

ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ СИММЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ  
ПРЕДПОЛНЫХ КЛАССОВ ТРЕХЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ

Стойменович Иван

Природно-математички факултет. Институт за математику  
21000 Нови Сад, ул. др Илије Ђуричића бр. 4, Југославија

РЕЗЮМЕ

Целью настоящей работы является перечисление симметрических функций предполных классов трехзначной логики.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть  $P_k$  обозначает множество всех функций  $f(x_1, \dots, x_n)$ , аргументы которых определены на множестве  $E^k = \{0, 1, \dots, k-1\}$ , и таких, что  $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in E^k$ , когда  $\alpha_i \in E^k$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

Мы говорим, что функция  $f(x_1, \dots, x_1, \dots, x_n)$  существенно зависит от аргумента  $x_1$  если найдутся два набора  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)$ ,  $\alpha' = (\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha'_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)$ , где  $\alpha_i \neq \alpha'_i$ , таких что  $f(\alpha) \neq f(\alpha')$ .

Все аргументы, от которых функция  $f(x_1, \dots, x_n)$  существенно не зависит, называются фиктивными.

Функция является вырожденной, если имеет фиктивные аргументы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Суперпозицией функций системы  $\{f_1, f_2, \dots, f_s, \dots\} \subset P_k$  называется:

- а) любая функция, которая получается из функций системы путем замены переменных.

---

AMS Mathematics subject classification (1980): Primary 03B50, Secondary 05A15

Key words and phrases: Three-valued logic algebra, precomplete sets, symmetric functions, enumeration.

б) любая функция, которая получается путем замены переменных и добавления любого конечного числа фиктивных аргументов из функций

$F(F_1(y_{11}, \dots, y_{1m_1}), \dots, F_p(y_{p1}, \dots, y_{pm_p}))$ , где  $F(y_1, \dots, y_p)$  - суперпозиция функций системы и либо  $F_i(y_{i1}, \dots, y_{im_i})$  является суперпозицией функций системы, либо  $F_i(y_{i1}, \dots, y_{im_i})$  есть  $y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ) (здесь не предполагается, что все функции  $F, F_1, \dots, F_p$  различные).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.** Система функций из  $P_k$  называется полной в  $P_k$ , если каждая функция из  $P_k$  является суперпозицией функций этой системы.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.** Класс функций  $N \subseteq P_k$  называется предполным в  $P_k$  если  $N$  представляет неполную в  $P_k$  систему, но присоединение любой функции  $f \in P_k \setminus N$  обращает  $N$  в полную в  $P_k$  систему.

**ТЕОРЕМА 1.** В  $P_3$  существует в точности следующих 18 предполных классов ([6]):

1. Класс  $L$  линейных функций.  $f(x_1, \dots, x_n) \in L \Leftrightarrow f(x_1, \dots, x_n) = a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \pmod{3}$ ,  $a_j \in \{0, 1, 2\}$ ,  $0 \leq i \leq n$ .
2. Класс  $V$  самодвойственных функций.  
 $f(x_1, \dots, x_n) \in V \Leftrightarrow f(x_1 + 1, \dots, x_n + 1) = f(x_1, \dots, x_n) + 1$ .
3. Класс функций  $T$ . Этот класс содержит те и только те функции, которые либо являются функциями, существенно зависящими от одного переменного, либо функциями, выпускающими хоть одно значение.
4. Класс функций  $T_0$ .
5. Класс функций  $T_1$ .
6. Класс функций  $T_2$ .  
 $f(x_1, \dots, x_n) \in T_i \Leftrightarrow f(i, \dots, i) = i$ ,  $i \in \{0, 1, 2\}$ .

7. Класс функций  $T_{01}$ .

8. Класс функций  $T_{02}$ .

9. Класс функций  $T_{12}$ .

