

Славко Моцоња

ЕКВИВАЛЕНТИ АКСИОМЕ ИЗБОРА

Сажетак. У овом раду дајемо преглед десетак математичких тврђења која су логички еквивалентна аксиоми избора. Једна група ових тврђења говори о интуитивно очекиваним особинама неких основних математичких објеката, као што су релације и функције, док је значај друге групе ових тврђења у њиховој широкој примени у разним областима математике.

1. Увод

Аксиому избора формулисао је 1904. године Цермело у раду [7] како би доказао принцип доброг уређења. Принцип доброг уређења тврди да се сваки скуп може добро уредити, што значи да на сваком скупу постоји линеарно уређење такво да сваки непразан подскуп има најмањи елемент у односу на дато уређење. Принцип доброг уређења, неких тридесетак година раније, формулисао је и у свом раду користио Кантор. Кантор најпре није сматрао да принцип доброг уређења захтева доказ; литература наводи да је за Кантора принцип доброг уређења био *фундаментални принцип мисли*. Међутим, проблем је био што ни Кантор ни други математичари тог доба нису умели да конструишу добро уређење скупа реалних бројева. До краја XIX века и сам Кантор признаје да принцип доброг уређења захтева доказ. Почетком XX века Кениг, супротно принципу доброг уређења, доказује да се скуп реалних бројева не може добро уредити. Цермело примећује грешку у Кениговом аргументу, и коначно доказује принцип доброг уређења. Међутим, без доказа користи тврђење, данас познато као аксиома избора, за које сматра да је довољно очигледно да не захтева доказ. (Иако сам Цермело пише да је неуспешно покушао да докаже ово тврђење.)

Да бисмо формулисали аксиому избора, морамо да дефинишемо појам *функције избора*. Нека је $\mathcal{F}$ непразна фамилија (скуп) непразних скупова; са $\bigcup \mathcal{F}$ означавамо *унију* фамилије $\mathcal{F}$, тј. унију свих скупова из фамилије $\mathcal{F}$. *Функција избора за фамилију* $\mathcal{F}$ је било која функција $f: \mathcal{F} \rightarrow \bigcup \mathcal{F}$ која задовољава услов:

- $(\forall X \in \mathcal{F}) f(X) \in X$.

Дакле, функција избора f за сваки скуп $X \in \mathcal{F}$ бира један његов елемент $f(X)$. Аксиома избора је следеће тврђење.

АКСИОМА ИЗБОРА A1. За сваку непразну фамилију непразних скупова постоји функција избора.

Као аксиома избора, у литератури се често наводи следећа еквивалентна варијанта.

АКСИОМА ИЗБОРА A2. За сваку непразну фамилију непразних и међусобно дисјунктних скупова постоји функција избора.

Аксиома избора је најпре критикована, пре свега због своје неконструктивистичке природе (аксима избора тврди егзистенцију функције избора, али не нуди начин за њену конструкцију). Временом су се појавиле и неке њене нежељене последице, као што је чувени парадокс Банаха и Тарског. Овај парадокс је заправо теорема која каже да се лопта може поделити на коначно много дисјунктних делова, од којих се даље могу саставити две лопте идентичне полазној. Оваква декомпозиција је наизглед парадоксална јер очекујемо да описани поступак чува запремину. Међутим, аксиома избора обезбеђује да можемо да поделимо лопту на *немерљиве* делове, па аргумент очувања мере није одржив.

Без обзира на неке контраинтуитивне последице, аксиома избора је данас прихваћена захваљујући својој примени у разним областима математике: алгебри, анализи, топологији, итд. Данас знамо да су неки фундаментални резултати ових области последице аксиоме избора, а многи од њих су јој чак и еквивалентни.

Прве примене аксиоме избора у алгебри приметио је Цорн у [9]. У доказу својих теорема, Цорн користи тврђење које назива *принцип максималности*, данас познато као *Цорнова лема*, за које показује да је еквивалентно аксиоми избора. Иако је Цорн независно доказао своју лему, испоставља се да је једну верзију Цорнове леме доказао Хауздорф двадесетак година раније, као и да је један специјалан случај доказао Куратовски десетак година раније. Сва ова тврђења су заправо међусобно еквивалентна, и еквивалентна су аксиоми избора. Цорнова лема је убедљиво најкоришћенија верзија аксиоме избора широм математике.

Овај преглед настао је из мојих материјала за студенте које сам писао као додатак курсевима логике. Моја превасходна жеља је била да представим елементаран доказ Цорнове леме, с обзиром на њен значај у математици. У следећем поглављу навешћемо још неколико елементарних тврђења која су еквивалентна аксиоми избора, а која, због верујем своје очигледности, иду у прилог прихватања аксиоме избора. Такође ћемо доказати њихову међусобно еквивалентност. У одељку 3 представимо четири основна принципа максималности (укључујући Цорнову лему), доказаћемо њихову међусобну еквивалентност, и видећемо како они повлаче аксиому избора. У одељку 4, користећи принципе максималности, доказаћемо принцип доброг уређења, и видећемо како овај принцип повлачи аксиому избора. Коначно, у одељку 5 дајемо доказ принципа максималности из аксиоме избора. За читање овог прегледа довољно је познавање само елементарне математике.

2. Елементарни еквиваленти аксиоме избора

У овом одељку навешћемо три елементарна еквивалента аксиоме избора, и доказаћемо њихову еквивалентност са тврђењима A1 и A2.

Подсетимо се основних појмова о релацији еквиваленције. Нека је X непразан скуп. Релација $\sim$ на X је *еквиваленција* ако задовољава услове *рефлексивности*, *симетричности* и *транзитивности*:

- $(\forall x \in X) x \sim x$,
- $(\forall x, y \in X)(x \sim y \rightarrow y \sim x)$, и
- $(\forall x, y, z \in X)(x \sim y \wedge y \sim z \rightarrow x \sim z)$.

Класа еквиваленције елемента $a \in X$ је скуп $[a]_{\sim}$ свих елемената $x \in X$ који су у релацији са a :

$$[a]_{\sim} = \{x \in X : x \sim a\}.$$

Количнички скуп скупа X по еквиваленцији $\sim$, у ознаци $X/\sim$, јесте фамилија свих класа елемената из X :

$$X/\sim = \{[a]_{\sim} : a \in X\}.$$

Није тешко видети да је $X/\sim$ једна *партиција* скупа X , тј. фамилија међусобно дисјунктних непразних подскупова од X који покривају цео скуп X (другим речима, важи $\bigcup X/\sim = X$). Подскуп $T \subseteq X$ је *скуп представника* или *трансверзала* еквиваленције $\sim$ ако:

- $(\forall a \in X) |[a]_{\sim} \cap T| = 1$.

