Zbornik radova Prirodno-matematičkog fakulteta—Univerzitet u Novom Sadu, knjiga 10 (1980)
Review of Research Faculty of Science — University of Novi Sad, Volume 10 (1980)

O JEDNOJ KLASI NELINEARNIH DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA n-TOG REDA

Mirko Budinčević
Prirodno-matematički fakultet. Institut za matematiku.
21 000 Novi Sad, ul. dr Ilije Đuričića 4, Jugoslavija

1. Egzistencija

U ovom radu se razmatra diferencijalna jednačina

$$y^{(n)}=(-1)^n F(x, y) \tag{1}$$

uz sledeće pretpostavke:

1. $F(x, y)$ je neprekidna za $x \geq x_0$ i $0 \leq y < \infty$
2. $F(x, y) > 0$ za $x \geq x_0$, $y > 0$
3. $y^{-1-\delta} F(x, y)$ je striktno rastuća funkcija po y za svako $x \geq x_0$ i neko $\delta > 0$

i dokazuje sledeća

TEOREMA 1.: *Postoji pozitivno rešenje $\overline{y}(x)$ jednačine* (1) *koje monotono opadajući teži konstanti $C>0$ i za koje važi da je $(-1)^k y^{(k)}(x) \geq 0$, $k=1, 2, \ldots, n-1$ za $x>a \geq x_0$ ako i samo ako je $\int^{\infty} x^{n-1} F(x, B) dx < \infty$ za neku konstantu $B>0$.*

Dokaz: $(\rightarrow)$ Na osnovu Tajlorove teoreme može da se piše da je:

$$\overline{y}(x)=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{\overline{y}^{(k)}(b)}{k!}(b-x)^k+\frac{1}{(n-1)!} \int_x^b (t-x)^{n-1} F(t, \overline{y}(t)) \mathrm{d} t$$

Kako je $(-1)^k \overline{y}^{(k)}(x) \geq 0$ za $k=0, 1, \ldots, n-1$ sledi da je

$$\overline{y}(a) \geq \overline{y}(x) \geq \frac{1}{(n-1)!} \int_x^b (t-x)^{n-1} F(t, \overline{y}) \mathrm{d} t \geq \frac{1}{(n-1)!} \int_x^b (t-x)^{n-1} F(t, C) \mathrm{d} t$$

Puštajući da $b \rightarrow \infty$ tvrdnja sledi.

($\leftarrow$) Da bi pokazali da je uslov dovoljan formirajmo integralnu jednačinu

$$y(x)=C+\frac{1}{(n-1)!}\int_x^\infty (t-x)^{n-1}F(t, y(t))\,dt \tag{2}$$

i definišimo aproksimativan niz $\{\overline{y}_k(x)\}$ na sledeći način:

$$\overline{y}_0(x)=C$$

$$\overline{y}_{k+1}(x)=C+\frac{1}{(n-1)!}\int_x^\infty (t-x)^{n-1}F(t, \overline{y}_k(t))\,dt, \qquad k=0, 1, \ldots$$

Kako je po pretpostavci $\int\limits^\infty t^{n-1}F(t, B)\,dt<\infty$ to mora postojati $a\geq x_0$ takvo da za $x\geq a$ je

$$\int_x^\infty (t-x)^{n-1}F(t, B)\,dt<\frac{(n-1)!B}{2}$$

Očigledno je $\overline{y}_k(x)\geq C>0$. Ako izaberemo $0<C<\frac{B}{2}$ tada iz pretpostavke da je $\overline{y}_k(x)<B$ sledi

$$\overline{y}_{k+1}(x)<\frac{B}{2}+\frac{1}{(n-1)!}\int_x^\infty (t-x)^{n-1}F(t, B)dt<B$$

Ovim smo pokazali uniformnu ograničenost ovog niza funkcija.