$f(x_1, \dots, x_n) \in T_{ij}$  тогда и только тогда, если для любого набора  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , состоящего из  $i$  и  $j$ ,  $f(\alpha)$  равно либо  $i$ , либо  $j$ . ( $i, j \in \{0, 1, 2\}$ ,  $i \neq j$ ).

10. Класс функций  $U_{01}$ .

11. Класс функций  $U_{02}$ .

12. Класс функций  $U_{12}$ .

Пусть  $\{i, j, m\} = \{0, 1, 2\}$ .  $f(x_1, \dots, x_n) \in U_{ij}$  тогда и только тогда, если для любых чисел  $1 \leq p_1 < p_2 < \dots < p_s \leq n$  на всех наборах  $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ , где

$$\beta_r = \begin{cases} m & \text{при } r = p_\ell \ (\ell = 1, 2, \dots, s) \\ \neq m & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

функция  $f(x_1, \dots, x_n)$  либо принимает только значения  $i$  и  $j$ , либо  $\equiv m$ .

13. Класс  $M_1$  монотонных функций относительно порядка  $0 < 1 < 2$ . Функция  $f(x_1, \dots, x_n)$  является монотонной, если из  $x_i \leq y_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  следует  $f(x_1, \dots, x_n) \leq f(y_1, \dots, y_n)$  для любых наборов  $(x_1, \dots, x_n)$  и  $(y_1, \dots, y_n)$ .

14. Класс  $M_2$  монотонных функций относительно порядка  $1 < 2 < 0$ ,

15. Класс  $M_0$  монотонных функций относительно порядка  $2 < 0 < 1$ .

16. Класс функций  $B_0$

17. Класс функций  $B_1$

18. Класс функций  $B_2$

Пусть  $\{i, j, m\} = \{0, 1, 2\}$ .  $f(x_1, \dots, x_n) \in V_1$  тогда и только тогда, если для любых чисел  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  равных  $j$  и  $m$ , функция  $f(x_1, \dots, x_n)$  на всех наборах  $(\beta_1, \dots, \beta_n)$  таких, что  $\beta_s \neq \alpha_s$  ( $s = 1, \dots, n$ ), принимает значения, не равные  $c(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , где  $c(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = j$  или  $m$ .

## 2. ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ СИММЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В $P_k$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.**  $n$ -местная функция  $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k$  называется симметрической если  $f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n)$ , где  $(y_1, \dots, y_n)$  - любая перестановка  $(x_1, \dots, x_n)$ .

Симметрические функции находят приложения в теории контактных схем ([1], [2], [3]).

Из определения вытекает, что значение симметрической  $n$ -местной функции одинаково для всех наборов, имеющих одинаковое число 0, одинаковое число 1, ..., одинаковое число  $k-1$ . Поэтому можно писать

$$f(m_0, m_1, \dots, m_{k-1}) = f(\underbrace{0, \dots, 0}_{m_0}, \underbrace{1, \dots, 1}_{m_1}, \dots, \underbrace{k-1, \dots, k-1}_{m_{k-1}}), \text{ где}$$

$$m_0 + m_1 + \dots + m_{k-1} = n.$$

Пусть  $k(X)_s(n)$  обозначает число симметрических  $n$ -местных функций множества  $X$ .

$$\text{ТЕОРЕМА 2. } k(P_k)_s(n) = k \binom{n+k-1}{k-1} \quad (n \geq 0).$$

**Доказательство:** Число различных наборов  $(m_0, \dots, m_{k-1})$  таких, что  $m_0 + \dots + m_{k-1} = n$  равно числу сочетаний с повторениями  $n$  элементов класса  $k$ . Каждый набор может иметь  $k$  значений  $(0, 1, \dots, k-1)$ . Из этих фактов вытекает результат.

**ТЕОРЕМА 3.** Вырожденными  $n$ -местными симметрическими функциями в  $P_k$  являются только константы  $0, 1, \dots, k-1$ .

