phrases: A_t^m-3-quasigroups, A_t-quasigroups, $TCL^{(2)}$-geometry.

* * *

Очевидно имеет место: если $(\mathfrak{Q},A)$, $|\mathfrak{Q}| = t \in N$, 3-квазигруппа, то любая тройка попарно различных элементов $a, b, c \in \mathfrak{Q}$ порождает 3-подквазигруппу $([a,b,c],A)$ 3-квазигруппы $(\mathfrak{Q},A)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. A_t^m-3-квазигруппой назовем 3-квазигруппу $(\mathfrak{Q},A)$, $|\mathfrak{Q}| = t \in N \setminus \{1,2,3\}$, тогда и только тогда, когда имеет место:

<u>A1</u> $(\forall a \in \mathfrak{Q})(\forall b \in \mathfrak{Q})A(\overset{i-1}{a},b,\overset{3-i}{a}) = b$ для каждого $i \in \{1,2,3\}$[1]; и

<u>A2</u> $(\forall a \in \mathfrak{Q})(\forall b \in \mathfrak{Q})(\forall c \in \mathfrak{Q})(a \neq b \wedge a \neq c \wedge b \neq c \Rightarrow$ $\Rightarrow |[a,b,c]| = m \in N \setminus \{1,2,3\})$[2].

ПРИМЕЧАНИЕ 1. Очевидно имеет место: в любой 3-квазигруппе $([a,b,c],A)$, относящейся к A2 справедливо A1[3].

Непосредственным следствием аксиомы A1 является следующее:

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. A_t^m- квазигруппа $(\mathfrak{Q},A)$ является идемпотентной 3-квазигруппой, т.е. в $(\mathfrak{Q},A)$ имеет место формула:

$$(\forall a \in \mathfrak{Q})A(\overset{3}{a}) = a.$$

Из следующего утверждения происходит, что A_t^m-квазигруппа является обобщением A_t^m-квазигруппы:

---

1) Каждый $a \in \mathfrak{Q}$ является единицей 3-квазигруппы $(\mathfrak{Q},A)$.

2) На множестве $\mathfrak{Q}$, удовлетворяющем условию $|\mathfrak{Q}| \leq 3$ не существует 3-квазигруппа, удовлетворяющая условию A1.

3) Закон $A(\overset{i-1}{x},y,\overset{3-i}{x}) = y$ имеет место для любых $x,y \in \mathfrak{Q}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1′. В 3-квазигруппе $(\mathfrak{C}, A)$, $|\mathfrak{C}| = t \in N \setminus \{1,2,3\}$, справедливо A1 тогда и только тогда, когда имеет место:

$$\underline{A1'} \quad (\forall a_1 \in \mathfrak{C})(\forall a_2 \in \mathfrak{C})(\forall a_3 \in \mathfrak{C})(|\{a_1^3\}| \in \{1,2\} \Rightarrow A(a_1^3) \in \{a_1^3\}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

а) Непосредственно получаем, что имеет место следующая импликация:

$$A1 \Rightarrow A1'.$$

б) Пусть $(\mathfrak{C}, A)$ 3-квазигруппа, удовлетворяющая условию A1′. Существуют только следующие возможности:

$$A(\overset{i-1}{a}, b, \overset{3-i}{a}) = a$$

или

$$A(\overset{i-1}{a}, b, \overset{3-i}{a}) = b$$

для каждого $i \in \{1,2,3\}$.

Если $a \neq b$[1], то первая возможность противоречит предположению, что $(\mathfrak{C}, A)$ 3-квазигруппа. Именно из

$$A(\overset{i-1}{a}, b, \overset{3-i}{a}) = a \wedge a \neq b$$

находим, что имеет место формула:

$$(\forall a \in \mathfrak{C})(\forall b \in \mathfrak{C})(A(\overset{i-1}{a}, a, \overset{3-i}{a}) = A(\overset{i-1}{a}, b, \overset{3-i}{a}) \wedge a \neq b).$$

Так как эта формула эквивалентна формуле

$$\neg(\forall a \in \mathfrak{C})(\forall b \in \mathfrak{C})(A(\overset{i-1}{a}, a, \overset{3-i}{a}) = A(\overset{i-1}{a}, b, \overset{3-i}{a}) \Rightarrow a = b),$$

утверждение доказано.

