
ЗАДАЦИ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Дејан Вурдеља

ШАНГАЈСКИ ПРОБЛЕМ

Поштовани читаоче, моја љубав према математици није увек била љубав, већ више поштовање и дивљење према магији и слободи израза, обожавање нечега што није спутано временом и простором, у почетку нејасно и нерешиво, тешко али опет препуно емоција и усхићења после сваког савладаног проблема. Највећа награда ми је онај осећај и елан који осетим после сваке савладане препреке. Како у математици, тако и у животу. Корак по корак.

Приказаћу два задатка која траже стрпљење и размишљање, али чије решење доноси опипљив осећај усхићења и интелектуалне победе. Решавање оваквих проблема омогућава ученицима да искусе радост математичког открића, која представља један од најважнијих мотива за бављење математиком.

ЗАДАТАК 1. Аца и Бојан су се упознали с Дуњом и пошто су се брзо спријатељили, пожелели су да сазнају када је њен рођендан. Она им је дала 10 могућих датума:

15. мај	17. јун	14. јул	14. август	16. мај
18. јун	16. јул	15. август	19. мај	17. август

Дуња је Аци саопштила само месец, а Бојану само дан свог рођендана. Затим се водио следећи разговор:

- Аца: Ја не знам када је Дуњин рођендан, али сам сигуран да не зна ни Бојан.
- Бојан: У почетку нисам знао када је Дуњин рођендан, али сада знам.
- Аца: Е сада и ја знам када је Дуњин рођендан.

Знате ли када је Дуњин рођендан?

Решење. Понуђене датуме можемо да прикажемо у облику следеће табеле.

дан/месец	14.	15.	16.	17.	18.	19.
мај		⊙	⊙			⊙
јун				⊙	⊙	
јул	⊙		⊙			
август	⊙	⊙		⊙		

Након прве Ацине изјаве, који зна само месец рођења, закључујемо да рођендан сигурно није у мају или у јуну. Наиме, међу понуђеним датумима, 18. је само јун, а 19. је само мај, па да је Аци саопштен мај или јун, он не би могао бити сигуран да и Бојан не зна тачан датум.

дан/месец	14.	15.	16.	17.	18.	19.
мај		⊗	⊗			⊗
јун				⊗	⊗	
јул	⊙		⊙			
август	⊙	⊙		⊙		

Остали су јул или август. После Ацине изјаве, Бојан (који зна само дан) каже да зна када је Дуњин рођендан, што значи да дан не може бити 14, јер су понуђени и 14. јул и 14. август.

дан/месец	14.	15.	16.	17.	18.	19.
мај		⊗	⊗			⊗
јун				⊗	⊗	
јул	⊗		⊙			
август	⊗	⊙		⊙		

Након тога Аца изјављује да зна датум, што значи да месец не може бити август, јер су преостала два датума у августу.

дан/месец	14.	15.	16.	17.	18.	19.
мај		⊗	⊗			⊗
јун				⊗	⊗	
јул	⊗		⊙			
август	⊗	⊗		⊗		

Као једино решење остаје 16. јул.

ЗАДАТАК 2. Аца, Бојан и Вера су се упознали с Дуњом и пожелели су да сазнају када је рођена. Она им је дала 20 могућих датума:

17. фебруар 2001.	13. март 2001.	13. април 2001.	15. мај 2001.
17. јун 2001.	16. март 2002.	15. април 2002.	14. мај 2002.
12. јун 2002.	16. август 2002.	13. јануар 2003.	16. фебруар 2003.
14. март 2003.	11. април 2003.	16. јул 2003.	19. јануар 2004.
18. фебруар 2004.	19. мај 2004.	14. јул 2004.	18. август 2004.

Дуња је потом Аци саопштила месец, Бојану дан, а Вери годину свог рођења. Затим се водио следећи разговор:

- Аца: Ја не знам када је Дуња рођена, али сам сигуран да не зна ни Бојан.
- Бојан: Ни ја не знам када је Дуња рођена, али знам да ни Вера не зна.
- Вера: Ја не знам када је рођена, али не зна ни Аца.

- Аца: Е сада знам када је рођена.
- Бојан: Знаш и ја.
- Вера: И ја знам.

Знаете ли када је Дуња рођена?

Решење. Представимо понуђене датуме у облику табеле.

	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.
јануар			⊙/03						⊙/04
фебруар						⊙/03	⊙/01	⊙/04	
март			⊙/01	⊙/03		⊙/02			
април	⊙/03		⊙/01		⊙/02				
мај				⊙/02	⊙/01				⊙/04
јун		⊙/02					⊙/01		
јул				⊙/04		⊙/03			
август						⊙/02		⊙/04	

У првој изјави, Аца (који зна само месец) не зна тачан датум и зна да датум не зна ни Бојан (који зна дан). Одатле закључујемо да месец рођења не може бити ни април ни јун. Наиме, међу понуђеним датумима, 11. је само април, а 12. је само јун, па да је Аци саопштен април или јун, он не би могао бити сигуран да ни Бојан не зна тачан датум.

	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.
јануар			⊙/03						⊙/04
фебруар						⊙/03	⊙/01	⊙/04	
март			⊙/01	⊙/03		⊙/02			
април	⊗/03		⊗/01		⊗/02				
мај				⊙/02	⊙/01				⊙/04
јун		⊗/02					⊗/01		
јул				⊙/04		⊙/03			
август						⊙/02		⊙/04	

После Ацине изјаве, Бојан и даље не зна тачне датуме, што значи да 15. мај 2001. и 17. фебруар 2001. нису датуми рођења. После ове елиминације, остаје само један датум чија је година 2001. То је 13. март 2001, па пошто Бојан зна да ни Вера не зна тачан датум, елиминишемо и тај датум. Тада остаје само један

датум чији је дан 13. – то је 13. јануар 2003. који такође одбацујемо због Бојанове немогућности да одреди тачан датум.