Za bilo koje dve tačke x_1 i x_2 takve da je $a\leq x_1<x_2<\infty$ sledi

$$\overline{y}_{k+1}(x_1)-\overline{y}_{k+1}(x_2)=\frac{1}{(n-1)!}\left[\int_{x_1}^\infty (t-x_1)^{n-1}F(t, \overline{y}_k)\,dt-\int_{x_2}^\infty (t-x_2)^{n-1}F(t,\overline{y}_k)dt\right]\leq$$

$$\leq\frac{1}{(n-1)!}\left[\int_{x_2}^\infty (x_2-x_1)(n-1)(t-x_1)^{n-2}F(t,\overline{y}_k)\,dt+(x_2-x_1)\int_x^{x_2}(t-x_1)^{n-2}F(t,\overline{y}_k)dt\right]\leq$$

$$\leq\frac{x_2-x_1}{(n-2)!}\int_{x_1}^\infty (t-x_1)^{n-2}F(t,\overline{y}_k)\,dt\leq\frac{x_2-x_1}{(n-2)!}\int_a^\infty (t-a)^{n-2}F(t, B)\,dt$$

što povlači da je niz $\{\overline{y}_k\}$ niz podjednako neprekidnih funkcija.

Pretpostavimo da je $\bar{y}_{k+1}(x) \geq \bar{y}_k(x)$. Tada je i

$$\bar{y}_{k+2}(x) - \bar{y}_{k+1}(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_x^{\infty} (t-x)^{n-1} \left(F(t, \bar{y}_{k+1}(t)) - F(t, \bar{y}_k(t))\right) \mathrm{d}t > 0$$

što zbog $\bar{y}_1(x) \geq \bar{y}_0(x)$ povlači da je niz $\{\bar{y}_k(x)\}$ monotono rastući. Prema tome može da se izdvoji uniformno konvergentan podniz čija granica, neprekidna funkcija $\bar{y}(x)$ je rešenje polazne integralne jednačine na intervalu $[a, \infty)$.

Ostaje da se pokaže da je $(-1)^k \bar{y}^{(k)}(x) \geq 0$ za $x \geq a$. Nek je $h > 0$, tada

$$\left| \frac{\bar{y}(x+h) - \bar{y}(x)}{h} + \frac{1}{(n-2)!} \int_x^{\infty} (t-x)^{n-2} F(t, \bar{y}) \,\mathrm{d}t \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{h(n-1)!} \left(\int_{x+h}^{\infty} (t-x-h)^{n-1} F(t, \bar{y}) \,\mathrm{d}t - \int_x^{\infty} (t-x)^{n-1} F(t, \bar{y}) \,\mathrm{d}t + \right.\right.$$

$$\left.+ \frac{1}{(n-2)!} \int_x^{\infty} (t-x)^{n-2} F(t, \bar{y}) \,\mathrm{d}t \right| \leq$$

$$\leq \left| \frac{(n-2) h^{n-2}}{(n-1)!} \int_x^{x+h} F(t, \bar{y}) \mathrm{d}t + \frac{h}{(n-1)!} \int_{x+h}^{\infty} \binom{n-1}{2} (t-x)^{n-3} F(t, \bar{y}) \,\mathrm{d}t \right| = hM$$

Odgovarajuća nejednačina se dobija i za $h < 0$ pa na osnovu neprekidnosti sledi

$$-\bar{y}'(x) = \frac{1}{(n-2)!} \int_x^{\infty} (t-x)^{n-2} F(t, \bar{y}) \,\mathrm{d}t \geq 0$$

Analogno se pokazuje da je

$$(-1)^k \bar{y}^{(k)}(x) = \frac{1}{(n-1-k)!} \int_x^{\infty} (t-x)^{n-1-k} F(t, \bar{y}) \,\mathrm{d}t \geq 0$$

odnosno $\qquad \bar{y}^{(n)} = (-1)^n F(t, \bar{y})$

i time je teorema dokazana.

Ovim smo uopštili neke rezultate iz radova [1] i [2].

Ako je pored uslova 1. 2. i 3. zadovoljeno i

4. $F(x, -y) < 0$

važi sledeća:

POSLEDICA 1. *Postoji rešenje $\tilde{y}(x)$ koje monotono rastući teži konstanti $K < 0$ takvo da je $(-1)^k \tilde{y}^{(k)}(x) \leq 0$.*

Dokaz je isti kao i Teoreme 1.

2. Asimptotika

Da bi dobili asimptotsko ponašanje rešenja moramo suziti klasu funkcija koja figuriše sa desne strane jednačine (1).

Posmatrajmo diferencijalnu jednačinu

$$y^{(n)}=(-1)^n f(x) g(y) \tag{3}$$

i pretpostavimo da je $f(x)$ neprekidna funkcija takva da je $f(x)\geq 0$ za $x\geq x_0$ a $g(y)$ neprekidna i pozitivna za $y>0$ i $y^{-1-\delta}g(y)$ monotono raste.