---

[1] $|\mathfrak{C}| \in N \setminus \{1,2,3\}$

$A1'$ является частным случаем следующей формулы:

$\underline{A1}_n$ $(\forall a_1 \in \mathfrak{C}) \ldots (\forall a_n \in \mathfrak{C})(|\{a_1^n\}| \in \{1,\ldots,n-1\} \Rightarrow$
$\Rightarrow A(a_1^n) \in \{a_1^n\}).$

Для $n = 2$, $A1_n$ становится следующей формулой:

$$(\forall a_1 \in \mathfrak{C})(\forall a_2 \in \mathfrak{C})(|\{a_1^2\}| \in \{1\} \Rightarrow A(a_1^2) \in \{a_1^2\}),$$

эквивалентной формуле:

$$(\forall x \in \mathfrak{C})A(x,x) = x.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. В A_t^m-3-квазигруппе $(\mathfrak{C},A)$ имеет место:

$\underline{A3}$ Каждую 3-квазигруппу $([a,b,c],A)$ порождает любая тройка попарно различных элементов множества $[a,b,c]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ любые попарно различные элементы множества $[a,b,c]$. Так как $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ попарно различные, они порождают 3-подквазигруппу $([\bar{a},\bar{b},\bar{c}],A)$, обладающую сво ством A1[1] такую, что имеет место:

(a) $$|[\bar{a},\bar{b},\bar{c}]| = m\,^{2)}.$$

Учитывая, что

$$\bar{a},\bar{b},\bar{c} \in [a,b,c],$$

находим, что

$$[\bar{a},\bar{b},\bar{c}] \subseteq [a,b,c].$$

Отсюда, учитывая (a) и A2, находим, что

---

[1] Примечание 1.

[2] A2.

$$[\bar{a},\bar{b},\bar{c}] = [a,b,c].$$

Так как a,b,c любые попарно различные элементы множества [a,b,c], утверждение доказано.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. В A_t^m-3-квазигруппе имеет место:

<u>A4</u> $[\bar{a},\bar{b},\bar{c}] \neq [a,b,c] \Rightarrow |[\bar{a},\bar{b},\bar{c}] \cap [a,b,c]| \leq 2.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a,b,c,\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ любые элементы, удовлетворяющие условию

(б) $$[\bar{a},\bar{b},\bar{c}] \neq [a,b,c].$$

Предположим,что имеет место:

(ц) $$|[a,b,c] \cap [a,b,c]| > 2$$ [1].

Из (ц) получаем, что существуют $p,q,r \in \mathfrak{C}$ такие, что:

$$p,q,r \in [a,b,c],$$
$$p,q,r \in [a,b,c], \text{ и}$$

$$p \neq q,\ p \neq r,\ q \neq r.$$

Отсюда, учитывая утверждение 2, получаем, что спроведливы равенства

$$[\bar{a},\bar{b},\bar{c}] = [p,q,r] \text{ и } [p,q,r] = [a,b,c],$$

т.е., что имеет место равенство

$$[\bar{a},\bar{b},\bar{c}] = [a,b,c].$$

Так как это равенство противоречит условию (б), находим,что

[1] $\Leftrightarrow \neg|[\bar{a},\bar{b},\bar{c}] \cap [a,b,c]| \leq 2.$

утверждение доказано.

Подобными рассуждениями доказывается, что имеет место и следующее утверждение:

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Пусть $(\mathfrak{C},A)$, $|\mathfrak{C}| = t \in N \setminus \{1,2,3\}$, 3-квазигруппа удовлетворяющая условию A1. Тогда имеет место:

$$A3 \Leftrightarrow A4.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. A_t-3-квазигруппой назовем 3-квазигруппу $(\mathfrak{C},A)$, $|\mathfrak{C}| = t \in N \setminus \{1,2,3\}$, тогда и только тогда, когда имеет место A1 и A3[1].

Очевидно, что каждая A_t^m-квазигруппа является A_t-квазигруппой. Обратное не имеет место (утверждение 9).

