Zbornik radova Prirodno-matematičkog fakulteta-Univerzitet u Novom Sadu
knjiga 11 (1981)
Review of Research Faculty of Science-University of Novi Sad, Volume 11(1981)

ТИПИ БАЗИСОВ ДЛЯ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

Ратко Тошич
Природно-математички факултет.Институт за математику, 21000 Нови Сад, ул. др Илије Ђуричића 4, Југославија

1. ВВЕДЕНИЕ

Е. Постом (|5|,|7|) подробно изучена структура алгебры логики и ее основные свойства. А.И.Мальцев (|4|) предложил рассматривать алгебру к-значной логики как множество $P_к$ к-значных функций с операциями отождествления аргументов, их перестановки приписывания фиктивного аргумента и суперпозиции. Эта алгебра была названа к-значной алгеброй Поста. Алгебры Поста находят широкие приложения в теории автоматов. В.М. Глушков предложил рассматривать алгебры, которые являются модификациями алгебр Поста и связаны с операцией композиции $\otimes$, определяемой тождеством

$$(f \otimes g)(x_1,x_2,\ldots,x_{m+n-1}) = f(g(x_1,x_2,\ldots,x_n),$$
$$(g(x_2,x_3,\ldots,x_{n+1}),\ldots,g(x_m,x_{m+1},\ldots,x_{m+n-1})) ,$$

где f,g- произвольные m-местная и n-местная функции. Эти алгебры находят приложения при рассмотрении логических структур ЭЦВМ (|1|, |2|).

Г.Е.Цейтлин (|6|) исследовал проблематику функциональной полноты для алгебры булевских функции система операции которой в отличие от алгебр Поста содержит вместо суперпозиции операцию $\otimes$ Г.Е.Цейтлин доказал теорему подобную теореме Поста - Яблонского для алгебры Поста, дающую необходимые и достаточные условия чтобы некоторая система функции являлась системой образующих в ϕ^0 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Система функций $K \subset \phi^{o}$ называется функционально полной в ϕ^{o} если каждая функция из ϕ^{o} получается из функций системы K путём отождествления аргументов, их перестановки, приписивания фиктивного аргумента и применения операции композиции $\otimes$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Конечная полная в ϕ^{o} система функций називается базисом, если никакая из её подсистем не является полной в ϕ^{o}.

Целью настоящей статьи является исследование типов базисов для алгебры ϕ^{o}. Подобную проблему для алгебры логики P_2 исследовал Л.Крнич (|8|).

2. НЕКОТОРЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Дальше нам понадобятся нижеследующие множества:

$$T_{oo} = \{f \mid f \in \phi^{o},\ f(0,0,\dots,0) = f(1,1,\dots,1) = 0\},$$

$$T_{o1} = \{f \mid f \in \phi^{o},\ f(x,x,\dots,x) = x\},$$

$$T_{1o} = \{f \mid f \in \phi^{o},\ f(x,x,\dots,x) = x'\},$$

$$T_{11} = \{f \mid f \in \phi^{o},\ f(0,0,\dots,0) = f(1,1,\dots,1) = 1\}.$$

Заметим, что каждое из множеств T_{oo}, T_{o1}, T_{1o}, T_{11}, содержит 2^{2^n-2} функций от n аргументов $x_1, x_2, \dots, x_n$.

$$S = \{f \mid f \in \phi^{o},\ f(x_1,x_2,\dots,x_n) = f'(x_1',x_2',\dots,x_n')\}$$

т.е. множество всех самодвойственных булевских функций. Число самодвойственных функций от n аргументов равно $2^{2^{n-1}}$

$$M_1 = \{f \mid f \in \phi^{o},\ \forall(\breve{a},\breve{b})\, \breve{a} \preccurlyeq \breve{b} \Rightarrow f(a) \le f(b)\},$$

где $\breve{a} = (a_1,a_2,\dots,a_n)$, $\breve{b} = (b_1,b_2,\dots,b_n)$ и $\breve{a} \preccurlyeq \breve{b}$ если $a_i \le b_i$ $(i = 1,2,\dots,n)$, т.е. множество всех изотонных булевских функций .

$$M_2 = \{f | f \in \phi^0,\ f' \in M_1\},$$

т.е. множество всех антитонных булевсних функций.

