

Др Ненад Стојановић и Милица Вучићевић

ИЗАЗОВИ У НАСТАВИ МАТЕМАТИЧКЕ ЛОГИКЕ У СРЕДЊОШКОЛСКОМ ОБРАЗОВАЊУ

1. Увод

Математичка логика је данас веома важна област математике, јер се налази у основи рачунарства и информатике. Без ње је тешко замислити развој програмирања, вештачке интелигенције и других области које карактеришу време у ком живимо. Због тога, свакако да је неопходно разумевање основа логике. Међутим, она није важна само због своје примене у рачунарству, већ пре свега због тога што развија прецизност, доследност и одговорност у мишљењу и изражавању.

Логичко мишљење није важно само за ученике који се посебно баве математиком и науком. Она је потребна и у свакодневном животу, јер развија самосталност у мишљењу, критичко разматрање, као и способност да тражимо различите путеве ка решењу проблема са којима се свакодневно сусрећемо. У том смислу, логика има много ширу улогу од саме наставе математике. Њена веза са филозофијом управо и указује на то да је одувек повезана са основним питањима људског размишљања.

У настави математике логика се јавља у дефиницијама, теоремама, доказима, задацима и у самом читању математичког текста. Проблем настаје када ученик зна формулу, али не разуме услове под којима се она примењује, па стога неће знати када сме да је употреби и шта из ње заиста следи. То се посебно добро види у геометрији, где се задаци ретко решавају простом заменом података у формулу. Често је потребно уочити односе између елемената фигуре, препознати које се теореме могу применити и како, повући помоћну линију или направити доказ кроз више повезаних корака. Управо зато геометрија представља добар пример области у којој логичко мишљење долази до изражаја. Због тога се развој логичког закључивања с правом сматра једним од најважних задатака наставе математике.

Дакле, логичке облике закључивања ученици користе и много пре него што се логика у настави експлицитно уведе као посебна тема. На пример, још у основној школи сусрећу се са доказима у којима се примењују важни логички принципи, иако их често не препознају као такве. На пример, у познатом доказу да

је број $\sqrt{2}$ ирационалан користи се метода свођења на противречност. Полази се од претпоставке супротне од тврдње коју желимо да докажемо, то јест претпоставља се да је $\sqrt{2}$ рационалан број, а затим се низом правилних закључака долази до контрадикције. Овакав начин доказивања ученицима тада, а и касније, често делује збуњујуће. Алгебарски кораци нису проблем, него сама идеја доказа. Управо овај пример показује да су логички закони и методе закључивања присутни у настави математике много пре него што се формално именују.

Међутим, у школској пракси логика се често доживљава као посебна наставна јединица која се своди на симболе, таблице истинитости и формална правила. Такав приступ може да буде доста тежак ученицима, а такође може довести до тога да, на пример, ученици правилно записују формуле, али не разумеју њихово значење, услове под којима важе и улогу у доказу. Због тога је важно да се елементи математичке логике уводе поступно: од природног језика и интуитивног закључивања ка прецизном математичком језику и формалном запису.

Разматраћемо неке од најчешћих изазова у настави математичке логике у средњошколском образовању. Посебна пажња посвећена је односу природног и математичког језика, разумевању импликације, разликовању импликације и еквиваленције, негацији сложених исказа, као и разлици између синтаксе и семантике математичког записа.

2. Природни језик и потреба за математичком прецизношћу

Један од најважнијих задатака савремене математичке логике био је да формира посебне језике, тако да буду прецизнији од свакодневног језика. Природни језик свакако јесте веома богат и погодан за свакодневну комуникацију, али може да буде двосмислен. Исте реченице могу да се тумаче на различите начине, што за математику није добро, јер може довести до нејасноћа и погрешних закључака. Зато логика уводи вештачке језике у којима се тачно зна шта сваки симбол значи. Идеја о таквим прецизним вештачким језицима, у коме би се исправност закључка могла проверавати готово као рачун, јавила се још код Лајбница, а први облици ових језика појављују се у другој половини 19. века.