A_4^4-3-квазигруппы и A_5^5-3-квазигруппы существуют: табл. 1_1- 1_4 и 2_1-2_5. Более того, имеет место:

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Если (Q,A) и $(\bar{Q},\bar{A})$ являются A_4^4-3-квазигруппами, то каждая биекция f множества Q на множество $\bar{Q}$ является изоморфизмом (Q,A) на $(\bar{Q},\bar{A})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Q = \bar{Q} = \{1,2,3,4\}$. Пусть, далее, f подстановка множества $\{1,2,3,4\}$. Учитывая A1, находим, что имеют место следующие равенства:

$$fA(x,x,z) = fA(x,y,z) = fA(z,x,x) = fz$$

и

$$\bar{A}(fx,fx,fz) = \bar{A}(fx,fz,fx) = \bar{A}(fz,fx,fx) = fz$$

для любых $x,z \in \{1,2,3,4\}$. Далее, учитывая A2, находим, что имеет место: если $|\{x,y,z\}| = 3$ и $u \in \{1,2,3,4\} \setminus \{x,y,z\}$, то имеют место равенства:

[1] A1 и A4 (в силу утверждения 4).

A_1	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	1	4	3
3	3	4	1	2
4	4	3	2	1

Табл. 1_1

A_2	1	2	3	4
1	2	1	4	3
2	1	2	3	4
3	4	3	2	1
4	3	4	1	2

Табл. 1_2 $\mathfrak{C} = \{1,2,3,4\}$

A_3	1	2	3	4
1	3	4	1	2
2	4	3	2	1
3	1	2	3	4
4	2	1	4	3

Табл. 1_3

A_4	1	2	3	4
1	4	3	2	1
2	3	4	1	2
3	2	1	4	3
4	1	2	3	4

Табл. 1_4

A_1	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	1	5	3	4
3	3	4	1	5	2
4	4	5	2	1	3
5	5	3	4	2	1

Табл. 2_1

A_2	1	2	3	4	5
1	2	1	4	5	3
2	1	2	3	4	5
3	5	3	2	1	4
4	3	4	5	2	1
5	4	5	1	3	2

Табл. 2_2 $\mathfrak{C} = \{1,2,3,4,5\}$

A_3	1	2	3	4	5
1	3	5	1	2	4
2	4	3	2	5	1
3	1	2	3	4	5
4	5	1	4	3	2
5	2	4	5	1	3

Табл. 2_3

A_4	1	2	3	4	5
1	4	3	5	1	2
2	5	4	1	2	3
3	2	5	4	3	1
4	1	2	3	4	5
5	3	1	2	5	4

Табл. 2_4

A_5	1	2	3	4	5
1	5	4	2	3	1
2	3	5	4	1	2
3	4	1	5	2	3
4	2	3	1	5	4
5	1	2	3	4	5

Табл. 2_5

$$A(x,y,z) \xlongequal{\text{деф}} A_x(y,z);$$

$$x,y,z \in \mathfrak{C}$$

$$fA(x,y,z) = fu$$

и

$$\bar{A}(fx,fy,fz) = fu.$$

Утверждение доказано.

ПРИМЕЧАНИЕ 2. A_4^4-3-квазигруппа $(\{1,2,3,4\},A)$ определяет (тривиальную) систему четверок Штайнера $(\{1,2,3,4\}, \{\{1,2,3,4\}\})$, и обратно.

* ☆ ☆ *

В [4] "L-геометрия" имеет следующий смысл:

Пусть $\mathfrak{C}$ непустое множество[1] и пусть непустое множество $\mathcal{L}$ множество некоторых непустых подмножеств множества $\mathfrak{C}$. Элементы множества $\mathfrak{C}$ називаются точками, элементы множества $\mathcal{L}$ прямыми. Объект $(\mathfrak{C},\mathcal{L})$ называется L-геометрия тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

<u>L1</u> через любые две различные точки проходит не более одной прямой;

и

<u>L2</u> каждая точка находится по меньшей мере в одной прямой.

Если в $(\mathfrak{C},\mathcal{L})$ имеет место:

<u>L1´</u> через любое две различные точки проходит одна и только одна прямая;

то в $(\mathfrak{C},\mathcal{L})$ справедливы условия L1-L2.

L-геометрию $(\mathfrak{C},\mathcal{L})$, в которой имеет место L1´,автор, в [4], позволил себе назват TCL-геометрией[2].