Рассмотрим танже следующие нлассы булевсних функций:

$$M = M_1 \cup M_2\ ,$$

т.е. множество всех монотонных булевсних функций;

$$S_1 = T_{01} \cap S,$$

$$S_2 = T_{10} \cap S\ .$$

Число функций в наждом из множеств S_1, S_2 равно $2^{2^{n-1}-1}$.

Дальше нам понадобятся нижеследующие множества:

$$A = T_{00} \cup T_{01} \cup T_{11}\ ,$$

$$B = T_{00} \cup T_{11} \cup S\ ,$$

$$C = T_{00} \cup T_{11} \cup M\ ,$$

$$D = T_{01} \cup T_{10} \cup \{0,1\}.$$

Для наждого $K \subset \phi^0$, пусть $K' = \phi^0 \setminus K$. Тогда имеем:

$$A' = T_{10}\ ,$$

$$B' = (T_{01} \cup T_{10}) \setminus S\ ,$$

$$C' = (T_{01} \cup T_{10}) \setminus M\ ,$$

$$D' = (T_{00} \cup T_{11}) \setminus \{0,1\}.$$

Теорема Цейтлина о функциональной полноте в ϕ^0.

Для того чтобы система функций $K \subset \phi^0$ была полной, необходимо и достаточно чтобы ней содержались

- по крайней мере одна функция, не принадлежащая A,
- по крайней мере одна функция, не принадлежащая B,
- по крайней мере одна функция, не принадлежащая C,
- по крайней мере одна функция, не принадлежащая D.

Из этой теоремы вытенает, что из всяной полной системы функций в ϕ^0 можно выбрать полную подсистему, состоящую не более чем из четырёх функций.

3. ТИПЫ БАЗИСОВ АЛГЕБРЫ Φ^{O}

Если функция **f** принадлежит классу $X(X \in \{A,B,C,D\})$, будем говорить, что она имеет свойство X. Если функция обладает, например, свойствами **A**, **C** и не обладает свойствами **B**, **D**, будем говорить что это функция типа **A**, **C** и обозначним её через /A,C/. Две функции, обладающие одними и теми же свойствами будем называть функциями одного и того же типа. Функция /$\emptyset$/ не обладает ни одним из свойств **A,B,C,D.**

ТЕОРЕМА 1. Число различных типов функций из Φ^{O} равно 9:

1. /A,B,C,D/,	4. /A,C,D/,	7. /B,D/,
2. /A,B,C/,	5. /B,C,D/,	8. /C,D/,
3. /A,B,D/,	6. /A,D/,	9. /D/.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

I /A,B,C,D/; множество функций этого типа:

$$A\cap B\cap C\cap D = (A\cap B)\cap(C\cap D) = (T_{oo}\cup T_{11}\cup(T_{o1}\cap S))\cap M = $$
$$= (S_1\cap M_1)\cap\{0,1\}.$$

II /A,B,C/; множество функций этого типа:

$$A\cap B\cap C\cap D' = (A\cap B)\cap(C\cap D') = (T_{oo}\cup T_{11}\cup S)\cap((T_{oo}\cup T_{11})\setminus\{0,1\})=$$
$= (T_{oo}\cup T_{11})\setminus\{0,1\}$; такая, например, функция $f(x_1,x_2,x_3)= x_1+x_2$.

III /A,B,D/; множество функций этого типа:

$$A\cap B\cap C'\cap D = (A\cap B)\cap(C'\cap D) = (T_{oo}\cup T_{11}\cup(T_{o1}\cap S))\cap((T_{o1}\cup T_{1o})\setminus M)=$$
$= (T_{o1}\cap S)\setminus M = S_1\setminus M_1$; такая, например, функция $f(x_1,x_2,x_3) =$
$= x_1'x_2\vee x_1'x_3\vee x_1x_2x_3$.

IV /A,C,D/; множество функций этого типа:

$$A\cap B'\cap C\cap D = (A\cap C)\cap(B'\cap D) = (T_{oo}\cup T_{11}\cup M_1)\cap((T_{o1}\cup T_{1o})\setminus S) =$$
$=M_1\setminus(\{0,1\}\cup S_1)$; такая, например, функция $f(x_1,x_2,x_3)=x_1\vee x_2$.

