ZBORNIK RADOVA
Prirodno-matematičkog fakulteta
Univerziteta u Novom Sadu
Serija za matematiku, 15,2 (1985)

REVIEW OF RESEARCH
Faculty of Science
University of Novi Sad
Mathematics Series, 15, 2 (1985)

UN THÉORÈME DE POINT FIXE DE TYPE CARISTI DANS LES ESPACES LOCALEMENT CONVEXES. APPLICATIONS

G. Isac

Département de Mathématiques Collège militaire royal de Saint-Jean, Saint-Jean-sur-Richelieu, Québec, Canada, JOJ 1RO

SOMMAIRE

Dans cette note, on utilise le théorème de type Caristi prouvé dans notre ouvrage [14] pour démontrer un théorème d'existence pour des équations non-linéaires dans des espaces localement convexes et un théorème de point fixe dans des espaces localement convexes de type (L).

§ 1.

Le théorème de point fixe de Caristi [4] a fait l'objet de plusieurs ouvrages.

Les ouvrages, [2], [21], [22], [23] ont simplifié la démonstration initiale, des applications dans l'analyse non-linéaire on trouve dans les ouvrages, [5], [8], [16] et des généralisations dans [9], [15].

Dans l'ouvrage [1] il est établi une relation intéressante entre le théorème de Caristi et un principe général des ensembles ordonnés.

AMS Mathematics Subject Classification (1980): 47H10.
Key words and phrases: Fixed points, locally convex spaces.

Le fait que le théorème de Caristi a une relation profonde avec les problèmes variationnels a été prouvé dans l'ouvrage [10].

Après nos informations le théorème de Caristi et ses applications ont été considérées seulement sur les espaces métriques ou sur les espaces de Banach.

Récemment dans l'ouvrage [14] nous avons considéré une généralisation du théorème de Caristi pour les systèmes dynamiques dans des espaces localement convexes.

Cette considération nous a permis de mettre en évidence la classe remarquable des cônes nucléaires (ou supernormaux).

On remarque, que dans l'ouvrage [14] il est prouvé que les cônes nucléaires sont un outil important pour l'étude de l'optimum de Pareto.

Maintenant, dans cette note, on utilise le théorème de type Caristi prouvé dans notre ouvrage [11] pour démontrer un théorème d'existence pour des équations non-linéaires dans des espaces localement convexes et un théorème de point fixe dans des espaces localement convexes de type (L).

§ 2.

On utilise la théorie des espaces localement convexes au sens de l'ouvrage [19] et on dit que l'espace vectoriel topologique $E(\tau)$ est un espace localement convexe si la topologie τ est définie par une *famille suffisante* de semi-normes $\{p_\alpha\}_{\alpha\in A}$ c'est-à-dire:

(i) $(\forall x \in E \setminus \{0\})(\exists \alpha \in A)(p_\alpha(x) \neq 0)$,

(ii) $(\forall \alpha', \alpha'' \in A)(\exists \alpha \in A)(\forall x \in E)(p_{\alpha'}(x), p_{\alpha''}(x) \leq p_\alpha(x))$.

Si M est un sous-ensemble de E on dit que la fonction $\phi : M \to R$ est semi-continue inférieurement (s.c.i) si et seulement si, pour tout $\lambda \in R$ l'ensemble, $S_\lambda = \{x\in M | \phi(x)\leq\lambda\}$

est fermé par rapport à M. (E étant supposé localement convexe).

On utilise la notion de système dynamique considéré dans l'ouvrage [20].

Soit $M \subset E$, $M \neq \emptyset$; on dit que Γ est un *système dynamique* sur M si:

s_1) $\Gamma : M \to 2^M$,

s_2) $(\forall x \in M)(\Gamma(x) \neq \emptyset)$.

On dit que $x_* \in M$ est un *point critique* pour le système dynamique Γ sur M si et seulement si $\Gamma(x_*) = \{x_*\}$.

Pour un système dynamique la présence ou l'absence des points critiques est une information importante, par exemple dans l'étude des trajectories des systèmes dynamiques utilisés comme modèles mathématiques dans la théorie des négociations itératives.