**Доказательство:** Пусть  $x_1$  фиктивный аргумент функции  $f(x_1, \dots, x_n)$ , т.е.

$$f(0, x_2, \dots, x_n) = f(1, x_2, \dots, x_n) = \dots = f(k-1, x_2, \dots, x_n).$$

Из этого равенства и определения симметрической функции вытекает

$$\begin{aligned} f(\underbrace{0, \dots, 0}_{m_0}, \underbrace{1, \dots, 1}_{m_1}, \dots) &= f(\underbrace{1, 0, \dots, 0}_{m_0}, \underbrace{1, \dots, 1}_{m_1-1}, \dots) = \\ &= f(\underbrace{0, \dots, 0}_{m_0+1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{m_1-1}, \dots), \quad \text{т.е.} \end{aligned}$$

$$f[m_0, m_1, \dots, m_{k-1}] = f[m_0+1, m_1-1, \dots, m_{k-1}].$$

Пользуясь этим равенством, мы получаем

$$\begin{aligned} f[m_0, m_1, \dots, m_{k-1}] &= f[m_0+1, m_1-1, \dots, m_{k-1}] = \dots = f[m_0+m_1, 0, \\ m_2, \dots, m_{k-1}] &= \dots = f[m_0 + m_1 + \dots + m_{k-1}, 0, \dots, 0] = \\ &= f[n, 0, \dots, 0]. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что функция является константой.

### 3. ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ СИММЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПРЕДПОЛНЫХ КЛАССОВ В $\mathbb{P}_3$

Целью статьи является нахождение чисел  $k(X)_s(n)$  для всех предполных классов трехзначной логики.

$$\text{ТЕОРЕМА 4. } k(L)_s(n) = \begin{cases} 3 & \text{для } n = 0 \\ 9 & \text{для } n \geq 1. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть  $f(x_1, \dots, x_n) = a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \pmod{3}$ . Из  $f[1, n-1, 0] = a_0 + a_1 = \dots = a_0 + a_n$  следует, что  $a_i = a_j$  ( $1 \leq i, j \leq n$ ). Этому классу принадлежат симметрические функции  $0, 1, 2, x_1 + \dots + x_n, 1 + (x_1 + \dots + x_n), 2 + (x_1 + \dots + x_n), 2(x_1 + \dots + x_n), 1 + 2(x_1 + \dots + x_n), 2 + 2(x_1 + \dots + x_n)$ .

ТЕОРЕМА 5.

$$k(V)_S(n) = \begin{cases} 0 & \text{для } n=3m \\ \frac{1}{3} \binom{n+2}{2} & \text{для } n=3m+1 \text{ и } n=3m+2. \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим две возможности.

1.  $n = 3m$ . Пусть  $f[m, m, m] = a$ . Поскольку функция  $f$  самодвойственна, из  $f[m_0, m_1, m_2] = a$  следует  $f[m_1, m_2, m_0] = a+1$ . Поэтому из  $f[m, m, m] = a$  следует  $f[m, m, m] = a + 1$ . Это противоречие.

2.  $n \neq 3m$ . Из  $f[m_0, m_1, m_2] = a$  следует  $f[m_1, m_2, m_0] = a + 1$  и  $f[m_2, m_0, m_1] = a + 2$ . Утверждение следует из того, что наборы  $[m_0, m_1, m_2]$ ,  $[m_1, m_2, m_0]$  и  $[m_2, m_0, m_1]$  попарно различны.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть  $\{i, j, m\} = \{0, 1, 2\}$ . Обозначим через  $D(i, j)$  множество функций  $f$ , которых  $f(x_1, \dots, x_n) \neq m$  для всех наборов  $(x_1, \dots, x_n)$ .

