Zbornik radova Prirodno-matematičkog fakulteta-Univerzitet u Novom Sadu
knjiga 13 (1983)
Review of Research Faculty of Science-University of Novi Sad, Volume 13 (1983)

ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ МОНОТОННЫХ СИММЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ТРЕХЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ

Стойменович И., Тошич Р.
Природно-математички факултет. Институт за математику,
21000 Нови Сад, ул.др Илије Ђуричића бр.4, Југославија

РЕЗЮМЕ

В работе доказано что число n-местных монотонных симметрических функций трехзначной логики равно $\binom{2n+3}{n+1}$.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $E_3 = \{0,1,2\}$ и P_3^n множество всех функций $f : E_3^n \to E_3$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция $f(x_1,\ldots,x_n) \in P_3^n$ называется монотонной относительно порядка $0 < 1 < 2$, если для любых наборов $a = (a_1,\ldots,a_n)$ и $b = (b_1,\ldots,b_n)$, таких что $a \le b$, имеет место соотношение $f(a) \le f(b)$, где $a \le b$ если $a_i \le b_i$ $(1 \le i \le n)$.

Обозначим через M множество всех монотонных функций трехзначной логики.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функция $f(x_1,\ldots,x_n) \in P_3^n$ называется симметрической если $f(x_1,\ldots,x_n) = f(y_1,\ldots,y_n)$ для лыбой перестановки $(y_1,\ldots,y_n)$ переменных $(x_1,\ldots,x_n)$.

В настоящей работе определяется число симметрических n-местных функций трехзначной логики.

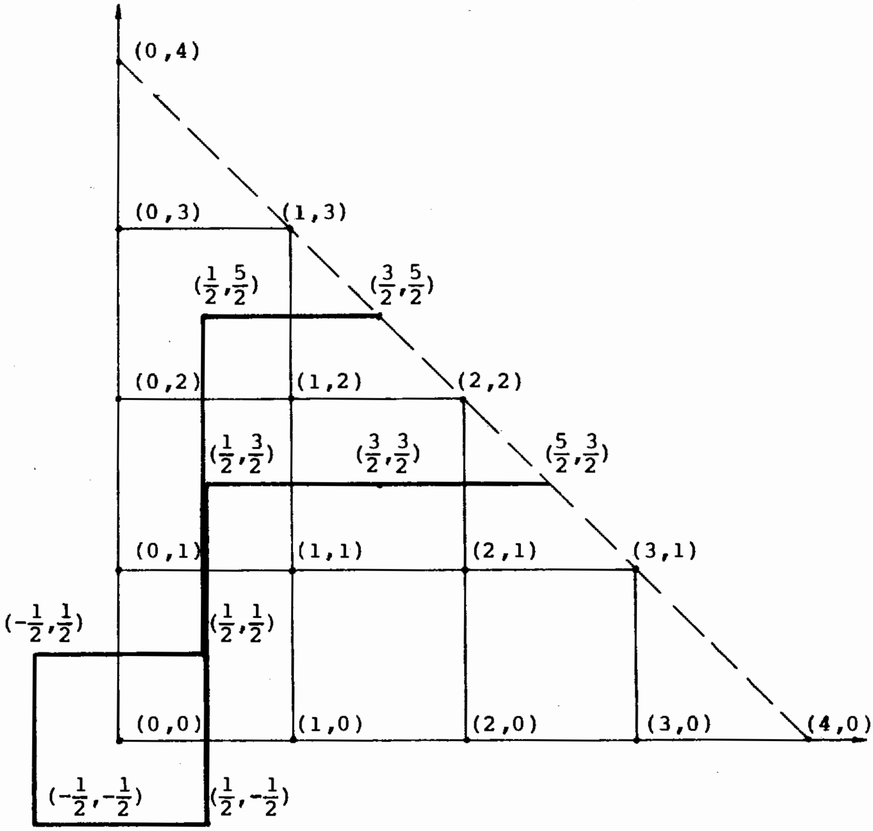
AMS Mathematics subject classification (1980): Primary 03B50; Secondary 05A15
Key words and phrases: Three-valued logic algebra, precomplete sets, symmetric monotone functions, enumeration.

Пусть S_n обозначает множество всех симметрических n-местных функций трехзначной логики и $k(X)$ кардинальное число множества X.

2. ТЕОРЕМА

ТЕОРЕМА. $K(M \cap S_n) = \binom{2n+3}{n+1}$.