Потреба за прецизирањем значења може се у настави показати већ на једноставним примерима из свакодневног говора. На пример, реченица: „Вечерас идем у позориште или у биоскоп“ у свакодневном говору разуме се као одлазак на једно од та два места, али не оба. Међутим, у математичкој логици реч „или“ увек има неискључујуће значење. Ако исказе „идем у позориште“ и „идем у биоскоп“ означимо редом са p и q , тада је исказ $p \vee q$ тачан када је тачан бар један од исказа p и q , укључујући и случај када су оба исказа тачна. Дакле, у математичком значењу дисјункција не искључује могућност да важе оба исказа. Ово нам показује да се значења логичких везника из свакодневног говора не могу увек непосредно преносити у математички језик. Због тога је битно у настави посебно нагласити да речи као што су „и“, „или“, „ако“, „не“, „сваки“ и „неки“ у математици добијају прецизно одређено значење. Управо на томе инсистира и Коста Дошен у својој књизи [3]. Он истиче да се основне логичке речи јављају већ у

природном језику, али да их логика издваја, прецизира и проучава њихову улогу у правилном закључивању. Другим речима, логика не уводи потпуно нов језик одвојен од свакодневног говора, већ полази од речи које су ученицима познате, а затим им даје строже значење. Стога ученицима треба постепено уводити примере који указују на разлику између свакодневног и математичког језика, па тако логички симболи постају средство којим се отклања двосмисленост природног језика.

Иако се настава у средњој школи не може свести на формални логички рачун, ова идеја је корисна за разумевање циља наставе логице: ученике треба оспособити да разликују граматички исправну реченицу од прецизно формулисане математичке тврдње, као и да провере да ли закључак заиста следи из датих претпоставки. Због тога математичка логика не треба да буде представљена само као скуп симбола и таблица истинитости. Тек када ученици уоче због чега свакодневни језик није увек довољно прецизан, формални језик логице добија своје право значење у настави математике.

3. Од интуитивног закључивања ка формалном запису

Као што је већ поменуто, изучавање елемената математичке логице у школи не мора да започне формалним дефиницијама, симболима и таблицама истинитости. Напротив, добар увод могу да буду задаци који се на први поглед решавају „здравим разумом“, а у суштини захтевају јасно логичко закључивање. То треба да буду једноставнији задаци, занимљиви ученицима, такви да се од њих захтева да поступно анализирају услове, разматрају могуће случајеве и одбацују погрешне могућности. На пример, могу да буду корисне логичке загонетке, такозвани проблеми истине, у којима треба утврдити да ли су искази истинити или не. Ученик најпре покушава да дође до решења интуитивно, иако заправо у том поступку већ користи неке основне логичке идеје.

Један од познатих типова таквих задатака јесу проблеми са особама које увек говоре истину и особама које увек лажу. Посматрајмо следећи пример.

ПРИМЕР 3.1. Налазимо се у соби са двоја врата. Једна врата воде у слободу, а друга у сигурну смрт. Поред сваких врата стоји по један чувар. Један чувар увек говори истину, а други увек лаже. Не знамо која врата воде у слободу, нити знамо који чувар говори истину. Дозвољено је поставити само једно питање само једном чувару. Које питање треба поставити да бисмо сигурно сазнали која врата воде у слободу?

Решење. Једно могуће питање гласи:

„Када бих питао другог чувара која врата воде у слободу, која врата би ми он показао?“

Без обзира на то да ли је питање постављено чувару који говори истину или чувару који лаже, одговор ће нам увек указати на погрешна врата, па зато треба изабрати супротна врата. Овај задатак је погодан као увод у математичку логику јер ученици могу да дођу до решења и пре формалног увођења логичких симбола.

Они већ тада, интуитивно, користе логичко закључивање: разматрају два могућа случаја, прате последице претпоставки и проверавају да ли је закључак независан од тога ког су чувара питали.