Soit $M \subset E$ un ensemble fermé non-vide et $f : M \to F$ une fonction, où F est un localement convexe.

On dit que f a *le graphe fermé* si et seulement si, chaque fois quand on a: $x = \lim\limits_{i\in I} x_i$ et $y = \lim\limits_{i\in I} f(x_i)$, où $x_i \in M$ pour tout $i \in I$ il résulte que $y = f(x)$.

Dans notre ouvrage [14] il est démontré le résultat suivant qui est un théorème de type Caristi.

Théorème 1 [14] *Soit* $(E,\{p_\alpha\}_{\alpha\in A})$ *un espace localement convexe complet et* $M \subset E$ *un sous-ensemble non-vide.*

Le système dynamique $\Gamma : M \to 2^M$ *a un point critique dans l'ensemble* M *si et seulement si, il existe un espace localement convexe complet* $(F,\{q_\beta\}_{\beta\in B})$, *un ensemble fermé* $M_0 \subset M$, *une fonction* $f : M_0 \to F$ *et pour chaque couple* $(\alpha,\beta) \in A \times B$ *il existe une fonction* $\phi_{\alpha\beta} : f(M_0) \to R_+$ *et deux constantes* $c_\alpha, c_\beta > 0$ *telles que:*

1°) $(\forall x \in M_0)(\Gamma(x) \subset M_0)$

2°) f *a le graphe fermé,*

3°) $\phi_{\alpha\beta}$ *est s.c.i.,*

4°) $(\forall x \in M_0)(\forall u \in \Gamma(x))[\max\{c_\alpha p_\alpha(x-u), c_\beta q_\beta(f(x) - f(u))\} \leq \phi_{\alpha\beta}(f(x)) - \phi_{\alpha\beta}(f(u))]$.

Corollaire 1. *Soit* $(E,\{p_\alpha\}_{\alpha\in A})$ *un espace localement convexe complet et* $M \subset E$ *un ensemble non-vide.*

Le système dynamique $\Gamma : M \to 2^M$ *a un point critique dans l'ensemble* M *si et seulement si, il existe: un espace localement convexe complet* $(F,\{q_\beta\}_{\beta\in A})$, *un ensemble fermé* $M_0 \subset M$ *tel que* $\Gamma(M_0) \subset M_0$, *une fonction* $f : M_0 \to F$ *qui a le graphe fermé, pour chaque* $\alpha \in A$ *il existe une fonction s.e.i.* $\phi_\alpha : f(M_0) \to R_+$ *une constante* $c_\alpha > 0$ *et pour chaque* $\beta \in B$ *une fonction* $\phi_\beta : f(M_0) \to R_+$ *s.c.i. et une constante* $c_\beta > 0$ *telles que:*

$$(\forall x \in M_0)(\forall u \in \Gamma(x)) \begin{cases} c_\alpha p_\alpha(x-u) \leq \phi_\alpha(f(x)) - \phi_\alpha(f(u)), \\ c_\beta q_\beta(f(x) - f(u)) \leq \phi_\alpha(f(x)) - \phi_\beta(f(u)). \end{cases}$$

Corollaire 2. *Soit* $(E,\{p_\alpha\}_{\alpha\in A})$ *un espace localement convexe complet,* $M \subset E$ *un ensemble non-vide fermé et* $f : M \to M$ *une fonction arbitraire.*

Si pour chaque $\alpha \in A$ *il existe une fonction s.c.i.* $\phi_\alpha : M \to R_+$ *et une constante* $c_\alpha > 0$ *telles que:*

$$(\forall x \in M)(c_\alpha p_\alpha(x-f(x)) \leq \phi_\alpha(x) - \phi_\alpha(f(x)),$$

alors f *a un point fixe dans l'ensemble* M.

§ 3.

Dans ce paragraphe on présente deux applications dans l'analyse non-linéaire des corollaires 1 et 2 du théorème 1.