Дакле, T је трансверзала ако садржи по један елемент из сваке класе.

Трансверзале често можемо природно конструисати. На пример, релација $\sim$ на $\mathbb{R}$ дата са: $x \sim y$ ако и само ако $x - y \in \mathbb{Z}$ јесте једна еквиваленција. Класа броја a је скуп свих његових целобројних транслата: $[a]_{\sim} = \{a + k : k \in \mathbb{Z}\}$. Како очигледно свака класа има по једног представника у интервалу $[0, 1)$, овај интервал је једна трансверзала наше еквиваленције. Ако само мало променимо еквиваленцију $\sim$, ако кажемо $x \sim y$ ако и само ако $x - y \in \mathbb{Q}$, ситуација постаје значајно компликованија. Наиме, $\sim$ и даље јесте еквиваленција на $\mathbb{R}$, класа броја a је скуп свих његових рационалних транслата: $[a]_{\sim} = \{a + q : q \in \mathbb{Q}\}$, међутим, ако мало размислимо, сада није очигледно како можемо изабрати неку трансверзалу, па се природно поставља питање да ли трансверзале уопште постоје. Интуитивно бисмо можда рекли да би требало да постоје, јер само треба из сваке класе да изаберемо по један елемент, међутим то сугерише да се ради о аксиоми избора.

АКСИОМА ИЗБОРА АЗ. Свака еквиваленција има трансверзалу.

Испоставља се да у горњем примеру и не можемо да нађемо трансверзалу на неки природан начин, али аксиома избора нам гарантује да она постоји. Иначе, трансверзале горње еквиваленције су значајни скупови у математици. Оне се називају *Виталијеви скупови* и примери су немерљивих подскупова скупа $\mathbb{R}$. Егзистенција оваквих скупова је, могуће нежељена, последица аксиоме избора.

Под *функцијом* $f : X \rightarrow Y$, где је X непразан скуп, подразумевамо уобичајени објекат: у питању је релација између скупова X и Y таква да је сваки елемент $x \in X$ у релацији са тачно једним елементом из Y који обележавамо са $f(x)$. Функција $f : X \rightarrow Y$ има *инверз* ако постоји функција $g : Y \rightarrow X$ таква

да $g \circ f = \text{id}_X$ и $f \circ g = \text{id}_Y$, тј. за свако $x \in X$ важи $g(f(x)) = x$ и за свако $y \in Y$ важи $f(g(y)) = y$. Знамо да f има инверз ако и само ако је f *бијекција*. Функција $f : X \rightarrow Y$ има *леви инверз* ако постоји функција $g : Y \rightarrow X$ таква да $g \circ f = \text{id}_X$. Ако функција f има леви инверз, није тешко видети да она мора бити *1–1*. Међутим, и обратно је тачно, свака *1–1* функција има леви инверз, и конструкција левог инверза није тешка. Наиме, можемо (морамо) да дефинишемо да је $g(y) = x$ ако је $y = f(x)$ за неко x , и можемо да ставимо $f(y) = x_0$ ако y није слика ниједног елемента, где је $x_0 \in X$ било који елемент. Није тешко видети да ако је f *1–1*, онда је g заиста добро дефинисана функција која је један леви инверз од f . С друге стране, функција $f : X \rightarrow Y$ има *десни инверз* ако постоји функција $g : Y \rightarrow X$ таква да $f \circ g = \text{id}_Y$. Поново није тешко видети да ако f има десни инверз онда је f *на*. Интуитивно, и обратно би требало да је тачно: ако је $f : X \rightarrow Y$ *на* функција, онда она има десни инверз $g : Y \rightarrow X$. Наиме, сваки елемент $y \in Y$ јесте слика неког (можда не једног) елемента из X , па је потребно само дефинисати да је $g(y)$ неки елемент $x \in X$ такав да је $f(x) = y$. Међутим, приметимо да такав елемент x морамо некако *изабрати*.

АКСИОМА ИЗБОРА А4. Свака *на* функција има десни инверз.

Декартов производ скупова X и Y , $X \times Y$, је скуп свих *уређених парова* (x, y) таквих да $x \in X$ и $y \in Y$. На сличан начин дефинишемо производ три или више скупова. Често у математици желимо да посматрамо и производе бесконачно много скупова. По аналогiji са коначним случајем, ако имамо скунове X_i , $i \in I$, производ $\prod_{i \in I} X_i$ замишљамо као скуп свих *I*-индексираних уређених низова $(x_i)_{i \in I}$ таквих да елемент на *i*-том месту, x_i , припада скупу X_i . Формално, у питању је скуп свих функција $x : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i$ таквих да $x_i := x(i) \in X_i$ за свако $i \in I$. Јасно је да су коначни производи непразних скупова непразни. Питање је да ли су бесконачни производи непразних скупова непразни. Интуитивно, вероватно би требало да буду.

АКСИОМА ИЗБОРА А5. Нека су I и X_i , $i \in I$, непразни скунови. Тада је $\prod_{i \in I} X_i$ непразан.

У следећој теореме ћемо видети да су до сада формулисане верзије аксиоме избора међусобно еквивалентне.

ТЕОРЕМА 1. *Тврђења А1, А2, А3, А4 и А5 међусобно су еквивалентна.*

Доказ. Доказаћемо низ импликација $A2 \Rightarrow A1 \Rightarrow A3 \Rightarrow A4 \Rightarrow A2$ и еквиваленцију $A1 \Leftrightarrow A5$.

$A2 \Rightarrow A1$: Нека је $\mathcal{F}$ непразна фамилија непразних скупова. Идеја је да фамилију $\mathcal{F}$ заменимо са неком фамилијом чији су чланови међусобно дисјунктни, а која је на неки начин повезана са фамилијом $\mathcal{F}$. То можемо да урадимо на следећи начин. За $X \in \mathcal{F}$, уочимо скуп $Y_X = \{X\} \times X$. Приметимо да су елементи скупа Y_X уређени парови облика (X, x) , где $x \in X$, и приметимо да имамо очигледну кореспонденцију између скупа X и скупа Y_X . Сада за различите

$X, X' \in \mathcal{F}$ видимо да $Y_X \cap Y_{X'} = \emptyset$ јер парови из ова два скупа немају исту прву координату.