ТЕОРЕМА 6.

$$k(T)_S(n) = \begin{cases} 27 & \text{для } n = 1 \\ 3 \cdot 2 \binom{n+2}{2} - 3 & \text{для } n \neq 1. \end{cases}$$

Из определения класса  $T$  следует  $T = D(0, 1) \cup D(0, 2) \cup D(1, 2)$  ( $n \geq 2$ ). Число  $n$ -местных симметрических функций множества

$D(i, j)$  равно  $2 \binom{n+2}{2}$ . Утверждение следует из того, что пересечение  $D(i, j)$  и  $D(j, m)$  содержит только константу  $j$ .

ТЕОРЕМА 7.

$$k(T_0)_S(n) = k(T_1)_S(n) = k(T_2)_S(n) = 3 \binom{n+2}{2} - 1.$$

Доказательство. Следует из

$$f \in T_0 \Leftrightarrow f(n, 0, 0) = 0.$$

ТЕОРЕМА 8.

$$k(T_{01})_s(n) = k(T_{02})_s(n) = k(T_{12})_s(n) = 2^{n+1} \cdot 3^{\binom{n+2}{2} - n - 1}$$

Доказательство. Следует из

$$f \in T_{01} \Leftrightarrow f[m_0, m_1, 0] \in \{0, 1\} (m_0 + m_1 = n).$$

ТЕОРЕМА 9.

$$k(U_{01})_s(n) = k(U_{02})_s(n) = k(U_{12})_s(n) = \prod_{i=1}^{n+1} (2^i + 1).$$

Доказательство. Для фиксированного  $m_2$  существует  $n - m_2 + 1$  наборов  $[m_0, m_1, m_2]$  ( $m_0 + m_1 = n - m_2$ ). Из определения  $U_{01}$  следует, что значение функции для каждого из этих наборов принадлежит множеству  $\{0, 1\}$ , или  $\mathbb{Z}$ . Поэтому существует  $2^{n - m_2 + 1} + 1$  возможностей для значений  $f[m_0, m_1, m_2]$  при фиксированном  $m_2$ . Утверждение теоремы следует из независимости значений функции для различных  $m_2$ .

ТЕОРЕМА 10. ([4], [5])

$$k(M_1)_s(n) = k(M_0)_s(n) = k(M_2)_s(n) = \binom{2n+3}{n+1}.$$

ТЕОРЕМА 11.

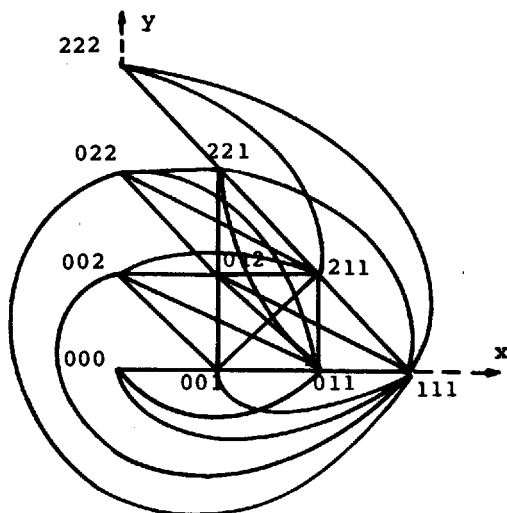
$$k(B_1)_s(n) = k(B_0)_s(n) = k(B_2)_s(n) =$$

$$= 1 + 2 \sum_{\substack{1 \leq s \leq n+1 \\ e_s > 0}} \frac{\left( \sum_{s=1}^{n+1} e_s \right)!}{\prod_{s=1}^{n+1} e_s!} \prod_{s=1}^{n+1} \left( 2^{\binom{s+1}{2}} - 2^{\binom{s}{2}} \right) e_s$$

Доказательство. Определим  $k(B_1)_s(n)$ .