Važi sledeća:

POSLEDICA 2.:

$$y(x)=C+\frac{g(C)+o(1)}{(n-1)!}\int_x^\infty (t-x)^{n-1} f(t)\,dt$$

Dokaz sledi na osnovu (2) i neprekidnosti funkcije $g(y)$.

Godine 1930. J. Karamata [3] je uveo pojam regularno promenljivih funkcija da bi uopštio neke teoreme Tauberovog tipa. Ta klasa funkcija se pokazala veoma interesantnom u raznim oblastima matematike i njene osobine su detaljno izučavane.

Definicija: Za realnu funkciju f kažemo da je regularno promenljiva u beskonačnosti ako je pozitivna i merljiva na $[a, \infty)$ za neko $a>0$, i ako za svako $\lambda>0$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(\lambda x)}{f(x)}=\lambda^\sigma$$

za neko $|\sigma|<\infty$ (σ se zove indeks regularne promene).

Svaka regularno promenljiva funkcija $f(x)=x^\sigma L(x)$ gde je $L(x)$ regularno promenljiva funkcija indeksa $\sigma=0$ i naziva se sporo promenljivom funkcijom.

U monografiji L. de Haana [4] je dokazana sledeća:

TEOREMA 2.: *Pretpostavimo da je $f(x)$ regularno promenljiva funkcija indeksa σ. Tada je za $k<-1-\sigma$ i x dovoljno veliko integral*

$$\int_x^\infty t^k f(t)\,dt$$

dobro definisan i konačan i važi:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{k+1}f(x)}{\int_x^\infty t^k f(t)\,dt}=-k-\sigma-1$$

TEOREMA 3.: *Pretpostavimo da je $f(x)$ u (3) regularno promenljiva funkcija indeksa $\sigma<-n$. Tada za rešenje $\bar{y}(x)$ važi sledeća asimptotska ocena:*

$$\bar{y}(x)=C+\frac{(-1)^n g(C)}{\prod_{p=1}^{n}(\sigma+p)}x^n f(x)+o(x^n f(x))$$

Dokaz sledi na osnovu n uzastopnih integracija jednačine (3) i korišćenja rezultata Teoreme 2.

Ovim smo pokazali da je ne samo $y(x)$ regularno promenljiva funkcija ($\sigma=0$) već je to i $y(x)-C$ i njen indeks je $n+\sigma$.

Za $\sigma=-n$ se dobija

$$\bar{y}(x)=C+\frac{g(C)+o(1)}{(n-1)!}\int_x^\infty t^{n-1}f(t)\,dt$$

Kako je $t^{n-1}f(t)=\frac{L(t)}{t}$ to se preciznija ocena ne može dati kao što je pokazano u radu [5]. Poznato je samo da je

$$\int_x^\infty \frac{L(t)}{t}\,dt=L_1(x)$$

takvo da je

$$\lim_{x\to\infty}\frac{L(x)}{L_1(x)}=0.$$

LITERATURA

[1] I. Ličko, M. Švec, *Le caractere oscillatoire des solutions de l'equation* $y^{(n)}+f(x)y^\alpha=0,\ n\geq 1$. Czech. Math. J. 13, (1963), str. 33–36.

[2] Pui-Kei Wong, *On a class of nonlinear fourth order differential equations*, Annali di Mat. pura et applicata, (IV) Vol. LXXXI (1969), str. 331–346.

[3] J. Karamata, *Sur certains „Tauberian Theorems" de M. M. Hardy et Littlewood*, Mathematica (Cluj) 3, (1930), str. 33–48.

[4] L. de Haan, *On regular variation and its application to the weak convergence of sample extremes*, Math. Centre tracts 32, Amsterdam.

[5] V. Marić, M. Tomić, *Regular variation and asymptotic properties of solutions of nonlinear differential equations*, Publ. de l'Institut Math. Tome 21 (35), 1977, str. 119–129.

ON A CLASS OF NONLINEAR n– TH ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

Mirko Budinčević

SUMMARY

In this paper we study the nonlinear n-th order differential equation

$$y^{(n)}=(-1)^n F(x, y)$$

where F is continuous, positive and $y^{-1-\delta}F$ is monotone increasing. The existence and asymptotic behavior of certain solutions is given.