Дакле, уочимо фамилију скупова $\mathcal{G} = \{Y_X : X \in \mathcal{F}\}$. Фамилија $\mathcal{G}$ такође је непразна фамилија непразних скупова, који су, као што смо већ напоменули, међусобно дисјунктни. Приметимо да су елементи уније $\bigcup \mathcal{G}$ облика (X, x) где $X \in \mathcal{F}$ и $x \in X$, па је $\bigcup \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F} \times \bigcup \mathcal{F}$. Користећи А2, постоји функција избора $g : \mathcal{G} \rightarrow \bigcup \mathcal{G}$: за свако $X \in \mathcal{F}$, $g(Y_X) \in Y_X$. Нека је $\pi : \mathcal{F} \times \bigcup \mathcal{F} \rightarrow \bigcup \mathcal{F}$ друга пројекција: за $X \in \mathcal{F}$ и $y \in \bigcup \mathcal{F}$, $\pi((X, y)) = y$. Како је $\bigcup \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F} \times \bigcup \mathcal{F}$ можемо дефинисати функцију $f : \mathcal{F} \rightarrow \bigcup \mathcal{F}$ са $f(X) = \pi(g(Y_X))$. Тврдимо да је f функција избора за $\mathcal{F}$. Заиста, за свако $X \in \mathcal{F}$, како $g(Y_X) \in Y_X$, важи $g(Y_X) = (X, x)$ за неко $x \in X$, па $f(X) = \pi((X, x)) = x \in X$.

А1 $\Rightarrow$ А3: Претпоставимо да је $\sim$ еквиваленција на непразном скупу X . Тада је количнички скуп $X/\sim$ непразна фамилија непразних скупова, па, користећи А1, она има функцију избора $f : X/\sim \rightarrow \bigcup X/\sim = X$. Слика функције f , $T = f[X/\sim]$, је једна трансверзала еквиваленције $\sim$. Заиста, није тешко видети да је за свако $a \in X$, $[a]_\sim \cap T = \{f([a]_\sim)\}$.

А3 $\Rightarrow$ А4: Претпоставимо да је $f : X \rightarrow Y$ на функција. На скупу X дефинишемо релацију $\sim$ са $x_1 \sim x_2$ ако и само ако $f(x_1) = f(x_2)$ (релација $\sim$ се назива *језгро* функције f). Релација $\sim$ очигледно је еквиваленција. Нека је, користећи А3, $T \subseteq X$ једна њена трансверзала. Није тешко видети да је рестрикција $f|_T : T \rightarrow Y$ бијекција. Сада десни инверз $g : Y \rightarrow X$ функције f можемо да дефинишемо са $g = i \circ f|_T^{-1}$, где је $i : T \rightarrow X$ инклузионо пресликавање дато са $i(x) = x$. Није тешко видети да је g заиста десни инверз од f .

А4 $\Rightarrow$ А2: Нека је $\mathcal{F}$ непразна фамилија непразних и међусобно дисјунктних скупова. Дефинишемо функцију $f : \bigcup \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ са $f(x) = X$ ако и само ако $x \in X$. С обзиром да су скупови у фамилији $\mathcal{F}$ међусобно дисјунктни, f је заиста добро дефинисана функција. С обзиром да су скупови у $\mathcal{F}$ непразни, f је *на*. Користећи А4, постоји десни инверз $g : \mathcal{F} \rightarrow \bigcup \mathcal{F}$ функције f : $f \circ g = \text{id}_{\mathcal{F}}$. Приметимо да је g функција избора за $\mathcal{F}$. Заиста, за свако $X \in \mathcal{F}$ имамо $f \circ g(X) = \text{id}_{\mathcal{F}}(X) = X$, тј. $f(g(X)) = X$, одакле по дефиницији функције f , $g(X) \in X$.

А1 $\Leftrightarrow$ А5: Нека су I и X_i , $i \in I$, непразни скупови, и нека је, користећи А1, $f : \mathcal{F} \rightarrow \bigcup \mathcal{F}$ нека функција избора за фамилију $\mathcal{F} = \{X_i : i \in I\}$. Није тешко видети да је $(f(X_i))_{i \in I}$ елемент $\prod_{i \in I} X_i$. (Овде, уместо низа $(f(X_i))_{i \in I}$, могли смо рећи функција $g : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i$ дата са $g(i) = f(X_i)$ је елемент производа.)

С друге стране, нека је $\mathcal{F}$ непразна фамилија непразних скупова. Означимо $I = \mathcal{F}$ и, за $i \in I$, $X_i = i$. Користећи А5, постоји $x : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i$ таква да $x_i := x(i) \in X_i$, и није тешко видети да је x баш функција избора за $\mathcal{F}$. ■

3. Принципи максималности

У овом одељку размотрићемо неколико еквивалентних аксиоме избора који се често експлицитно користе у разним областима математике. Сваки од ових принципа тврди егзистенцију неког максималног објекта у парцијалним уређењима, па

ћемо их овде све заједно звати *принципи максималности*. Пре него што формулишемо принципе максималности подсетимо се основних појмова о парцијалним уређењима. Нека је P скуп и $\leq$ релација на P . Кажемо да је пар $(P, \leq)$ *парцијално уређење* ако су задовољени услови *рефлексивности*, *антисиметричности* и *транзитивности*:

- $(\forall x \in P) x \leq x$,
- $(\forall x, y \in P)(x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y)$, и
- $(\forall x, y, z \in P)(x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z)$.

Елементи $x, y \in P$ су *упоредиви* ако важи $x \leq y$ или $y \leq x$; у супротном, ако $x \not\leq y$ и $y \not\leq x$, кажемо да су x и y *неупоредиви*. Подскуп $A \subseteq P$ је *ланац* ако су свака два елемента у A упоредива:

- $(\forall x, y \in A)(x \leq y \vee y \leq x)$.

Приметимо да је, формално, празан скуп један ланац, као што су и сви једночлани подскупови од P . Ланац $A \subseteq P$ је *максималан* ако се не може продужити до већег ланца: за свако $x \in P \setminus A$, $A \cup \{x\}$ није ланац.

Први принцип максималности који наводимо тврди постојање максималних ланаца. Формулисао га је Хауздорф у својој монографији [2].

АКСИОМА ИЗБОРА А6 (Хауздорфов принцип максималног ланца [2]). Свако парцијално уређење има максималан ланац.

Вратимо се основним појмовима о парцијалним уређењима. Нека је $(P, \leq)$ парцијално уређење. Елемент $a \in P$ је *максималан* ако:

- $(\forall x \in P)(a \leq x \rightarrow x = a)$.

Дакле, a је максималан ако ниједан елемент скупа P није строго већи од њега.

Елемент $a \in P$ је *горње ограничење* скупа $A \subseteq P$ ако је већи од свих елемената скупа A :

- $(\forall x \in A) x \leq a$.

Можемо да формулишемо Порнову лему.

АКСИОМА ИЗБОРА А7 (Порнова лема [9]). Ако сваки ланац у парцијалном уређењу има горње ограничење, онда то парцијално уређење има максималан елемент.