Théorème 2. *Soit* $(E,\{p_\alpha\}_{\alpha\in A})$ *un espace localement convexe complet,* $M \subset E$ *un sous-ensemble fermé et* $f : M \to E$ *une fonction qui a le graphe fermé.*

Soit $y_0 \in E$ *un élément donné. On suppose que pour tout* $\alpha \in A$ *il existe* $c_\alpha > 0$ *et* $0 \leq r_\alpha < 1$ *tels que:*

1°) *pour tout* $x \in M$ *il existe un voisinage* $U_{f(x)}$ *de* $f(x)$ *tel que pour tout* $y \in U_{f(x)} \cap f(M)$ *il existe* $v \in f^{-1}(y)$ *tel que pour tout* $\alpha \in A$ *on a:* $p_\alpha(x-v) \leq c_\alpha p_\alpha(f(x)-y)$,

2°) *pour tout* $y \in f(M)$ *il existe une suite* $\{y_j\}_{j\in J} \subset f(M)$ *telle que*

$$(\forall j \in J)(y_j \neq y \text{ et } \lim_{j\in J} y_j = y)$$

et il existe une suite de nombres réels positifs $\{a_j\}_{j\in J}$ *telle que:*

$$(\forall \alpha \in A)(\forall j \in J)(p_\alpha(a_j(y_j-y)-(y_0-y)) \leq r_\alpha p_\alpha(y_0-y),$$

alors l'équation,

$$f(x) = y_0$$

a une solution dans l'ensemble M.

Démonstration. On observe que si $y_0 \notin f(M)$ alors de l'hypothèse 2°) il résulte qu'on peut supposer la suite $\{a_j\}_{j\in J}$ convergente vers $+\infty$ (éventuellement on prend une sous--suite).

En effet, si on suppose que $\{a_j\}_{j\in J}$ n'est pas convergente vers $+\infty$ il résulte que la suite $\{a_j\}_{j\in J}$ contient une sous-suite bornée $\{a_{j_k}\}$.

On a dans ce cas, $\lim a_{j_k}(y_{j_k} - y) = 0$.

Puisque $y_0 \neq y$ il existe une semi-norme p_{α_0} telle que $p_{\alpha_0}(y_0 - y) \neq 0$.

Si on passe à la limite dans l'inégalité de l'hypothèse 2°) pour $\alpha = \alpha_0$ on obtient: $p_{\alpha_0}(y_0 - y) \leq r_{\alpha_0} p_{\alpha_0}(y_0-y)$; d'où $r_{\alpha_0} \geq 1$ ce qui est impossible parce que $r_{\alpha_0} < 1$.

Donc on peut supposer que $\lim_{j\in J} a_j = +\infty$

On suppose maintenant que $y_0 \notin f(M)$.

Soit $x \in M$ et $y = f(x)$; on peut choisir une suite $\{y_j\}_{j \in J}$ et une suite de nombers réels positifs $\{a_j\}_{j \in J}$ qui vérifient l'hypothèse 2°) et en plus, $(\forall j \in J)(a_j \geq 1)$.

Puisque $\lim y_j = y$, il existe $j_0 \in J$ tel que, $(\forall j \geq j_0)(y_j \in \mathcal{U}_{f(x)} \cap f(M))$, où $\mathcal{U}_{f(x)}$ est le voisinage donné par l'hypothèse 1°.

On prouve maintenant que l'hypothèse 2°) implique la relation suivante:

$$(\theta_1):\ 0 \leq p_\alpha(y_j - y) \leq (1+r_\alpha)(1-r_\alpha)^{-1}[p_\alpha(y-y_0)-p_\alpha(y_j-y_0)]; \quad \forall \alpha \in A.$$