---

[1] В [4] речь идет о конечном множестве.

[2] В самом деле, если $(\mathfrak{C},\mathcal{L})$ является TCL-геометрией и $|\ell| \geq 2$, для всех $\ell \in \mathcal{L}$, то $\mathcal{L}$ является разбиением Хартманиса типа 2 множества $\mathfrak{C}$[6-7].

Носители LN-к-полусетей являются L-геометриями [5]. L-геометрии являются носителями и некоторых RN-к-полусетей. Но, существуют RN-к-полусети, имеющие носители, не являющиеся L-геометриями. Именно в некоторых, кроме L2, имеет место:

<u>$L^{(2)}1$</u> через каждые три попарно различные точки проходит не более одной линии.

Объект $(\mathfrak{T},\mathfrak{L})$, в котором имеют место $L^{(2)}1$ и L2, позволим себе назвать $L^{(2)}$-геометрией. $L^{(2)}$-геометрию $(\mathfrak{T},\mathfrak{L})$, в которой имеет место

<u>$L^{(2)}1'$</u> через каждые три попарно различные точки проходит одна и только одна линия;

назовем $TCL^{(2)}$-геометрия[1]. $TCL^{(2)}$-геометрию $(\mathfrak{T},\mathfrak{L})$ назовем регулярной тогда и только тогда, когда имеет место:

<u>L3</u> $$(\forall \ell \in \mathfrak{L})(\forall \ell' \in \mathfrak{L})\ |\ell| = |\ell'|.$$

Пусть $(\mathfrak{T},A)$, $|\mathfrak{T}| = t \in N \setminus \{1,2,3\}$, A_t-3-квазигруппа. Пусть, далее,

$$\mathfrak{L} \overset{\text{деф}}{=} \{[a,b,c] \mid a,b,c \in \mathfrak{T} \wedge a \neq b \wedge a \neq c \wedge b \neq c\}.$$

Если, при этом, элементы множества $\mathfrak{T}$ назовем точками а элементы множества $\mathfrak{L}$ линиями, то, учитывая определение 2 и утверждение 4, находим, что имеет место следующее утверждение:

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. Если $(\mathfrak{T},A)$, $|\mathfrak{T}| = t \in N \setminus \{1,2,3\}$, A_t-3-квазигруппа, то $(\mathfrak{T},\mathfrak{L})$, где

$$\mathfrak{L} \overset{\text{деф}}{=} \{[a,b,c] \mid a,b,c \in \mathfrak{T} \wedge a \neq b \wedge a \neq c \wedge b \neq c\},$$

---

1) В самом деле, если $(\mathfrak{T},\mathfrak{L})$ является $TCL^{(2)}$-геометрией и $|\ell| \geq 3$ для всех $\ell \in \mathfrak{L}$, то $\mathfrak{L}$ является разбиением Хартманиса типа 3 множества $\mathfrak{T}$[6-7].

$TCL^{(2)}$-геометрия.

Отсюда, учитывая определение 1 и утверждение 2, находим, что имеет место следующее утверждение:

СЛЕДСТВИЕ 7. Если $(\mathfrak{T},A)$, $|\mathfrak{T}| = t \in N \setminus \{1,2,3\}$, A_t^m-3-квазигруппа, то $(\mathfrak{T},\mathcal{L})$, где

$$\mathcal{L} \overset{\text{деф}}{=} \{[a,b,c] \mid a,b,c \in \mathfrak{T} \wedge a \neq b \wedge a \neq c \wedge b \neq c\},$$

регулярная $TCL^{(2)}$-геометрия.

УТВЕРЖДЕНИЕ 8. Пусть $(\mathfrak{T},\mathcal{L})$, $|\mathfrak{T}| \in N$, $TCL^{(2)}$-геометрия такая, что имеет место:

а) для каждой $\ell \in \mathcal{L}$ $|\ell| \in N \setminus \{1,2,3\}$,

$$|\ell| \in \{m_1,\dots,m_p\},\ p \in N.$$

Тогда, если

б) для каждого $m \in \{m_1,\dots,m_p\}$ существует A_m^m-3-квазигруппа;

то

в) существует 3-арна операция A на $\mathfrak{T}$ такая, что $(\mathfrak{T},A)$ является A_t-3-квазигруппой; $|\mathfrak{T}| = t$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(\mathfrak{T},\mathcal{L})$ $TCL^{(2)}$-геометрия, удовлетворяющая условию а). Отсюда, учитывая условие б), находим, что имеет место:

1° на каждой линии $\ell_i \in \mathcal{L}$, $i \in I$, можно определить тернарную операцию $A^{(i)}$, $i \in I$, такую, что $(\ell_i, A^{(i)})$, $i \in I$, становится A_m^m-3-квазигруппой; $m = |\ell_i|$.