Основни примери парцијалних уређења су фамилије скупова. Наиме, свака фамилија скупова $\mathcal{F}$ природно је (парцијално) уређена релацијом инклузије: $(\mathcal{F}, \subseteq)$ је једно парцијално уређење. Претходно уведени појмови се природно преводе у овај контекст. На пример, ланац у $\mathcal{F}$ је потфамилија $\mathcal{L}$ таква да за свака два скупа $A, B \in \mathcal{L}$ важи $A \subseteq B$ или $B \subseteq A$. Такође, скуп $A \in \mathcal{F}$ је максималан скуп фамилије $\mathcal{F}$ ако ниједан скуп $X \in \mathcal{F}$ није строги надскуп од A . За фамилију скупова $\mathcal{F}$ кажемо да је *индуктивна* ако је затворена за уније ланаца. Прецизније, $\mathcal{F}$ је индуктивна ако за сваки ланац $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{F}$ важи $\bigcup \mathcal{L} \in \mathcal{F}$.

Следећа верзија аксиоме избора је специјалан случај Порнове леме.

АКСИОМА ИЗБОРА А8 (Лема Куратовског [3]). Свака индуктивна фамилија скупова садржи максималан скуп.

Да бисмо исказали последњи принцип максималности који ћемо овде видети, потребан нам је следећи појам. Фамилија скупова $\mathcal{F}$ је *коначног карактера* ако задовољава услов:

$$(KK) (\forall A)(A \in \mathcal{F} \leftrightarrow (\forall A_0 \subseteq A, A_0 \text{ коначан}) A_0 \in \mathcal{F}).$$

АКСИОМА ИЗБОРА А9 (Тајхмилер-Тукијева лема [5, 6]). Свака фамилија скупова коначног карактера садржи максималан скуп.

Сада ћемо доказати да су исказани принципи максималности међусобно еквивалентни, као и да повлаче аксиому избора.

ТЕОРЕМА 2. а) *Тврђења А6, А7, А8 и А9 међусобно су еквивалентна.*
б) $A6 \Rightarrow A3$.

Доказ. а) Доказаћемо низ импликација $A6 \Rightarrow A7 \Rightarrow A8 \Rightarrow A9 \Rightarrow A6$.

$A6 \Rightarrow A7$: Нека је $(P, \leq)$ парцијално уређење које задовољава услов да сваки ланац у P има горње ограничење. Треба да докажемо да P има максималан елемент. Користећи А6, изаберимо неки максималан ланац $M \subseteq P$. По претпоставци M има горње ограничење a ; *тврдимо* да је a максималан елемент. Претпоставимо $a \leq x$; циљ је да докажемо $x = a$. Приметимо да је x такође горње ограничење од M , па је $M \cup \{x\}$ ланац. Како је $M \cup \{x\} \supseteq M$, и M је максималан ланац, закључујемо $M \cup \{x\} = M$, тј. $x \in M$. Одатле је $x \leq a$ јер је a горње ограничење ланца M . Сада из $a \leq x$ и $x \leq a$ закључујемо $x = a$, што завршава доказ.

$A7 \Rightarrow A8$: Као што смо већ напоменули, лема Куратовског је специјалан случај Цорнове леме. Заиста, ако је $\mathcal{F}$ индуктивна фамилија скупова, парцијално уређење $(\mathcal{F}, \subseteq)$ задовољава услове Цорнове леме. Наиме, горње ограничење ланца $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{F}$ је $\bigcup \mathcal{L}$ (овај скуп припада $\mathcal{F}$ јер је $\mathcal{F}$ индуктивна). Према Цорновој лем, $\mathcal{F}$ садржи максималан скуп.

$A8 \Rightarrow A9$: Нека је $\mathcal{F}$ фамилија скупова коначног карактера. Користећи А8, довољно је да докажемо да је $\mathcal{F}$ индуктивна. Нека је $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{F}$ ланац скупова, и нека је $L = \bigcup \mathcal{L}$; треба да докажемо $L \in \mathcal{F}$. Према услову (KK), довољно је да проверимо да за сваки коначан подскуп $L_0 \subseteq L$ важи $L_0 \in \mathcal{F}$. Нека је $L_0 \subseteq L$ произвољан коначан подскуп; запишимо $L_0 = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. За свако $i = 1, \dots, n$, $a_i \in L = \bigcup \mathcal{L}$, па постоји скуп $A_i \in \mathcal{L}$ такав да $a_i \in A_i$. Како је $\mathcal{L}$ ланац, скупови $A_1, A_2, \dots, A_n$ међусобно су упоредиви, па је неки, без умањења општости A_1 , највећи међу њима. Дакле, $a_i \in A_1$ за све $i = 1, \dots, n$, тј. $L_0 \subseteq A_1$. Како $A_1 \in \mathcal{F}$, према услову (KK) и сви његови коначни подскупови припадају $\mathcal{F}$; специјално, $L_0 \in \mathcal{F}$, што завршава доказ.

$A9 \Rightarrow A6$: Нека је $(P, \leq)$ произвољно парцијално уређење. Нека је $\mathcal{F}$ фамилија свих ланаца у P . Максималан скуп у $\mathcal{F}$, ако постоји, очигледно је максималан ланац у P . Дакле, користећи А9, довољно је да проверимо да $\mathcal{F}$ има коначан

карактер. Ако $A \in \mathcal{F}$, тада је A ланац у P , па је и сваки коначан подскуп A_0 од A очигледно ланац у P , одакле, $A_0 \in \mathcal{F}$. С друге стране, претпоставимо да је A скуп такав да за сваки коначан $A_0 \subseteq A$ важи $A_0 \in \mathcal{F}$, тј. такав да су му сви коначни подскупови ланци у P ; циљ је да докажемо $A \in \mathcal{F}$, тј. да је A ланац у P . Нека су $a, b \in A$; треба да докажемо да су a и b упоредиви. Међутим, $\{a, b\}$ је коначан подскуп од A , па припада $\mathcal{F}$, тј. $\{a, b\}$ је ланац у P , па a и b заиста јесу упоредиви.

б) Докажимо сада да принципи максималности повлаче аксиому избора. Конкретно доказаћемо да Хауздорфов принцип А6 повлачи постојање трансверзале (А3). Нека је $\sim$ еквиваленција на непразном скупу X . Уочимо следећу фамилију подскупова од X :

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq X : (\forall a \in X) |[a]_{\sim} \cap A| \leq 1\}.$$

Посматрајмо парцијално уређење $(\mathcal{F}, \subseteq)$, и, користећи А6, изаберимо неки максималан ланац $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{F}$. Нека је $T = \bigcup \mathcal{L}$. Тврди́мо да је T трансверзала за еквиваленцију $\sim$. Докажимо најпре да $T \in \mathcal{F}$. Претпоставимо супротно, постоји $a \in X$ такво да $|[a]_{\sim} \cap T| \geq 2$. Изаберимо два различита елемента $b, c \in [a]_{\sim} \cap T$. Како $b, c \in T = \bigcup \mathcal{L}$, постоје $B, C \in \mathcal{L}$ такви да $b \in B$ и $c \in C$. Како је $\mathcal{L}$ ланац, B и C су упоредиви, и без умањења општости нека је $B \subseteq C$. Тада $b, c \in C$, па $|[a]_{\sim} \cap C| \geq 2$, што противречи чињеници да $C \in \mathcal{F}$. Дакле, $T \in \mathcal{F}$.