En effet,

$$p_\alpha(a_j(y_j - y_0) - p_\alpha((1-a_j)(y - y_0)) \leq$$

$$\leq p_\alpha(a_j(y_j - y_0) + (1 - a_j)(y - y_0)) =$$

$$= p_\alpha(a_j(y_j - y) - (y_0 - y)) \leq r_\alpha p_\alpha(y_0 - y).$$

Donc,

$$p_\alpha(a_j(y_j - y_0)) \leq (a_j - 1 + r_\alpha)p_\alpha(y - y_0);$$

d'où

$$p_\alpha(y_j - y_0) \leq [1 - a_j^{-1}(1 - r_\alpha)]p_\alpha(y - y_0).$$

De l'inégalité de l'hypothèse 2°) utilisant l'inégalité du triangle on obtient,

$$p_\alpha(y - y_0) - p_\alpha(y_j - y_0) \geq$$

$$\geq \{1 - [a_j^{-1}(1 - r_\alpha)]\}\, p_\alpha(y - y_0) =$$

$$= a_j^{-1}(1 - r_\alpha)p_\alpha(y - y_0).$$

Mais, $p_\alpha(\bar{y} - y_0) \geq a_j(1 + r_\alpha)^{-1}p_\alpha(y_j - y)$ parce que,

$$a_j p_\alpha(y_j - y) - p_\alpha(y_0 - y) \le p_\alpha(a_j(y_j - y) -$$

$$- (y_0 - y)) \le r_\alpha p_\alpha(y_0 - y).$$

On a alors,

$$p_\alpha(y - y_0) - p_\alpha(y_j - y_0) \ge$$

$$\ge a_j^{-1}(1 - r_\alpha)a_j(1 + r_\alpha)^{-1}p_\alpha(y_j - y);\ \forall\alpha \in A$$

ce qui donne la relation (θ_1).

Puisque la famille de semi-normes $\{p_\alpha\}_{\alpha\in A}$ est suffisante, pour chaque $j \in J$, $j > j_0$ il existe $\alpha_0 \in A$ tel que:

$$(\theta_2) : 0 < p_{\alpha_0}(y_j - y) \le$$

$$\le (1 + r_{\alpha_0})(1 - r_{\alpha_0})^{-1}[p_{\alpha_0}(y - y_0) - p_{\alpha_0}(y_j - y_0)].$$

Pour x choisi et $y = f(x)$ soit $j > j_0$ tel que y_j vérifie (θ_2).

L'hypothèse 1°) implique l'existence d'un élément $v \in f^{-1}(y_j)$ tel que:

$$(\theta_3) : p_\alpha(x - v) \le c_\alpha p_\alpha(y - y_j);\quad \forall\alpha \in A.$$

On considère l'application $g : M \to M$ définie par, $g(x) = v$, où v est l'élément obtenu d'après le raisonnement précédent et pour chaque $\alpha \in A$ on considère la fonction $\phi_\alpha : f(M) \to R_+$ définie par,

$$\phi_\alpha(f(x)) = c_\alpha(1 + r_\alpha)(1 - r_\alpha)^{-1}p_\alpha(f(x) - y_0).$$

Les fonctions ϕ_α sont continues et les relations (θ_3) et (θ_1) donnent:

$$(\theta_4) : p_\alpha(x - g(x)) \le \phi_\alpha(f(x)) - \phi_\alpha(f(g(x)));\quad \forall\alpha \in A$$

$$(\theta_5) : c_\alpha p_\alpha(f(x) - f(g(x))) \leq$$

$$\leq \phi_\alpha(f(x)) \leq \phi_\alpha(f(g(x))); \quad \forall \alpha \in A.$$

Il résulte alors qu'on peut appliquer le corollaire 1 du théorème 1 à l'application g et on obtient qu'il existe $x \in M$ tel que $g(x) = x$.

On a dans ce cas, $\overline{y} = f(x)$ et $\overline{x} \in f^{-1}(y_j)$ (où $\{y_j\}$ est la suite associée à l'élément y par l'hypothèse 2°)) et donc, $p_\alpha(\overline{y} - y_j) = 0$ pour tout $\alpha \in A$ ce qui est en contradiction avec la relation (θ_2). Donc $y_0 \in f(M)$ est le théorème est démontré.

Le résultat suivant est un théorème de point fixe dans des espaces localement convexes ordonnés.

Soit $E(\tau)$ un espace vectoriel topologique ordonné par un cône convexe saillant et fermé $K \subset E$.