Затим ученицима треба постављати све сложеније задатке и указати на то да интуиција ипак није довољна. Потом постепено уводимо формалније начине представљања: симболе, таблице истинитости, као и правила закључивања и јасно издвајање претпоставки и закључка. Тако ученицима показујемо да закључивање не процењујемо само по утиску, већ да га можемо и проверити.

4. Искизи и логички везници

Први појам са којим се ученици сусрећу при изучавању математичке логике јесте појам *исказа*. Исказ је реченица којом нешто тврдимо и која је или тачна или нетачна. При увођењу овог појма није довољно да само дамо дефиницију, корисније је да помоћу примера и контрапримера укажемо ученицима на основне особине овог појма. Тако ученици и сами уочавају да није свака граматички исправна реченица уједно и исказ у логичком смислу. На пример, реченице „Затвори прозор!“ и „Да ли си урадио домаћи задатак?“ јесу смислене реченице, али нису искази у логичком смислу. Не можемо да испитамо да ли су истините или не, јер је прва наредба, а друга питање. С друге стране, реченице попут „Број 6 је мањи од броја 7“ и „Број 5 је збир бројева 3 и 4“ јесу, јер за сваку од њих можемо да утврдимо истинитост. Након што ученици усвоје појам исказа можемо да уведемо сложеније исказе које формирамо помоћу логичких везника.

Термин *везник* јесте преузет из граматике, али се не користи у потпуно истом значењу. Док у граматички везници повезују различите врсте речи и делове реченице, у логици се под везником подразумева нешто помоћу чега се од датих исказа граде нови, сложенији искази. Треба повести рачуна о томе да значење везника у природном језику не може увек да се непосредно пренесе у логички запис. Дошен наводи следећи пример. Реченица „Марко и Јанко су јунаци“ може да се посматра као замена за исказ „Марко је јунак и Јанко је јунак“ С друге стране, реченица „Марко и Јанко су побратими“ не може да буде замена за „Марко је побратим и Јанко је побратим.“

Зато је у настави важно нагласити да логика не проучава све могуће употребе везника у језику. Основни логички везници су: „и“, „или“, „ако“ (уз који обично иде и „онда“) и „не“ и њихово значење се прецизно уводи.

Претходно је појашњена разлика између свакодневног и математичког значења везника „или“. Посебну пажњу треба посветити импликацији, јер је она најчешћи извор ученичких забуна, с обзиром да се у свакодневном језику израз „ако ... онда“ обично разуме као узрочно-последична веза. На пример, реченица „Ако пада киша, улица је мокра.“ Постоји веза: киша је узрок, мокра улица је последица. Међутим, у математичкој логици импликација се не процењује према томе да ли су искази p и q садржајно повезани, што је ученицима често необично, јер очекују да искази повезани импликацијом морају бити смислено или узрочно

повезани. У настави је корисно навести и управо такве примере импликација које делују чудно или бесмислено. На пример, у реченици „Ако је 12 прост број, онда је сутра недеља“ не постоји веза између исказа. Међутим, у логици овакав исказ је тачан, јер 12 није прост број.

Да би се ученицима таблица истинитости импликације приближила на разумљивији начин, корисно је увести је помоћу неког примера. Замислимо да родитељи кажу детету:

„Ако ове школске године будеш имао све петице, купићемо ти рачунар.“

Реченица има облик $p \Rightarrow q$, где је p исказ „ученик има све петице“, а q исказ „родитељи ће купити рачунар“. Потом се са ученицима могу размотрити све могућности.