Доказујемо да је T трансверзала. Нека је $a \in X$ произвољно. Доказали смо $|[a]_{\sim} \cap T| \leq 1$, и треба да докажемо $|[a]_{\sim} \cap T| = 1$. Претпоставимо супротно, $|[a]_{\sim} \cap T| = 0$, тј. $[a]_{\sim} \cap T = \emptyset$. Лако видимо да скуп $T' = T \cup \{a\} \in \mathcal{F}$, па како је $T' \supsetneq T = \bigcup \mathcal{L}$, T' је строго горње ограничење ланца $\mathcal{L}$ у $\mathcal{F}$. То значи да се максималан ланац $\mathcal{L}$ може продужити са T' , што је контрадикција. ■

Додатак: Пример примене принципа максималности. Први пример примене аксиоме избора који се најчешће среће у универзитетском образовању је доказ да сваки векторски простор има базу. Нећемо улазити у дефиниције линеарне алгебре, подсетимо само да је база векторског простора V над пољем F скуп вектора $B \subseteq V$ који је линеарно независан над F и који генерише цео простор V . Није тешко видети да су базе заправо максимални линеарно независни подскупови. Оваква карактеризација сугерише примену неког од принципа максималности у доказу. И, заиста, егзистенција базе следи директно ако посматрамо фамилију свих линеарно независних подскупова од V . Није тешко видети да је ова фамилија индуктивна, па егзистенција базе следи директно према леми Куратовског. Такође, ова фамилија је и коначног карактера, па егзистенцију базе директно даје и Тајхмилер-Тукијева лема. У литератури се најчешће примењује Порнова лема: докаже се да је унија ланца линеарно независних скупова горње ограничење за тај ланац, одакле егзистенцију базе гарантује Порнова лема. Коначно, ако бисмо се определили за примену Хауздорфовог принципа, испоставља се да је унија максималног ланца у наведеној фамилији баш база векторског простора.

Напоменимо да се примена аксиоме избора у општем случају и не може избећи. Наиме, тврђење да сваки векторски простор има базу еквивалентно је

аксиоми избора. Ово је доказао Блас у [1] тек 1984. године.

Додатак: Курепин принцип максималног антиланца. За крај овог одељка наведимо још један принцип максималности, еквивалентан аксиоми избора, који је у раду [4] приметио српски математичар Ђуро Курепа. Да бисмо исказали Курепин принцип морамо да дефинишемо појам антиланца у парцијалном уређењу. Ако је $(P, \leq)$ парцијално уређење, подскуп $A \subseteq P$ је *антиланац* ако су свака два различита елемента из A неупоредива:

- $(\forall x, y \in A, x \neq y)(x \not\leq y \wedge y \not\leq x)$.

За антиланац $A \subseteq P$ кажемо да је максималан, ако се не може проширити до већег антиланца: за сваки $x \in P \setminus A$ важи $A \cup \{x\}$ није антиланац.

АКСИОМА ИЗБОРА A10 (Курепин принцип максималног антиланца). Свако парцијално уређење има максималан антиланац.

Курепин принцип можемо лако доказати користећи било који од наведених принципа максималности. Наиме, ако уочимо фамилију $\mathcal{F}$ свих антиланца у P , није тешко видети да ће на пример унија максималног ланца у овој фамилији (користећи Хауздорфов принцип) бити максималан антиланац у P . Такође, није тешко доказати да је фамилија $\mathcal{F}$ индуктивна и коначног карактера, па уместо Хауздорфовог принципа можемо за доказ A10 искористити лему Куратовског или Тајхмилер-Тукијеву лему: гарантовани максималан скуп у $\mathcal{F}$ је максималан антиланац.

Курепин принцип такође повлачи аксиому избора (еквивалентан је аксиоми избора), али за разлику од осталих принципа максималности, овај смер није елементаран у следећем смислу. Наиме, за доказ смера $A10 \Rightarrow A1$ користи се још једна аксиома теорије скупова, *аксиома регуларности*, и познато је да се она не може избећи (познато је да је Курепин принцип строго слабији од аксиоме избора ако аксиома регуларности не важи).

4. Принцип доброг уређења

У овом одељку размотрићемо принцип доброг уређења. Подсетимо, у раду [7] из 1904. године Цермело је формулисао аксиому избора управо како би доказао принцип доброг уређења. Доказ је користио трансфинитну рекурзију и наишао је на критике у математичкој заједници. Као одговор, Цермело 1907. године у раду [8] даје нови, елементаран доказ принципа доброг уређења. Током година појавили су се и нови докази принципа, укључујући и оне који користе неки од принципа максималности. Ми ћемо овде приказати стандардан доказ како принцип доброг уређења следи из Хауздорфовог принципа. Показаћемо и како принцип доброг уређења повлачи аксиому избора.

Подсетимо се следећих појмова. Кажемо да је парцијално уређење $(P, \leq)$ *линеарно* ако су свака два елемента у P упоредива:

- $(\forall x, y \in P)(x \leq y \vee y \leq x)$.

Другим речима, сам P је ланац. Скуп $A \subseteq P$ је *почетни комад* у P ако:

- $(\forall a \in A)(\forall x \in P, x \leq a) \ x \in A$.

Дакле, A са сваким својим елементом садржи и све елементе мање од њега. Ли-неарно уређење $(P, \leq)$ је *добро* ако сваки непразан подскуп A од P има *најмањи* елемент (*минимум*). Елемент $a \in P$ је најмањи елемент скупа $A \subseteq P$ ако:

- $a \in A \wedge (\forall x \in A) \ a \leq x$.

Ако постоји, најмањи елемент је јединствен и означавамо га са $\min_{(P, \leq)}(A)$, или само са $\min(A)$ ако је уређење $(P, \leq)$ познато из контекста.