V /B,C,D/; множество функций этого типа:

$A' \cap B \cap C \cap D = (A' \cap D) \cap (B \cap C) = T_{10} \cap (T_{00} \cup T_{11} \cup (M \cap S)) =$
$= S_2 \cap M_2$; такая, например,функция $f(x_1,x_2,x_3) = x_1'$.

VI /A,B/; такая функция не существует, потому что

$A \cap B \cap C' \cap D' = (A \cap B) \cap (C' \cap D') = (A \cap B) \cap ((T_{01} \cap T_{10}) \setminus M) \cap$
$\cap ((T_{00} \cup T_{11}) \setminus \{0,1\}) = (A \cap B) \cap \emptyset = \emptyset$

VII /A,C/; такая функция не существует, потому что

$A \cap B' \cap C \cap D' = (A \cap C) \cap (B' \cap D') = (A \cap C) \cap ((T_{01} \cup T_{10}) \setminus S) \cap$
$\cap ((T_{00} \cup T_{11}) \setminus \{0,1\}) = (A \cap C) \cap \emptyset = \emptyset$.

VIII /A,D/; множество функций этого типа:

$A \cap B' \cap C' \cap D = (A \cap B') \cap (C' \cap D) = (T_{01} \setminus S_1) \cap ((T_{01} \cup T_{10}) \setminus M) =$
$= T_{01} \setminus (S_1 \cup M_1)$; такая, например, функция $f(x_1,x_2,x_3) =$
$= x_1'x_2'x_3 \vee x_1x_2x_3$.

IX /B,C/; такая функция не сушествует, потому что

$A' \cap B \cap C \cap D' = (A' \cap D') \cap (B \cap C) = \emptyset \cap (B \cap C) = \emptyset$.

X /B,D/; множество функций этого типа:

$A' \cap B \cap C' \cap D = (A' \cap B) \cap (C' \cap D) = (T_{10} \cap S) \cap ((T_{01} \cup T_{10}) \setminus M) =$
$= S_2 \setminus M_2$; такая, например, функция $f(x_1,x_2,x_3) = x_1'x_2x_3 \vee x_1x_2' \vee x_1x_3'$.

XI /C,D/; множество функций этого типа:

$A' \cap B' \cap C \cap D = (A' \cap B') \cap (C \cap D) = (T_{10} \setminus S_2) \cap M = M_2 \setminus (\{0,1\} \cup S_2)$;
такая, например, функция $f(x_1,x_2,x_3) = x_2' \vee x_3'$.

XII /A/; такая функция не сушествует, потому что
$A \cap B' \cap C' \cap D' = (A \cap B') \cap (C' \cap D') = (A \cap B') \cap \emptyset = \emptyset$.

XIII /B/; такая функция не сушествует, потому что
$A' \cap B \cap C' \cap D' = (A' \cap B) \cap (C' \cap D') = (A' \cap B) \cap \emptyset = \emptyset$.

XIV /C/; такая функция не сушествует, потому что
$A' \cap B' \cap C \cap D' = (A' \cap C) \cap (B' \cap D') = (A' \cap C) \cap \emptyset = \emptyset$.

XV /D/; множество функций этого типа:

$A' \cap B' \cap C' \cap D = (A' \cap D) \cap (B' \cap C') = T_{10} \cap ((T_{01} \cup T_{10}) \setminus$
$\setminus (S \cup M)) = T_{10} \cap (S_2 \cup M_2)$; такая, например, функция $f(x_1, x_2, x_3) =$
$= x_1' x_2' \vee x_1 x_3'$.

XVI /$\emptyset$/; такая, функция не существует, потому что

$A' \cap B' \cap C' \cap D' = (A' \cap D') \cap (B' \cap C') = \emptyset \cap (B' \cap C') = \emptyset$

Теорема доказана.

Будем составлять базисы, выражая их через функции 1-9. Для построения базисов полезны нижеследующие замечания;

Замечание 1. Функция /A,B,C,D/ не содержится ни в одном базисе, потому что принадлежит всем классам A,B,C,D.

Замечание 2. Одночленные базиси не существуют, потому что не существуют функции типа /$\emptyset$/.

Замечание 3. Для построения трёхчленных базисов не учитываем функций /D/ .

Замечание 4. Для построения четырёхчленных базисов не учитываем функции /D/, /A,D/, /B,D/, /C,D/.

Теперь легко найдутся все типы базисов в ϕ^{o}.