Изобразим неориентированный граф наборов  $[z, x, y]$  в системе координат. Соединим только те наборы  $\alpha' = (\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)$  и  $\alpha'' = (\alpha''_1, \dots, \alpha''_n)$ , для которых существует набор  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,

$\alpha_1 \in \{0, 2\}$ , такой что  $\alpha'_1 \neq \alpha_1, \alpha''_1 \neq \alpha_1$  ( $1 \leq i \leq n$ ). Для соединенных наборов  $\alpha'$  и  $\alpha''$ ,  $f(\alpha') \neq 0$  или  $f(\alpha'') \neq 2$ . На рисунке представлен граф для  $n = 3$ .



Из определения  $B_1$  следует, что наборы  $[z; x; y']$  и  $[z'; x'; y'']$  соединены тогда и только тогда, когда  $y'' \leq x' + y'$  и  $y' \leq x'' + y''$ .

Граф  $(n + 1)$ -членных наборов получается из  $n$ -членных наборов следующим образом:

- 1)  $n$ -членному набору  $[z, x, y]$  отвечает  $n+1$ -членный набор  $[z+1, x, y]$ .
- 2) Граф дополняется вершинами  $[0, x, y]$ ,  $x+y = n+1$ .
- 3) Вершина  $[0, x, y]$  ( $x+y = n+1$ ) соединяется с вершинами  $[z'; x'; y']$  ( $z' + x' + y' = n + 1$ ) для которых  $z' \leq x$ , т.е.  $n+1 \leq x + x' + y'$ .

Пусть  $k_0$  наименьшее число нулей, для которого существует набор  $[z, x, y]$  ( $z+x+y = n$ ) такой, что  $f[z, x, y] = 0$ . т.е.  $k_0 = \min_z (f[z, x, y] = 0)$ . Если  $f[z, x, y] \neq 0$  для всех наборов пусть  $k_0 = n + 1$ .



Подобным образом пусть  $k_2 = \min_z (f[z, x, y] = 2)$ .

Обозначим через  $g_{k_0, k_2}(n)$  число симметрических  $n$ -местных

функций  $f$  для которых  $\min_z (f[z, x, y] = 0) = k_0$  и

$\min_z (f[z, x, y] = 2) = k_2$ . Каждая функция  $f$  из  $g_{k_0, k_2}(n)$

переходом с графа  $n$ -членных наборов к графе  $n+1$ -членных наборов определяет:

1) одну функцию  $f'$  из  $g_{k_0+1, k_2+1}(n+1)$  если  $f'[0, x, y] = 1$  для всех  $x, y, x+y = n+1$ .

2) функции  $f'$  из  $g_{k_0+1, 0}(n+1)$ , для которых

$$f'[0, x, y] = \begin{cases} 1 & \text{для } y \leq n - k_0 \\ \in \{1, 2\} & \text{для } y > n - k_0 \end{cases}$$

и для которых существует набор  $[0, x, y]$  такой, что  $f'[0, x, y] = 2$ . Число таких функций  $f'$  равно  $2^{k_0+1} - 1$ .

3) функции  $f'$  из  $g_{0, k_2+1}(n+1)$ , для которых

$$f'[0, x, y] = \begin{cases} 1 & \text{для } y \leq n - k_2 \\ \in \{1, 0\} & \text{для } y > n - k_2 \end{cases}$$

и для которых существует набор  $[0, x, y]$  такой, что  $f'[0, x, y] = 0$ .

Число таких функций  $f'$  равно  $2^{k_2+1} - 1$ .