На пример, уређење $(\mathbb{N}, \leq)$ јесте добро: сваки непразан подскуп од $\mathbb{N}$ заиста има најмањи елемент. С друге стране, $(\mathbb{Z}, \leq)$ *није* добро, јер на пример сам скуп $\mathbb{Z}$ нема најмањи елемент. С друге стране, уређење на $\mathbb{Z}$ се може редефинисати тако да $\mathbb{Z}$ буде добро уређен. Један начин да то урадимо је следећи. Дефинишемо да је $a \leq' b$ ако и само ако $a, b \geq 0$ и $a \leq b$, или $a, b < 0$ и $a \geq b$, или $a \geq 0$ и $b < 0$. Дакле, на ненегативном делу $\mathbb{Z}$ задржимо природно уређење, на негативном делу га *обрнемо*, и коначно ставимо да су сви негативни бројеви већи од ненегативних. Уређење $\leq'$ изгледа овако:

$$0 \leq' 1 \leq' 2 \leq' 3 \leq' \dots \leq' -1 \leq' -2 \leq' -3 \leq' \dots$$

Није тешко видети да је уређење $(\mathbb{Z}, \leq')$ добро.

АКСИОМА ИЗБОРА A11 (Цермелов принцип доброг уређења). На сваком скупу постоји добро уређење.

Сада ћемо доказати да Хауздорфов принцип повлачи принцип доброг уређења, који повлачи аксиому избора.

ТЕОРЕМА 3. $A6 \Rightarrow A11 \Rightarrow A1$.

Доказ. $A6 \Rightarrow A11$: Нека је $X \neq \emptyset$ произвољан скуп. Уочимо фамилију $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{F} = \{(Z, \leq): Z \subseteq X \text{ и } \leq \text{ је добро уређење на } Z\}.$$

Уредимо фамилију $\mathcal{F}$ на следећи начин: ставимо $(Z_1, \leq_1) \preceq (Z_2, \leq_2)$ ако важе услови:

(Z1) $Z_1 \subseteq Z_2$;

(Z2) уређење $\leq_1$ је рестрикција уређења $\leq_2$ на Z_1 , тј.

$$(\forall x, y \in Z_1)(x \leq_1 y \leftrightarrow x \leq_2 y);$$

(Z3) Z_1 је почетни комад у $(Z_2, \leq_2)$.

Није тешко видети да је релација $\preceq$ заиста парцијално уређење на $\mathcal{F}$.

Нека је, користећи A6, $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{F}$ неки максималан ланац. Зарад јасније презентације, индексирајмо ланац $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L} = \{(Z_i, \leq_i): i \in I\}.$$

Посматрајмо $W = \bigcup_{i \in I} Z_i$, и дефинишимо релацију $\leq$ на W са:

$$x \leq y \text{ ако и само ако } (\exists i \in I)(x, y \in Z_i \wedge x \leq_i y).$$

ТВРЂЕЊЕ А. Релација $\leq$ је добро уређење на W .

Доказ тврђења. Очигледно $W \subseteq X$ као унија подскупова од X . Треба да проверимо да је $\leq$ добро уређење на W . Релација $\leq$ очигледно јесте рефлексивна. Проверимо антисиметричност. Претпоставимо $x \leq y$ и $y \leq x$. То значи да постоје $i, j \in I$ такви да $x, y \in Z_i$ и $x \leq_i y$, и $x, y \in Z_j$ и $y \leq_j x$. Како је $\mathcal{L}$ ланац, имамо да на пример важи $(Z_i, \leq_i) \preceq (Z_j, \leq_j)$. Тада из $x \leq_i y$, користећи особину (Z2), закључујемо $x \leq_j y$, што заједно са $y \leq_j x$ повлачи $x = y$ јер је $\leq_j$ антисиметрична. Проверимо и транзитивност. Претпоставимо $x \leq y$ и $y \leq z$. То значи да постоје $i, j \in I$ такви да $x, y \in Z_i$ и $x \leq_i y$, и $y, z \in Z_j$ и $y \leq_j z$. Поново, како је $\mathcal{L}$ ланац, имамо да је на пример $(Z_i, \leq_i) \preceq (Z_j, \leq_j)$. Користећи особине (Z1) и (Z2) закључујемо $x, y \in Z_j$ и $x \leq_j y$, одакле следи $x, z \in Z_j$ и $x \leq_j z$ јер је $\leq_j$ транзитивна, тј. $x \leq z$, и завршили смо доказ транзитивности.

Сада ћемо доказати да је уређење $\leq$ линеарно. Нека $x, y \in W$. Изаберимо $i, j \in I$ тако да $x \in Z_i$ и $y \in Z_j$. Поново можемо да претпоставимо да је на пример $(Z_i, \leq_i) \preceq (Z_j, \leq_j)$. Тада $x, y \in Z_j$, па како је $\leq_j$ линеарно уређење, важи $x \leq_j y$ или $y \leq_j x$. Одатле, $x \leq y$ или $y \leq x$.

Конечно, доказујемо да је уређење $\leq$ добро. Нека је $A \subseteq W$ непразан скуп. Нека је $i \in I$ такво да $A \cap Z_i \neq \emptyset$, и нека је $a = \min_{(Z_i, \leq_i)}(A \cap Z_i)$; a постоји јер је $(Z_i, \leq_i)$ добро уређење. Тврдимо да је $a = \min_{(W, \leq)}(A)$. Нека је $x \in A$ произвољно; доказаћемо $a \leq x$. Ако је $x \in Z_i$, онда је, по дефиницији a , $a \leq_i x$, па је и $a \leq x$. Претпоставимо $x \notin Z_i$; нека је $j \in I$ такво да $x \in Z_j$. Како је $\mathcal{L}$ ланац и како $Z_j \not\subseteq Z_i$, мора бити $(Z_i, \leq_i) \preceq (Z_j, \leq_j)$. Специјално, Z_i је почетни комад у $(Z_j, \leq_j)$, па како $a \in Z_i$ и $x \notin Z_i$, мора бити $a \leq_j x$; дакле, $a \leq x$. Завршили смо доказ тврђења А. ■

Дакле, да бисмо завршили доказ импликације, довољно је да докажемо $W = X$. То ћемо и да урадимо, али нам је потребно још једно тврђење.

ТВРЂЕЊЕ Б. $(W, \leq)$ је највећи елемент ланца $\mathcal{L}$.

Доказ тврђења. Према претходном тврђењу знамо $(W, \leq) \in \mathcal{F}$. С обзиром да је $\mathcal{L}$ максималан ланац у $\mathcal{F}$, довољно је да докажемо да је $(W, \leq)$ горње ограничење од $\mathcal{L}$. Нека је $i \in I$ произвољно; доказаћемо $(Z_i, \leq_i) \preceq (W, \leq)$. Услов (Z1) је очигледно испуњен. Проверимо (Z2). Нека су $x, y \in Z_i$. Један смер, $x \leq_i y \rightarrow x \leq y$, очигледан је према дефиницији $\leq$. За други смер претпоставимо $x \leq y$; нека је $j \in I$ такво да $x, y \in Z_j$ и $x \leq_j y$. С обзиром да је $\mathcal{L}$ ланац, имамо два случаја: $(Z_i, \leq_i) \preceq (Z_j, \leq_j)$ и $(Z_j, \leq_j) \preceq (Z_i, \leq_i)$. Међутим, како $x, y \in Z_i$ и $x \leq_j y$, у оба случаја нам услов (Z2) даје $x \leq_i y$.