I Двухчленные типы базисов:

{/A,B,C/,/D/}.

II Трёхчленные типы базисов:

{/A,B,C/,/C,D/,/A,B,D/} ; {/A,B,C/,/C,D/,/A,D/} ;
{/A,B,C/,/C,D/,/B,D/} ; {/A,B,C/,/B,D/,/A,C,D/} ;
{/A,B,C/,/B,D/,/A,D/} ; {/A,B,C/,/A,D/,/B,C,D/} .

III Четырёхчленные типы базисов:

{/A,B,C/,/A,B,D/,/A,C,D/,/B,C,D/}.

Таким образом, доказана следующая теорема:

ТЕОРЕМА 2. Число различных типов базисов в ϕ^{0} равно 8: 1 двухчленный тип, 6 трёхчленных типов и 1 четырёхчленный тип.

Замечание 5. Функции $x_1, x_2, \dots, x_n$ и константы 0 и 1 не содержатся ни в одном базисе.

Замечание 6. В каждом базисе содержится точно одна функция f для которой $f(0,0,\dots,0) = f(1,1,\dots,1)$.

Пусть $t_n/A/$ обозначает число всех n-местных функции типа $/A/$, $t_n/B,C/$ число всех n-местных функции типа $/B,C/$ в ϕ^{0}, и т.п. Легко получается что

$$t_n/A,B,C/ = 2^{2^{n}-1}-2,$$

$$t_n/A,B,D/ < 2^{2^{n-1}-1},$$

$$t_n/A,C,D/ < 2^{2^{n}-2},$$

$$t_n/B,C,D/ < 2^{2^{n-1}-1},$$

откуда получается следующее неравенство:

$$N_n^4 < 2^{3\cdot 2^{n}-5},$$

где N_n^4 обозначает число чатырёхчленных базисов в ϕ^{0}, состоящихся только из n-местных функций.

Заметим что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n^4}{\binom{2^{2^n}}{4}} = 0,$$

где $\binom{2^{2^n}}{4}$ - число всех четырёхчленных систем n-местных функций в ϕ^{0}.

ЛИТЕРАТУРА

|1| В.Г. Боднарчук, Г.Е. Цейтлин, Об алгебрах периодически определенных преобразований бесконачного регистра, Кибернетика, 1 (1969).

|2| В.М. Глушков, Теория автоматов и вопросы проектирования структур цифровых машин, Кибернетика, 1 (1965).

|3| Л.Крнич, Типы базисов алгебры логики, Glasnik Mat.-Fiz. i Astr. 20 (1965) 23-32.

|4| А.И.Мальцев, Итеративные алгебры и многообразия Поста, сб. "Алгебра и логика", т. 5, вып. 2, Новосибирск, 1966.

|5| E. Post, Two-valued Iterative Systems of Mathematical Logic, Annals of Math. Studies, v. 5, Princeton Univ. Press, 1941.

|6| Г.Е.Цейтлин, Вопросы функциональной полноты для одной модификации алгебры логики, Кибернетика, 4 (1969).

|7| С.В. Яблонский, Г.П. Гаврилов, В.Б.Кудрявцев, Функции алгебры логики и классы Поста, Наука, Москва, 1966 .

REZIME

TIPOVI BAZA ZA JEDNU MODIFIKACIJU ALGEBRE LOGIKE

U radu se ispituju medjusobni odnosi medju maksimalnim podalgebrama algebre ϕ° (jedne modifikacije algebre logike). Posmatra se relacija ekvivalencije takva da su dve funkcije f i g ekvivalentne tj. da su istog tipa ako za svaku maksimalnu podalgebru X od ϕ° važi tačno jedna od sledeće dve mogućnosti:

1° $f \in X$ i $g \in X$,

2° $f \notin X$ i $g \notin X$.

TEOREMA 1. Ima tačno 9 različitih tipova funkcija u ϕ°.

Pomoću takvih funkcija izgradjuju se baze algebre ϕ°, pri čemu se koristi teorema Cejtlina (|6|). Na taj način, svaka baza albegre Φ^{O} pripada odredjenom tipu baza.

TEOREMA 2. Postoji tačno 8 različitih tipova baza u algebri ϕ^{O} : 1 tip dvočlanih, 6 tipova tročlanih i 1 tip četvoročlanih baza.