Из этого замечания вытекают следующие равенства.

$$(1) \quad g_{k_0+1, k_2+1}(n+1) = g_{k_0, k_2}(n), \quad k_0, k_2 \geq 0,$$

$$g_{k_0+1, 0}(n+1) = (2^{k_0+1} - 1) \sum_{k_2=0}^{n+1} g_{k_0, k_2}(n),$$

$$g_{k_2, k_0}(n) = g_{k_0, k_2}(n)$$

$$g_{0, 0}(n) = 0, \quad g_{0, 0}(0) = 0, \quad g_{1, 1}(0) = 1, \quad g_{1, 0}(0) = 1.$$

Из этой системы для  $k_0 > k_2$  получаем

$$(2) \quad g_{k_0, k_2}^{(n)} = g_{k_0-1, k_2-1}^{(n)} = \dots = g_{k_0-k_2, 0}^{(n-k_2)}$$

Из определения  $g_{k_0, k_2}^{(n)}$  следует

$$(3) \quad k(B_1)_s(n) = \sum_{0 \leq k_0, k_2 \leq n+1} g_{k_0, k_2}^{(n)} \quad (n \geq 0).$$

В таблице представлены числа  $k(B_1)_s(n)$  для  $n \leq 4$ .

n	0	1	2	3	4
$k(B_1)_s(n)$	3	17	155	2409	72721

Пусть  $h(k, n) = g_{k, 0}^{(n)}$ .

Из (1), (2) и (3) следует

$$\begin{aligned} (4) \quad k(B_1)_s(n+1) &= \sum_{0 \leq k_0, k_2 \leq n+2} g_{k_0, k_2}^{(n+1)} = \\ &= g_{0, 0}^{(n+1)+2} \sum_{1 \leq k_0 \leq n+2} g_{k_0, 0}^{(n+1)} + \sum_{1 \leq k_0, k_2 \leq n+1} g_{k_0, k_2}^{(n+1)} = \\ &= 2 \sum_{1 \leq k \leq n+2} h(k, n+1) + \sum_{0 \leq k_0, k_2 \leq n+1} g_{k_0, k_2}^{(n)} = \\ &= 2 \sum_{1 \leq k \leq n+2} h(k, n+1) + k(B_1)_s(n). \end{aligned}$$

Из (1) и (2) получаем

$$\begin{aligned} h(k, n) = g_{k, 0}^{(n)} &= (2^k - 1) \sum_{k_2=0}^n g_{k-1, k_2}^{(n-1)} = \\ &= (2^k - 1) (g_{k-1, 0}^{(n-1)} + \sum_{k_2=1}^n g_{k-1, k_2}^{(n-1)}) = \\ &= (2^k - 1) (h(k-1, n-1) + \sum_{k_2=1}^n g_{k-2, k_2-1}^{(n-2)}) = \\ &= (2^k - 1) (h(k-1, n-1) + \frac{h(k-1, n-1)}{2^{k-1}-1}) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2^{\frac{k-1}{2} \frac{2^k - 1}{2^{k-1} - 1}} h(k-1, n-1) = \frac{2^k - 1}{2^{k-1} - 1} 2^{k-1} \cdot \frac{2^{k-1} - 1}{2^{k-2} - 1} 2^{k-2} h(k-2, n-2) = \\
 &= \dots = (2^k - 1) 2^{k-1} \cdot 2^{k-2} \dots \frac{2^1}{2^1 - 1} \cdot h(1, n-k+1).
 \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$(5) \quad h(k, n) = (2^{\binom{k+1}{2}} - 2^{\binom{k}{2}}) h(1, n-k+1).$$

$$\text{Из } h(1, n) = g_{1,0}(n) = (2^1 - 1) \sum_{k_2=0}^n g_{0,k_2}(n-1) = \sum_{k=1}^n h(k, n-1)$$

следует, пользуясь (4),

$$(6) \quad k(B_1)_S(n-1) = k(B_1)_S(n-2) + 2h(1, n), \quad (n \geq 2)$$

$$(7) \quad h(1, n) = \sum_{k=1}^n h(k, n-1) = \sum_{k=1}^n (2^{\binom{k+1}{2}} - 2^{\binom{k}{2}}) h(1, n-k) \quad (\text{из (5)}).$$