	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.
јануар			⊗/03						⊙/04
фебруар						⊙/03	⊗/01	⊙/04	
март			⊗/01	⊙/03		⊙/02			
април	⊗/03		⊗/01		⊗/02				
мај				⊙/02	⊗/01				⊙/04
јун		⊗/02					⊗/01		
јул				⊙/04		⊙/03			
август						⊙/02		⊙/04	

После претходних изјава, Вера и даље не зна тачан датум, али зна да ни Аца још увек не може да одреди тачан датум. Да је Вери речена 2004. година, она не би могла бити сигурна да Аца не зна датум, јер је након претходних елиминација у јануару остао само један датум, 19. јануар 2004. Зато елиминишемо све датуме из 2004. године.

	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.
јануар			⊗/03						⊗/04
фебруар						⊙/03	⊗/01	⊗/04	
март			⊗/01	⊙/03		⊙/02			
април	⊗/03		⊗/01		⊗/02				
мај				⊙/02	⊗/01				⊗/04
јун		⊗/02					⊗/01		
јул				⊗/04		⊙/03			
август						⊙/02		⊗/04	

Након тога, Аца зна тачан датум, што значи да Дуња није рођена у марту, јер су после претходних елиминација остала два датума у овом месецу.

	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.
јануар			⊗/03						⊗/04
фебруар						⊙/03	⊗/01	⊗/04	
март			⊗/01	⊗/03		⊗/02			
април	⊗/03		⊗/01		⊗/02				
мај				⊙/02	⊗/01				⊗/04
јун		⊗/02					⊗/01		
јул				⊗/04		⊙/03			
август						⊙/02		⊗/04	

И Бојан зна тачан датум, што значи да дан тог датума не може бити 16.

	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.
јануар			⊗/03						⊗/04
фебруар						⊗/03	⊗/01	⊗/04	
март			⊗/01	⊗/03		⊗/02			
април	⊗/03		⊗/01		⊗/02				
мај				⊙/02	⊗/01				⊗/04
јун		⊗/02					⊗/01		
јул				⊗/04		⊗/03			
август						⊗/02		⊗/04	

У табели остаје само један датум – Дуња је рођена 14. маја 2002. године.

* * *

НАПОМЕНЕ РЕДАКЦИЈЕ.¹ Шангајски проблем је само један од назива задатка 1, чије је решење приказано у чланку. У медијима, задатак је често представљан као пример задатка тзв. *азијске школске математике*, чији ученици, посебно из Шангаја и Сингапура постижу одличне резултате на разним међународним тестирањима. Изворно, задатак је повезан са Сингапуром, а не са Шангајем. Задатак је саставио Џозеф Јео (Joseph Yeo Boon Woi), из сингапурског Националног института за образовање, за такмичење *Singapore and Asian Schools Math Olympiad* (SASMO) 2015. године. Убрзо након такмичења, задатак је објављен на интернету и за свега неколико дана је постао виралан и доспео у телевизијске програме широм света. У оригиналној поставци, треба одредити датум рођендана девојчице Шерил на основу разговора њених пријатеља Алберта

¹Припремио Небојша Икодиновић

и Бернарда. Зато је ова загонетка позната и под називом *Шерилин рођендан* (Cheryl's Birthday).

Задатак 2 из чланка је први пут објавио писац популарних математичких текстова Алекс Белос у својој рубрици *Загонетка понедељком Алекса Белоса* (Alex Bellos's Monday Puzzle) у листу The Guardian (25. маја 2015. године, Cheryl's birthday puzzle part two, Denise's revenge – can you solve it?). У загонетки се појављује нови лик, Дениз, чији датум рођења покушавају да одреде Алберт, Бернард и Шерил, па је нова загонетка позната под насловом *Денизина освета* (Denise's Revenge). Овај задатак је такође саставио Џозеф Јео, аутор оригиналне загонетке *Шерилин рођендан*.

Загонетке рођендана су веома сродне тзв. *Загонетки збира и производа* (Sum and Product Puzzle), познатој и као *Немогућа загонетка* (Impossible Puzzle), коју је поставио познати математичар и велики методичар математике Ханс Фројдентал (Hans Freudenthal, 1905–1990). Наводимо оригиналну Фројденталову формулацију задатка објављену у холандском часопису Nieuw Archief Voor Wiskunde, 1969. године.

ЗАДАТАК 3. Особа A је рекла особама S и P : Имам два природна броја x и y изабрана тако да је $1 < x < y$ и $x + y \leq 100$. Особи S ћу рећи само збир $s = x + y$, а особи P само производ $p = x \cdot y$. Оно што једној особи кажем мора остати тајна за другу особу. Међутим, ви можете сарађивати да откријете пар (x, y) . Када је A урадио шта је најавио, уследио је следећи разговор:

- P рече: Ја не знам који су то бројеви.
- S рече: Ја већ знам да ти не знаш.
- P рече: Е сада ја знам који су то бројеви.
- S рече: И ја такође знам који су то бројеви.

Решавање овог задатка препуштамо читаоцима. Иначе, у литератури и на интернету постоји велики број различитих варијанти Немогуће загонетке.

Шерилин рођендан, Немогућа загонетка и сродни проблеми покренули су и многе научне анализе, пре свега из области логике и информатике. Данас, у контексту развоја вештачке интелигенције, наведени задаци представљају популарне примере тзв. епистемичке логике у којој се не закључује само из чињеница већ и из информација о туђем знању (тј. о ономе што други знају, што други знају да остали знају итд.).