On dit que l'espace $E(\tau)$ est un *espace de type (L)* si:

ℓ_1) E est un treillis localement convexe,

ℓ_2) la topologie τ est définie par une famille suffisante de semi-normes $\{p_\alpha\}_{\alpha \in A}$ qui vérifient les propriétés:

a) $(\forall x, y \in E)(|x| \leq |y|) \Rightarrow p_\alpha(x) \leq p_\alpha(y); \forall \alpha \in A$

b) $(\forall x, y \in K)(\forall \alpha \in A)(p_\alpha(x + y) = p_\alpha(x) + p_\alpha(y)$

espaces de type (L) ont été étudiés dans les ouvrages [7], [13],[12].

On sait d'après l'ouvrage [12] que dans certaines hypothèses les espaces de type (L) sont des espaces de fonctions localement intégrables sur un espace localement compact.

Théorème 3. *Soit* $(E, \{p_\alpha\}_{\alpha \in A})$ *un espace de type (L) complet,* $M \subset E$ *un ensemble fermé et* $f : M \to E$ *une contraction dans le sens suivant:*

$$(\forall \alpha \in A)(\exists k_\alpha \in [0,1])(\forall x, y \in M)(p_\alpha(f(x) - f(y)) \leq$$
$$\leq k_\alpha p_\alpha(x - y))$$

Si f *vérifie la propriété:*

(β) : $(\forall x \in M$ *tel que* $x \neq f(x))(\exists z \in M)$(*ou bien*

$$x > z \geq f(x), \text{ ou bien } x < z \leq f(x))$$

alors f *a un point fixe dans l'ensemble* M.

Démonstration. Puisque l'espace E est un espace de type (L) alors si $x \in M$ et $x \neq f(x)$ utilisant la relation (β) il existe $z \in M$ tel que:

(i) ou bien $x > z \geq f(x)$,
(ii) ou bien $x < z \leq f(x)$

et si $\alpha \in A$ et on a la relation (i) alors,

$$p_\alpha(x - f(x)) = p_\alpha((x - z) + (z - f(x))) =$$

$$= p_\alpha(x - z) + p_\alpha(z - f(x)) \quad \text{ou,}$$

$$p_\alpha(f(x) - x) = p_\alpha((f(x) - z) + (z - x)) =$$

$$= p_\alpha(f(x) - z) + p_\alpha(z - x)$$

si on a (ii).

On considère maintenant l'application $g : M \to M$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} x \text{ si } f(x) = x \\ z \text{ si } f(x) \neq x \text{ (où } z \text{ est défini par } (\beta)). \end{cases}$$

Pour chaque $\alpha \in A$ on a alors,

$$p_\alpha(x - g(x)) = p_\alpha(f(x) - x) - p_\alpha(g(x) - f(x)) \leq$$

$$\leq p_\alpha(f(x) - x) - [p_\alpha(g(x) - f(g(x))) - p_\alpha(f(g(x)) -$$

$$- f(x))] = p_\alpha(f(x) - x) - p_\alpha(g(x) - f(g(x))) +$$

$$+ p_\alpha(f(g(x)) - f(x)) \leq$$

$$\leq p_\alpha(f(x) - x) - p_\alpha(g(x) - f(g(x))) +$$

$$+ k_\alpha p_\alpha(x - g(x)); \quad 0 \leq k_\alpha < 1.$$

Pour chaque $\alpha \in A$ on considère les fonctions continues $\phi_\alpha : M \to R_+$ définies par:

$$\phi_\alpha(x) = (1 - k_\alpha)^{-1} p_\alpha(x - f(x)); \quad \forall x \in M.$$

On a alors, $p_\alpha(x - g(x)) \leq \phi_\alpha(x) - \phi_\alpha(g(x))$; $\forall \alpha \in A$ et on peut appliquer le corollaire 2 du théorème 1, d'où il résulte qu'il existe $x_* \in M$ tel que $g(x_*) = x_*$ et la définition de la fonction g implique que $f(x_*) = x_*$ se qui démontre le théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Brezis H. and Browder F.E.: *A general principle and ordered sets in nonlinear functional analysis*, Adv. in Math. Nr. 21 (1976), p. 666 - 676.