Учитывая $L^{(2)}1'$ и 1°, находим, что имеет место:

2° для любых попарно различных $a,b,c \in \mathfrak{T}$ существует одна и только одна (из, в 1° выбранных) $A^{(i)}$, $i \in I$, такая, что $A^{(i)}(a,b,c) \in \ell_i \subseteq \mathfrak{T}$.

Имея в виду $L^{(2)}1'$ и а), любые $a,b \in \mathfrak{C}$ являются элементами по меньшей мере одного множества ℓ_i, $i \in I$. Поэтому, имея в виду 1°, находим, что имеет место:

3° для любых $a,b \in \mathfrak{C}$ существует по меньшей мере одна (из, в 1°, выбранных) $A^{(i)}$, $i \in I$, такая, что

$$A^{(i)}(a,a,b) = A^{(i)}(a,b,a) = A^{(i)}(b,a,a) = b$$

для всех $i \in I$, удовлетворяющих условию $a,b \in \ell_i$.

На основании 2° и 3° находим, что имеет место:

4°

$$A \overset{\text{деф}}{=} \bigcup_{i \in I} A^{(i)}$$

является тернарной операцией в множестве $\mathfrak{C}$.

На основании 3° находим, что имеет место:

5° В 3-група оиде $(\mathfrak{C},A)$ справедливо A1.

Далее, на основании $L^{(2)}1'$ и 1° находим, что имеет место:

6° В 3-группоиде $(\mathfrak{C},A)$ справедливо A4.

Пусть $a,b,c \in \mathfrak{C}$ любые элементы, удовлетворяющие условию: $a \neq b \wedge a \neq c \wedge b \neq c$. Отсюда, учитывая $L^{(2)}1'$ и 1°, находим что $([a,b,c],A)$ является A_m^m-3-квазигруппой. Поэтому каждое из уравнений

$$A(x,a,b) = c, \quad A(a,y,b) = c, \quad A(a,b,z) = c$$

обладает одним и только одним решением, принадлежащим множеству $[a,b,c]$. Предположение, что существуют и решения, не принадлежащие множеству $[a,b,c]$, противоречит условию A4 (6°). Далее, учитывая 4° и 5°, находим, что и уравнения

$$A(x,a,a) = b, \quad A(a,y,a) = b, \quad A(a,a,z) = b$$

обладают одним и только одним решением. Отсюда находим, что имеет место:

7° 3-группоид ($\mathfrak{T}$,A) является 3-квазигруппой.

Наконец, учитывая 5°, 6° и 7°, находим, что утверждение доказано.

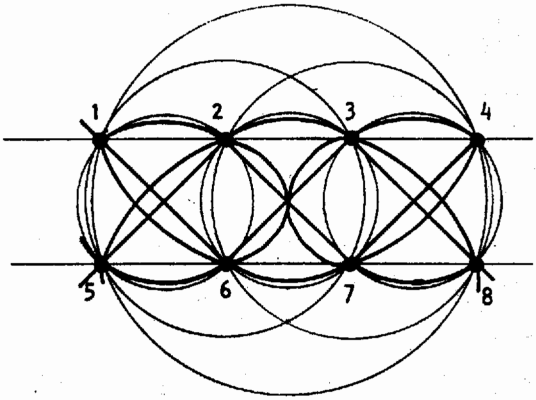


Рис. 1

На рис. 1 изображена регулярная $TCL^{(2)}$-геометрия ($\mathfrak{T}$,$\mathfrak{L}$), где:

$\mathfrak{T} = \{1,\dots,8\}$;