Остаје да проверимо услов (Z3). Нека је $a \in Z_i$, и нека је $x \in W$, $x \leq a$; доказујемо $x \in Z_i$. Нека је $j \in I$ такво да $a, x \in Z_j$ и $x \leq_j a$. Имамо два случаја: $(Z_i, \leq_i) \preceq (Z_j, \leq_j)$ и $(Z_j, \leq_j) \preceq (Z_i, \leq_i)$. Ако је $(Z_i, \leq_i) \preceq (Z_j, \leq_j)$, $x \in Z_i$ према услову (Z3) јер $a \in Z_i$ и $x \leq_j a$, а ако је $(Z_j, \leq_j) \preceq (Z_i, \leq_i)$, $x \in Z_i$ јер $Z_j \subseteq Z_i$. Завршили смо доказ тврђења Б. ■

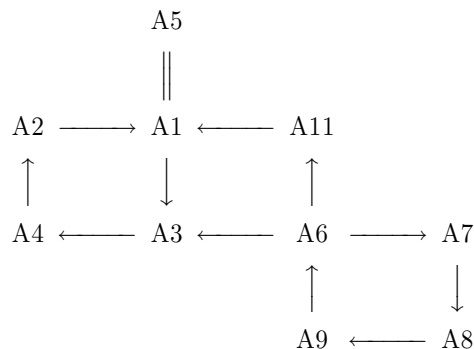
Докажимо сада да је $W = X$. Како је $(W, \leq)$ највећи елемент максималног ланца, он је максималан елемент у $\mathcal{F}$. Претпоставимо супротно, $W \subsetneq X$, и изаберимо $t \in X \setminus W$. На $W' = W \cup \{t\}$ дефинишемо релацију $\leq'$ са: $x \leq' y$ ако

и само ако $x, y \in W$ и $x \leq y$, или $y = t$. Сада није тешко видети да је $(W', \leq') \in \mathcal{F}$, као и да је $(W, \leq) \prec (W', \leq')$. Ово је у контрадикцији са максималношћу елемента $(W, \leq)$ у $\mathcal{F}$. Завршили смо доказ импликације $A6 \Rightarrow A11$.

$A11 \Rightarrow A1$: Нека је $\mathcal{F}$ непразна фамилија непразних скупова, и, користећи $A11$, нека је $\leq$ добро уређење на $\bigcup \mathcal{F}$. Тада са $f(X) = \min(X)$ дефинишемо функцију избора за $\mathcal{F}$. ■

5. Доказ импликације $A1 \Rightarrow A6$

У теоремама 1, 2 и 3 доказали смо следеће везе између разних верзија аксиоме избора:



Да бисмо завршили доказ међусобне еквивалентности свих ових тврђења треба још да докажемо да неко од тврђења $A1$ – $A5$ повлачи неко од тврђења $A6$ – $A9$. У литератури постоји много доказа ових импликација. Најједноставнији докази користе конструкције трансфинитном рекурзијом, међутим с обзиром на значај принципа максималности у математици постоји и много елементарних конструкција које заобилазе коришћење техника теорије скупова. Најчешће се овакви докази заснивају на (некој варијанти) Бурбакијеве теореме о фиксној тачки. Овде дајемо један такав доказ.

ТЕОРЕМА 4. $A1 \Rightarrow A6$.

Доказ. Претпоставимо да важи $A1$, и нека је $(P, \leq)$ произвољно парцијално уређење. Користећи $A1$, изаберимо функцију избора f за фамилију $\mathcal{P}(P) \setminus \{\emptyset\}$; дакле, f бира један елемент из сваког непразног подскупа од P :

$$(\forall X \subseteq P, X \neq \emptyset) f(X) \in X.$$

Циљ је да докажемо да P има максималан ланац. Означимо са $\mathcal{F}$ фамилију свих ланаца у P . Приметимо да фамилија $\mathcal{F}$ има следеће особине:

(O1) $\emptyset \in \mathcal{F}$, и

(O2) $\mathcal{F}$ је индуктивна.

За $A \in \mathcal{F}$, означимо са $\bar{A}$ скуп:

$$\bar{A} = \{x \in P \setminus A : A \cup \{x\} \in \mathcal{F}\};$$

дакле, $\bar{A}$ је скуп свих елемената $x \in P \setminus A$ који могу да продуже ланац A . Приметимо да је ланац A максималан ако и само ако $\bar{A} = \emptyset$. Сада за $A \in \mathcal{L}$ означимо са A^* скуп:

$$A^* = \begin{cases} A \cup \{f(\bar{A})\} & \text{ако } \bar{A} \neq \emptyset \\ A & \text{ако } \bar{A} = \emptyset. \end{cases}$$

Приметимо да по самој дефиницији важе следеће особине:

(O3) $(\forall A \in \mathcal{F}) A^* \in \mathcal{F}$,

(O4) $(\forall A \in \mathcal{F}) A \subseteq A^*$, и

(O5) $(\forall A \in \mathcal{F}) |A^* \setminus A| \leq 1$.

Такође, рекли смо да је A максималан ланац ако и само ако $\bar{A} = \emptyset$, што је сада еквивалентно са $A = A^*$.

У овом тренутку можемо да заборавимо на парцијално уређење P , и само да претпоставимо да имамо фамилију скупова $\mathcal{F}$ и операцију звезда на њој за које важе особине (O1)–(O5). Циљ је да докажемо да постоји $A \in \mathcal{F}$ такав да $A = A^*$.

За потфамилију $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ рећи ћемо да је *торањ* ако задовољава услове:

(T1) $\emptyset \in \mathcal{F}'$,

(T2) $\mathcal{F}'$ је индуктивна, и

(T3) $\mathcal{F}'$ је затворена за звезду, тј. $(\forall A \in \mathcal{F}') A^* \in \mathcal{F}'$.

Јасно је да је сама фамилија $\mathcal{F}$ један торањ (има особине (O1), (O2) и (O3)), тј. скуп свих торњева је непразан. Нека је $\mathcal{F}_0$ пресек свих торњева. Није тешко видети да је $\mathcal{F}_0$ такође један торањ, па како је $\mathcal{F}_0$ пресек свих торњева, $\mathcal{F}_0$ је заправо најмањи торањ.

За скуп $C \in \mathcal{F}_0$ рећи ћемо да је *добар* ако:

(D) $(\forall A \in \mathcal{F}_0)(A \subseteq C \vee C \subseteq A)$.