Доказательство. Изобразим все наборы $(0,\ldots,0,1,\ldots,1,2,\ldots,2)$ в координатной плоскости точками (x,y). Число нулей в наборе обозначим через x, число двоек через y (тогда число единиц $z = n - x - y$). На рисунке представлени наборы для $n = 4$.



Пусть $L_{n+1}^{(2)}$ множество всех точек $(p,q) \in N$ в координатной плоскости таких что $p \geq 0$, $q \geq 0$, $p + q \leq n$. Легко увидеть что каждая монотонная симметрическая функция $f : E_3^n \to E_3$ однозначно определяет монотонную функцию $F : L_{n+1}^{(2)} \to E_3$, т.е. такую что $(x',y') \leq (x'',y'') \Rightarrow F(x',y') \leq F(x'',y'')$, где $(x',y') \leq (x'',y'') \Leftrightarrow x' \geq x'' \wedge \wedge\, y' \leq y''$. Поэтому $k(M \cap S_n)$ равно числу монотонних функций $F : L_{n+1}^{(2)} \to E_3$.

Пусть A_i $(i = 0,1,2)$ множество точек $(x,y) \in L_{n+1}^{(2)}$ для которих $F(x,y) = i$. Этими множествами функция F определена однозначно.

Для монотонной функции F, множества A_i можно выделит двумя ломаными линиями с началом в точке $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$, состоящим от $n+1$ отрезков. Каждий отрезак соединяет точку (u,v) с одной из точек $(u,v+1)$ или $(u+1,v)$. Отрезок, концы которого (u,v) и $(u,v+1)$, обозначим через 1, а отрезок, концы которого точки (u,v) и $(u+1,v)$ - через 0. На рисунке, например, двумя ломаными представлены последовательности 10110 и 01100.

Две последовательности $a_1a_2 \ldots a_{n+1}$ и $b_1b_2 \ldots b_{n+1}$; $a_i, b_i \in \{0,1\}$, $1 \leq i \leq n+1$, определьют множества A_o, A_1, A_2 монотонной функции тогда и только тогда, когда для каждого k $(1 \leq k \leq n+1)$ в последовательности $a_1a_2 \ldots a_k$ число единиц не меньше числа единиц в последовательности $b_1b_2 \ldots b_k$. Это имеет место тогда и только тогда, когда в последовательности $c_1c_2 \ldots c_{n+1}$, где $c_i = 2a_i + b_i$, для каждого $k \in \{1,2,\ldots,n+1\}$, число двоек в последовательности $c_1c_2 \ldots c_k$ не меньше числа единиц.

Прежде чем продолжить доказательство, дадим следующие определения:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Последовательность $c_1c_2 \ldots c_n$, $(c_i \in \{0,1,2,3\}$, $1 \leq i \leq n)$ называется <u>характеристической</u> если для каждого k, $1 \leq k \leq n$, число двоек в последовательности $c_1c_2 \ldots c_k$ не меньше числа единиц в той же последовательности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Разность числа двоек и числа единиц в последовательности $c_1c_2\ldots c_n$ называется m-число этой последовательности.

Ясно что последовательность $c_1c_2\ldots c_{n+1}$ определяет множества A_i $(i = 0,1,2)$ некоторой монотонной функции $F : L_{n+1}^{(2)} \to E_3$ тогда и только тогда, когда эта последовательность является характеристической.

Из этого утверждения вытекает следующая лемма:

ЛЕММА 1. Число монотонных симметрических n-местных функций трехзначной логики равно числу характеристических последовательностей $c_1c_2\ldots c_{n+1}$.

Пусть $t(n)$ обозначает число характеристических последовательностей $c_1c_2\ldots c_n$. Из лемми 1, следует что $k(M \cap S_n) = t(n+1)$.

Пусть $t_i(n)$ обзначает число характеристических последовательностей са m-числом i. Из определения характеристической последовательности следует что

$$t_{-1}(n+1) = t_{n+1}(n) = t_{n+2}(2) = 0.$$

ЛЕММА 2. $t_i(n+1) = t_{i-1}(n) + 2t_i(n) + t_{i+1}(n)$, $0 \leq i \leq n+1$.

Доказательство. Вытекает из следующего утверждения:

m-число характеристической последовательности $c_1c_2\ldots c_{n+1}$ равно i тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих трех условий:

(1) m-число характеристической последовательности $c_1c_2\ldots c_n$ равно $i-1$ и $c_{n+1} = 2$;
(2) m-число характеристической последовательности $c_1c_2\ldots c_n$ равно i и $c_{n+1} = 0$ или $c_{n+1} = 3$;
(3) m-число характеристической последовательности $c_1c_2\ldots c_n$ равно $i+1$ и $c_{n+1} = 1$.