$\ell_1 = \{1,2,3,4\}$,	$\ell_2 = \{5,6,7,8\}$,
$\ell_3 = \{1,2,5,6\}$,	$\ell_4 = \{2,3,6,7\}$,
$\ell_5 = \{3,4,7,8\}$,	$\ell_6 = \{1,3,5,7\}$,
$\ell_7 = \{1,4,5,8\}$,	$\ell_8 = \{2,4,6,8\}$,
$\ell_9 = \{1,3,6,8\}$,	$\ell_{10} = \{2,4,5,7\}$,
$\ell_{11} = \{1,2,7,8\}$,	$\ell_{12} = \{3,4,5,6\}$,
$\ell_{13} = \{2,3,5,8\}$,	$\ell_{14} = \{1,4,6,7\}$.

Отсюда, учитывая факт, что A_4^4-3-квазигруппы существуют (табл. 1_1-1_4), на основании утверждения 8, находим, что имеет место: A_8^4-3-квазигруппы существуют.

На рис. 2_1 изображена 4-сеть ($\mathfrak{T}$, L_1, L_2, L_3, L_4) порядка 3[1]. Ее носитель $(\mathfrak{T}, \mathfrak{L})$, $\mathfrak{L} = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4$, удовлетворяет условиям: $|\mathfrak{T}| = 9$ и $|\ell| = 3$ для всех $\ell \in \mathfrak{L}$. На рис. 2_2 изображена $L^{(2)}$-геометрия $(\bar{\mathfrak{T}}, \bar{\mathfrak{L}})$, определенная следующим образом:

$$\bar{\mathfrak{T}} \overset{\text{деф}}{=} \mathfrak{T} \cup \{10\},\ 10 \notin \mathfrak{T}, \quad \text{и } \bar{\ell} \in \bar{\mathfrak{L}} \overset{\text{деф}}{=} \bar{\ell} \setminus \{10\} \in \mathfrak{L}.$$

Имеет место:

1) через каждые три попарно различные точки $a, b, 10 \in \bar{\mathfrak{T}}$ проходит одна и только одна линия $\bar{\ell} \in \bar{\mathfrak{L}}$; и

2) если $a, b, c \in \bar{\mathfrak{T}} \setminus \{10\}$[2] и $|\{a, b, c\}| = 3$, то не существует $\bar{\ell} \in \bar{\mathfrak{L}}$ такая, что имеет место: $a \in \bar{\ell} \wedge b \in \bar{\ell} \wedge c \in \bar{\ell}$. Таким образом, $L^{(2)}$-геометрия $(\bar{\mathfrak{T}}, \bar{\mathfrak{L}})$ не является $TCL^{(2)}$-геометрией.

Исходя из $L^{(2)}$-геометрии $(\bar{\mathfrak{T}}, \bar{\mathfrak{L}})$, постоим объект $(\bar{\mathfrak{T}}, \bar{\bar{\mathfrak{L}}})$ следующим образом:

$$\bar{\bar{\mathfrak{L}}} \overset{\text{деф}}{=} \bar{\mathfrak{L}} \cup \Delta,$$

где

$$\bar{\bar{\ell}} \in \Delta$$

тогда и только тогда когда

$$\bar{\bar{\ell}} = \{x, y, z, u\},\ \{x, y, z, u\} \subseteq \mathfrak{T},^{3)}\ |\{x, y, z, u\}| = 4$$

и

a) существуют $\ell_1, \ell_1' \in L_1$,[3] $\ell_1 \neq \ell_1'$ и $\ell_2, \ell_2' \in L_2$,[3]

---

[1] [8 - 9].

[2] Рис. 2_3.

[3] $(\mathfrak{T}, \{L_1, L_2, L_3, L_4\})$ является 4-сетью изображеной на рис. 2_1.

$\ell_2 \neq \ell_{\acute{2}}$, такие, что

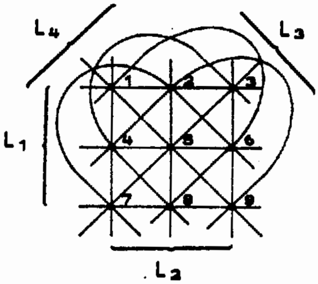
$|\bar{\bar{\ell}} \cap \ell_1| = |\ell \cap \ell_{\acute{2}}| = |\ell \cap \ell_2| = |\ell \cap \ell_{\acute{2}}| = 2$[1];

<u>или</u>

б) существуют в точности одна $\ell_1 \in L_1$ и в точности одна $\ell_2 \in L_2$ такие, что

$|\bar{\bar{\ell}} \cap \ell_1| = |\bar{\bar{\ell}} \cap \ell_2| = 2$[2].