[2] Browder F.E.: *On a theorem of Caristi and Kirk (In: Proc. Seminar on fixed point theory and its applications, Dalhousie Univ. (1975), p. 23 - 27.*

[3] ***: *Normal solvability for nonlinear mappings and geometry of Banach spaces, (In: Proc. CIME Conference-Varena, 1970, Problems in Nonlinear Analysis, Ediziani Cremonese Rome (1971), p. 17 - 35.*

[4] Caristi J.: *Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions*, Trans. Amer. Math. Soc., 215 (1976), p. 241 - 251.

[5] ***: *Fixed point theory and inwardness conditions.* (In: Applied nonlinear analysis, Ed. by V. Lakshmikanthan Acad. Press, (1979), p. 479 - 483.

[6] Caristi J. and Kirk W.A.: *Geometric fixed point theory and inwardness conditions.* (In: The geometry of metric and linear spaces, Michigan - Lecture notes in Math., Springer-Verlag, Nr. 490, p. 74 - 83).

[7] Constantinescu C.: *Weakly compact sets in locally convex vector lattices*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl., Vol. 14, Nr. 3 (1969), p. 325 - 351.

[8] Downing D. and Kirk. W.A.: *A generalization of Caristi's theorem with applications to nonlinear mapping theory*, Pacific J. of Math., Vol. 69, Nr. 2 (1977), p. 339 - 346.

[9] *** : *Fixed point theorem for set-valued mappings in metric and Banach spaces*, Math. Japonica 22 (1977), p. 99 - 112.

[10] Ekeland J.: *Nonconvex minimization problems*, Bull. Amer. Math. Soc., Vol. 1, Nr. 3 (1979), p. 443 - 474.

[11] *** : *Sur les problèmes variationnels*, C.R. Acad. Paris, Sér. A 175 (1972) A, p. 1057 - 1059.

[12] Grigore, G.H.: *La représentation des espaces réticulés localement convexes de type (L)*, St. Cerc. Mat., Tom 22, Nr. 8 (1970), p. 1183 - 1188.

[13] Isac G.: *The (M) - (L) type duality for locally convex lattices*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl., Tom XVI, Nr. 2 (1971), p. 217 - 223.

[14] *** : *Sur l'existence de l'optimum de Pareto*, Rev. Mat. Univ. Parma (4) 9 (1983), p. 303 - 325.

[15] Kasahara S.: *On fixed point in partially ordered sets and Kirk-Caristi theorem*, Math. Seminar Notes XXXV, Kobe University 2 (1975).

[16] Kirk W.A.: *Caristi's fixed point theorem and the theory of normal solvability*, (In: Proc. Seminar on fixed point theory and its applications, Dalhousie Univ. (1975), p. 109 - 120).

[17] *** : *Caristi's fixed point theorem and metric convexity*, Colloq. Math., 36 (1976), p. 81 - 86.

[18] Kirk W.A. and Caristi J.: *Mapping theorems in metric and Banach spaces*, Bull. Acad. Polan. Sci., 23 (1975) p. 891 - 894.

[19] Marinescu Gh. : *Espaces vectoriels pseudotopologiques et théorie des distributions*, D.V.M. Berlin (1963).

[20] Maschler M. and Peleg B.: *Stable sets and stable points of set valued dynamic systems with application to game theory*, Siam J. Control and Opt., Vol. 16, Nr. 6 (1976), p. 985 - 995.

[21] Penot J.P.: *A short constructive proof of Caristi's fixed point theorem*, Publ. Math. Univ. de Pau (1976), p. X1 - X3.

[22] Siegel J.: *A new proof of Caristi's fixed point theorem*, Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 66, Nr. 1 (1977), p. 54 - 56.

[23] Wang Chi Sang: *On a fixed point theorem of contractive type*, Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 57, Nr. 2 (1976), p. 283 - 284.

REZIME

TEOREMA O NEPOKRETNOJ TAČKI TIPA CARISTIA
U LOKALNO KONVEKSNIM PROSTORIMA. PRIMENE

U ovom radu, korišćenjem teoreme tipa Caristia iz rada 14 , dokazana je teorema o egzistenciji rešenja nelinearne jednačine u lokalnokonveksnim prostorima i teorema o nepokretnoj tački u lokalno konveksnim prostorima tipa (L).

Received by the editors December 2, 1985.