ЛЕММА 3. $t_i(n) = \binom{2n}{n+i} - \binom{2n}{n+i+2}$, $0 \le i \le n$.

Доказазельство. Для $n = 1$, легко проверяется что $t_o(1) = 2$ (последовательности 0 и 3), $t_1(1) = 1$ (последовательность 2).

Пусть утверждение теоремы верно для $n = k$. Докажем, что тогда оно верно и для $n = k+1$.

Из леммы 2 следует:

$$t_i(k+1) = t_{i-1}(k) + 2t_i(k) + t_{i+1}(k) =$$
$$= \binom{2k}{k+i-1} - \binom{2k}{k+i-1+2} + 2\left(\binom{2k}{k+i} - \binom{2k}{k+i+2}\right) +$$
$$+ \binom{2k}{k+i+1} - \binom{2k}{k+i+1+2} = \binom{2k}{k+i+1} + 2\binom{2k}{k+i} + \binom{2k}{k+i-1} -$$
$$- \binom{2k}{k-i-3} - 2\binom{2k}{k+i+2} - \binom{2k}{k+i+1} = \binom{2k+1}{k+i+1} + \binom{2k+1}{k+i} -$$
$$- \binom{2k+1}{k+i+3} - \binom{2k+1}{k+i+2} = \binom{2k+2}{k+i+1} - \binom{2k+2}{k+i+3} .$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Число характеристических последовательностей $c_1c_2\ldots c_n$ равно $\binom{2n+1}{n}$.

Доказательство.

$$t(n) = \sum_{i=0}^{n} t_i(n) = \sum_{i=0}^{n}\left(\binom{2n}{n+i} - \binom{2n}{n+i+2}\right) =$$
$$= \binom{2n}{n} + \binom{2n}{n+1} = \binom{2n+1}{n}.$$

Из лемм 1 и 4 непосредственно следует утверждение теоремы.

3. НЕКОТОРЫЕ СЛЕДСТВИЯ ТЕОРЕМЫ

Следствие 1. $\sum_{r=0}^{n} 2^{n-r} \binom{n}{r}\binom{r}{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} = \binom{2n+1}{n}$.

($\lfloor x \rfloor$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x.)
Следствие доказывается пользуясь двумя следующими леммами:

ЛЕММА 5. ([1]) Существует $\binom{r}{i} - \binom{r}{i-1}$ характеристических последовательностей $c_1c_2\ldots c_r$ таких, что $c_j \in \{1,2\}$, $1 \le j \le r$ и что число единиц в последовательности равно i.

ЛЕММА 6. Существует $\binom{r}{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}$ характеристических последовательностей $c_1c_2\ldots c_r$ таких, что $c_j \in \{1,2\}$, $1 \le j < r$.

Доказательство. Следует из равенства

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} \left(\binom{r}{i} - \binom{r}{i-1}\right) = \binom{r}{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}.$$

Следствие 1 доказывается вычислением числа харантерических последовательностей $c_1c_2\ldots c_n$, в которых имеется r единиц и двоек, суммированием по r и пользованием леммы 4.
В статьи [3] доказывается следствие 1 другим образом и определяется число $k(M \cap S_n)$ пользуясь этим следствием.

Следствие 2.

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor} 2^{n-2i-k}\binom{n}{2i+k}\left(\binom{2i+k}{i} - \binom{2i+k}{i-1}\right) = \binom{2n}{n+k}-\binom{2n}{n+k+2}.$$

Доказательство. Вытекает из лемм 3 и 5.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Виленкин Н.Я., Популярная комбинаторика, "Наука", Москва, 1975.

[2] Коршунов Д.А., О числе монотонных булевых функций, Проблемы кибернетики, 38 (1981), 5-109, Наука, Москва.

[3] Tošić R., Doroslovački R., *A Combinatorial Identity and its Applications, Zbornik radova Prir.-mat.fak., serija za matematiku, 12 (1982), 319-326.*

Received by the editors March 9, 1983.

REZIME

PREBROJAVANJE MONOTONIH SIMETRIČNIH FUNKCIJA TROZNAČNE LOGIKE

U radu je dokazano da je broj n-arnih simetričnih monotonih funkcija troznačne logike

$$\binom{2n+3}{n+1} .$$