Отсюда, учитывая 1), непосредственно находим, что $(\bar{\mathfrak{C}}, \bar{\mathfrak{L}})$ является регулярной $TCL^{(2)}$-геометрией. Наконец, учитывая факт, что $\overset{4}{A_4}$-3-квазигруппы существуют (табл. 1_1-1_4), на основании утверждения 8, находим, что имеет место: $\overset{4}{A_{10}}$-3-квазигруппы существуют.



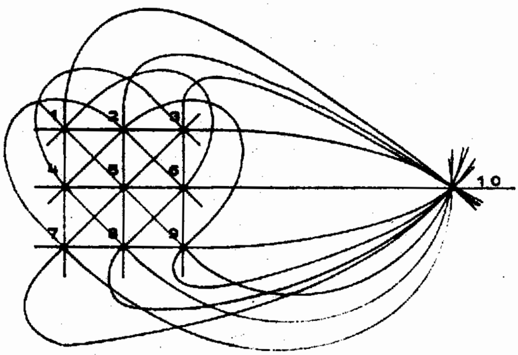


Рис. 2_1 Рис. 2_2

---

1) Например, как на рис. 2_4.

2) Например, как на рис. 2_5.

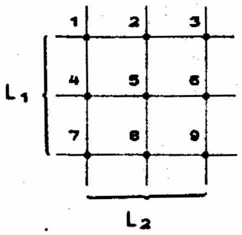


Рис. 2_3

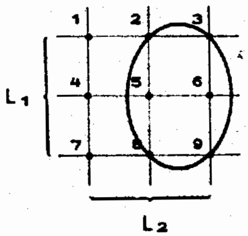


Рис. 2_4[1]

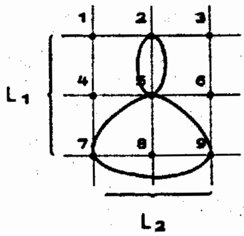


Рис. 2_5[2]

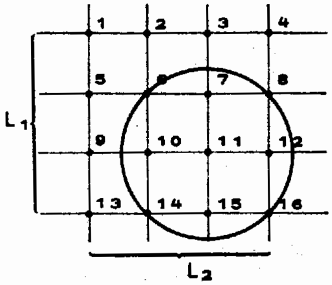


Рис. 3_1

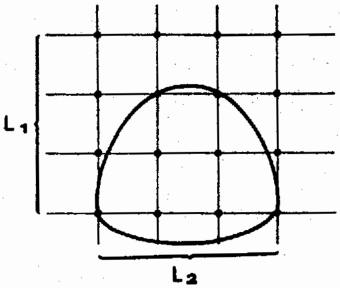


Рис. 3_2

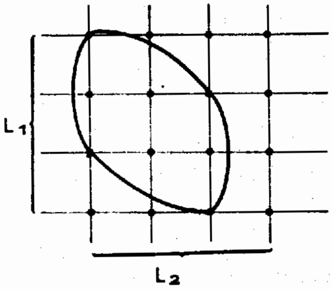


Рис. 3_3

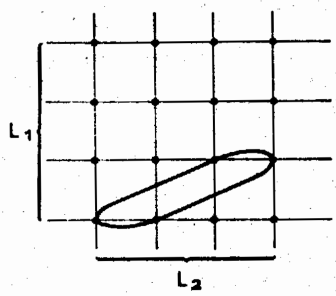


Рис. 3_4

1) $\bar{\bar{\ell}} = \{2,3,8,9\}$.

2) $\bar{\bar{\ell}} = \{2,5,7,9\}$.