Из (6) следует

$$\sum_{i=0}^n k(B_1)_S(i) = 2 \sum_{i=0}^n h(1, i+1) + \sum_{i=0}^n k(B_1)_S(i-1), \quad \text{т.е.}$$

$$(8) \quad k(B_1)_S(n) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n h(1, k).$$

$$\text{Пусть } a_k = 2^{\binom{k+1}{2}} - 2^{\binom{k}{2}}.$$

Для определения  $h(1, n)$  пользуемся равенством (7).

$$h(1, n) = \sum_{k=1}^n a_k h(1, n-k)$$

$$h(1, 1) = a_1$$

$$h(1, 2) = a_1 \cdot a_1 + a_2 = a_1^2 + a_2$$

$$h(1, 3) = (a_1^2 + a_2) \cdot a_1 + a_1 a_2 + a_3 = a_1^3 + 2a_1 a_2 + a_3$$

$$\begin{aligned}
 h(1, 4) &= (a_1^3 + 2a_1 a_2 + a_3) \cdot a_1 + (a_1^2 + a_2) \cdot a_2 + a_1 a_3 + a_4 = \\
 &= a_1^4 + 3a_1^2 a_2 + 2a_1 a_3 + a_2^2 + a_4.
 \end{aligned}$$

Индукцией легко можно доказать, что  $h(1, n)$  содержит все возможные произведения  $a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_j}$ , для которых

$$i_1 + i_2 + \dots + i_j = n, \quad i_1, i_2, \dots, i_j > 0.$$

Индексы  $i_1, i_2, \dots, i_j$  отвечают разбиениям числа  $n$ , т.е. представлениям числа  $n$  в виде суммы целых положительных чисел с существенным порядком.

Обозначим через  $e_s$  число  $i_s$  в разбиении числа  $n$ .

Наждом разбиении  $i_1 + i_2 + \dots + i_j = n$  для которого

$i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_s$  отвечает  $\frac{(e_1 + \dots + e_j)!}{e_1! e_2! \dots e_j!}$  разбиений с учетом порядка слагаемых. Из этих замечаний следует

$$(9) \quad h(1, n) = \sum_{\substack{e_1 + 2e_2 + \dots + ne_n = n \\ e_j > 0}} \frac{(e_1 + \dots + e_n)!}{e_1! \dots e_n!} a_1^{e_1} \dots a_n^{e_n}.$$

Утверждение теоремы 11 следует из (8) и (9).

Число симметрических невырожденных функций наждого предполного класса можно легко определить пользуясь теоремой 3 и теореммы 4 - 11.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Born R.C., Scidmore A.K., *Transformation of Switching Functions to Completely Symmetric Switching Functions*, *IEEE Trans. Computers*, Vol. c-17, 596-599, June 1968.
- [2] Caldwell S.H., *The Recognition and Identification of Symmetric Switching Functions*. *Trans. AIEE.*, 1954, Vol. 73, pt.1, 142-147.
- [3] Epstein G., *Synthesis of Electronic Circuits for Symmetric Functions*, *IRE Trans.*, 1958, Vol. EC-7, No.1, 57-60.

- [4] Стойменович И., Тошич Р., Перечисление монотонных симметрических функций трехзначной логики, Сборник радова ПМФ, серија за математику, 13, Нови Сад, 1983, 367-373.
- [5] Tošić R., Doroslovački R., *A Combinatorial Identity and its Applications*, *Zbornik radova PMF, serija za matematiku*, 12, Novi Sad, 1982, 319-326.
- [6] Яблонский С.В., Функциональные построения в  $n$ -значных логиках, Труды МИ АН СССР, Т.51, Москва, 1958, 5-142.

Received by the editors March 9, 1983.

#### REZIME

#### PREBROJAVANJE SIMETRIČNIH FUNKCIJA SKORO KOMPLETNIH SKUPOVA TROZNAČNE LOGIKE

U radu je odredjen broj  $n$ -arnih simetričnih funkcija za svaki od 18 skoro kompletnih skupova troznačne logike.