Дакле, $C \in \mathcal{F}_0$ је добар ако је упоредив са свим члановима фамилије $\mathcal{F}_0$. За добар скуп C уочимо фамилију:

$$\mathcal{K}_C = \{A \in \mathcal{F}_0 : A \subseteq C \vee C^* \subseteq A\}.$$

ТВРЂЕЊЕ А. *За сваки добар скуп C , $\mathcal{K}_C = \mathcal{F}_0$.*

Доказ тврђења. Довољно је да докажемо да је $\mathcal{K}_C$ торањ. Заиста, како је $\mathcal{K}_C \subseteq \mathcal{F}_0$ и $\mathcal{F}_0$ је најмањи торањ, закључујемо $\mathcal{K}_C = \mathcal{F}_0$. Услов (T1) је очигледно испуњен. Проверимо услов (T2). Нека је $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}_C$ ланац скупова; треба да проверимо да је $L = \bigcup \mathcal{L} \in \mathcal{K}_C$. С обзиром да је $\mathcal{L}$ ланац и у $\mathcal{F}_0$ и да је $\mathcal{F}_0$ индуктивна, $L \in \mathcal{F}_0$. По дефиницији $\mathcal{K}_C$, за свако $A \in \mathcal{L}$ важи $A \subseteq C$ или $C^* \subseteq A$. Имамо две могућности. Ако за сваки скуп $A \in \mathcal{L}$ важи $A \subseteq C$, онда очигледно и $L \subseteq C$. С друге стране, ако за бар један скуп $A \in \mathcal{L}$ важи $C^* \subseteq A$, онда очигледно $C^* \subseteq L$. Дакле, у оба случаја, $L \in \mathcal{K}_C$.

Остаје да проверимо (T3). Узмимо произвољан $A \in \mathcal{K}_C$, и докажимо $A^* \in \mathcal{K}_C$. Како $A \in \mathcal{K}_C$, размотрићемо три случаја: $A \subsetneq C$, $A = C$ и $C^* \subseteq A$. Ако $A \subsetneq C$, приметимо да не може да важи $C \subsetneq A^*$ јер $A \subsetneq C \subsetneq A^*$ повлачи

$|A^* \setminus A| \geq 2$ супротно особини (O5); како је C добар, он је упоредив са A^* (јер $A^* \in \mathcal{F}_0$), па како није $C \subsetneq A^*$, мора бити $A^* \subseteq C$, одакле следи $A^* \in \mathcal{K}_C$. Ако $A = C$, тада $A^* = C^*$, и тривијално $A^* \in \mathcal{K}_C$. Коначно, ако $C^* \subseteq A$, како је $A \subseteq A^*$, следи $C^* \subseteq A^*$, и поново $A^* \in \mathcal{K}_C$. Завршили смо доказ тврђења А. ■

Означимо са $\mathcal{D}$ фамилију свих добрих скупова у $\mathcal{F}_0$:

$$\mathcal{D} = \{C \in \mathcal{F}_0 : C \text{ је добар скуп}\}.$$

ТВРЂЕЊЕ Б. $\mathcal{D} = \mathcal{F}_0$.

Доказ тврђења. Као и у доказу претходног тврђења, довољно је да докажемо да је $\mathcal{D}$ торањ. Како је $\emptyset$ очигледно добар скуп, услов (T1) је испуњен. Докажимо услов (T2). Нека је $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{D}$ ланац скупова; треба да проверимо да је $L = \bigcup \mathcal{L} \in \mathcal{D}$. Јасно је да $L \in \mathcal{F}_0$, па треба да проверимо услов (D) за L . Нека је $A \in \mathcal{F}_0$ произвољан; циљ је да докажемо да важи $A \subseteq L$ или $L \subseteq A$. Имамо две могућности. Ако за сваки $C \in \mathcal{L}$ важи $C \subseteq A$, очигледно и $L \subseteq A$. С друге стране ако за неки скуп $C \in \mathcal{L}$ важи $C \not\subseteq A$, онда је $A \subseteq C$ јер је C добар, па очигледно $A \subseteq L$.

Коначно, докажимо (T3). Нека је $C \in \mathcal{D}$ произвољан; циљ је да докажемо $C^* \in \mathcal{D}$, тј. C^* је упоредив са свим скуповима у $\mathcal{F}_0$. Нека је $A \in \mathcal{F}_0$ произвољан. Претпоставимо $A \not\subseteq C^*$, и докажимо $C^* \subseteq A$. Приметимо да тада $A \not\subseteq C$ јер $C \subseteq C^*$. Како је $\mathcal{K}_C = \mathcal{F}_0$ према претходном тврђењу, $A \in \mathcal{K}_C$, што заједно са $A \not\subseteq C$ повлачи $C^* \subseteq A$. Завршили смо доказ тврђења Б. ■

Како је фамилија $\mathcal{D}$ очигледно ланац скупова, претходно тврђење каже да је $\mathcal{F}_0$ ланац скупова. Нека је $A_0 = \bigcup \mathcal{F}_0$. Према (T2), $A_0 \in \mathcal{F}_0$, па према (T3), $A_0^* \in \mathcal{F}_0$. Дакле, A_0^* учествује у унији $\bigcup \mathcal{F}_0$, па је $A_0^* \subseteq A_0$, док је с друге стране $A_0 \subseteq A_0^*$ тачно према (O4). Следи $A_0 = A_0^*$, и завршили смо доказ теореме. ■

ЛИТЕРАТУРА

- [1] A. Blass, *Existence of bases implies the axiom of choice*, Contemporary Mathematics **31** (1984), 31–33.
- [2] F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Veit & Comp., Leipzig, 1914.
- [3] K. Kuratowski, *Une méthode d'élimination des nombres transfinis des raisonnements mathématiques*, Fundamenta mathematicae **3.1** (1922), 76–108.
- [4] G. Kurepa, *Über das Auswahlaxiom*, Mathematische Annalen **126**, 1 (1953), 381–384.
- [5] O. Teichmüller, *Braucht man das Auswahlaxiom in der Algebra?*, Deutsche Mathematik **4** (1939), 567–577.
- [6] J. W. Tukey, *Convergence and Uniformity in Topology*, Annals of Mathematics Studies **2**, Princeton Univ. Press, Princeton, 1940.
- [7] E. Zermelo, *Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann: Aus einem an Herrn Hilbert gerichteten Briefe*, Mathematische Annalen **59**. 4 (1904), 514–516.
- [8] E. Zermelo, *Neuer beweis für die möglichkeit einer wohlordnung*, Mathematische Annalen **65.1** (1907), 107–128.
- [9] M. Zorn, *A remark on method in transfinite algebra*, Bulletin of the American Mathematical Society **41.10** (1935), 667–670.

Математички факултет, Београд

E-mail: slavko.moconja@matf.bg.ac.rs