Исходя из 5-сети $(\mathfrak{C},\{\overset{5}{L_1}\})$ порядка 4, подобными рассуждениями можно построить $TCL^{(2)}$-геометрию $(\bar{\mathfrak{C}},\bar{\bar{\mathfrak{L}}})$, $\bar{\mathfrak{C}} = \mathfrak{C} \cup \{17\}$, $\mathfrak{C} = \{1,\dots,16\}$, удовлетворяющую условию: существуют линии $\ell \in \bar{\bar{\mathfrak{L}}}$ такие, что $|\ell| = 4$ и существуют линии $\ell \in \bar{\bar{\mathfrak{L}}}$ такие, что $|\ell| = 5$. (Примеры построения линии $\ell \in \mathfrak{L}$, удовлетворяющие условию $|\ell| = 4$, изображены на рис. 3_1-3_4.) Наконец, учитывая факт, что $\overset{4}{A_4}$- и $\overset{5}{A_5}$-3-квазигруппы существуют (табл. 1_1-1_4 и 1_1-1_5), на основании утверждения 8, находим, что имеет место: существует A_{17}-3-квазигруппа, не являющаяся A_{17}^m-3-квазигруппой..

Мы доказали, что имеет место:

УТВЕРЖДЕНИЕ 9. Существуют A_t^m-3-квазигруппы, удовлетворяющие условию $t \neq m$, и существуют A_t-3-квазигруппы, не являющиеся A_t^m-3-квазигруппами.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Szamkolowicz L., On the problem of existence of finite regular planes, Colloq. Math., 9 (1962), 245 - 250.

[2] Пухарев, Н.Н., Об A_n^k-алгебрах и регулярных конечных плоскостях, Сибирский Мат. Ж., том VI, №. 4 (1965), 892 - 899.

[3] Siftar, J., On the existence of A_n^k-quasigroups, Glasnik mat., Vol. 18 (38), 1983, 217 - 219.

[4] Ушан, Я., A_t-квазигруппы, Зб. рад. Природ.-Мат. Фак. Унив. у Новом Саду, Сер. за Мат. 15(2), (1985), 141 - 154.

[5] Ушан, Я., LN- и RN-k-полусети, Зб. Рад. Природ.-Мат. Фак. Унив. у Новом Саду, Сер. за Мат., 16(1),(1986), 161 - 179.

[6] Hartmanis, J., Generalized Partitions and Lattice Embedding Theorems, Proc. of Symposium in Pure Math., Vol. II, Lattice Theory, Amer. Math. Soc., (1961), 22 - 30.

[7] Pickett, H.E., A note Gneralized Equivalence Relations, Amer. Math. Manthly, 1966, 73, №. 8, 860 - 861.

[8] Белоусов, В.Д., Алгебраические сети и квазигруппы, Кишинев, "Штиинца", 1971.

[9] Dénes J. and Keedwell A.D., Latin Squares and their Aplications, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1974.

REZIME

A_t^m- i A_t-3-kvazigrupe

U radu se uvode A_t^m-3-kvazigrupe kao jedno uopstenje A_t^m-kvazigrupa [2], odnosno A_t^3- i A_t^4-algebri [1]. U radu se uvode i A_t-3-kvazigrupe kao jedno uopstenje A_t-kvazigrupa [4], odnosno A_t^m-3-kvazigrupa. Pomoću A_t^m-kvazigrupa mogu se koordinatizirati konacne regularne ravni čije prave ℓ zadovoljavaju uslov $|\ell| \geq 3$ [3], a pomoću At-kvazigrupa TCL-geometrije cije prave ℓ zadovoljavaju uslov $|\ell| \geq 3$ [4]. U ovom radu je, izmedju ostalog, pokazano da svakoj At-3-kvazigrupi (A_t^m-3-kvazigrupi) odgovara konacna $TCL^{(2)}$-geometrija (regularna $TCL^{(2)}$-geometrija). Obrnuto važi uz pretpostavku da za svaku liniju ℓ, $|\ell| = m \in N \setminus \{1,2,3\}$, postoji A_m^m-3-kvazigrupa. (Pri tom, ako je $(\mathfrak{T},\mathfrak{L})$ $TCL^{(2)}$-geometrija i $|\ell| \geq 3$ za svako $\ell \in \mathfrak{L}$, onda je $\mathfrak{L}$ particija Harmantisa tipa 3 skupa $\mathfrak{T}$ [6 - 7].)

Received by the editors June 17, 1986.