- (1) Ако ученик има све петице и родитељи купе рачунар, обећање је испуњено. У том случају су искази p и q тачни, па је и импликација $p \Rightarrow q$ тачна.
- (2) Ако ученик има све петице, а родитељи не купе рачунар, обећање није испуњено. То је једини случај у коме је импликација нетачна.
- (3) Ако ученик нема све петице, а родитељи ипак купе рачунар, родитељи се не могу сматрати лажовима, пошто услов није испуњен, обећање није прекршено, па је зато импликација и у овом случају тачна.
- (4) Ако ученик нема све петице и родитељи не купе рачунар, дата изјава се такође сматра тачном, јер услов није испуњен и родитељи нису били у обавези да испуне обећање.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	Тумачење
Т	Т	Т	обећање је испуњено
Т	⊥	⊥	обећање је прекршено
⊥	Т	Т	услов није испуњен
⊥	⊥	Т	услов није испуњен

Такође, ученицима је често нејасно како импликација може да буде тачна и онда када је њена претпоставка нетачна. Зато је корисно посматрати примере у којима се јасно разликују истинитост појединачних исказа и исправност прелаза између њих. Ово би могао да буде један такав пример.

$$\begin{aligned}
 5 &= 5, \\
 4 &= 4, \\
 2^2 &= (-2)^2, \\
 2 &= -2, \\
 1 &= -3.
 \end{aligned}$$

Полази се од тачног исказа и низом прелаза долази до очигледно нетачног исказа. Са ученицима треба продискутовати у ком кораку је настала грешка. Наравно, грешка се јавља у прелазу са $2^2 = (-2)^2$ на $2 = -2$, јер из једнакости квадрата

не следи једнакост самих бројева. Потом треба посматрати исти низ у обратном смеру:

$$\begin{aligned} 1 &= -3 \Rightarrow 2 = -2 \\ 2 &= -2 \Rightarrow 2^2 = (-2)^2 \\ 2^2 &= (-2)^2 \Rightarrow 4 = 4 \\ 4 &= 4 \Rightarrow 5 = 5. \end{aligned}$$

Дакле, добијамо импликацију $1 = -3 \Rightarrow 5 = 5$, што је у логици тачно, јер је њена претпоставка нетачна, а последица тачна. Сваки корак је био исправан, па тиме показујемо да математички доказ није само низ реченица који се завршава тачним резултатом. Доказ мора да буде низ логички дозвољених прелаза.

Претходни пример управо указује на још један изазов у настави: разликовање импликације и еквиваленције. Грешка у претходном примеру настала је управо зато што је један прелаз схваћен као да важи у оба смера. Из једнакости $a = b$ заиста следи $a^2 = b^2$, али обратно не мора да важи. Ова напомена је посебно важна при решавању једначина. Свакако, из $x = 2$ следи $x^2 = 4$, али из једначине $x^2 = 4$ не добијамо само $x = 2$, већ $x = 2 \vee x = -2$. Зато ученике треба стално подсећати да сваки корак у решавању задатка треба проверити: да ли је реч о еквивалентној трансформацији или о трансформацији која важи само у једном смеру.

Такође, посебну пажњу у настави треба посветити негацији сложених исказа. Треба нагласити да негацију не добијамо тако што реченици додамо реч „не“. Да бисмо правилно негирали неки сложен исказ, потребно је најпре уочити његову логичку структуру. Проблем се најчешће јавља када треба да негирамо исказ у облику импликације. Ученици често покушавају да негирају импликацију тако што праве неку нову импликацију, што није добро. Да бисмо то приближили ученицима можемо, на пример, опет да се осврнемо на пример са родитељима и обећањем: „Ако ове школске године будеш имао све петице, купићемо ти рачунар“. Важно је нагласити типичну грешку, односно нагласити да негација ове импликације није нека нова импликација, тј. негација није реченица: „Ако ученик нема све петице, родитељи му неће купити рачунар“. Због тога је корисно вратити се на значење исказа облика $p \Rightarrow q$. Такав исказ је неистинит само у једном случају: када је p тачно, а q нетачно. Зато негација поменуте импликације мора да опише управо тај случај па је зато

$$\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q.$$

Такође, занимљив пример разлике између логичког и свакодневног српског језика јесте двострука негација. У класичној логици важи закон двоструке негације:

$$p \Leftrightarrow \neg\neg p.$$

То значи да су исказ p и његова двострука негација $\neg\neg p$ семантички еквивалентни, односно да имају исту истинитосну вредност. Важно је нагласити да они нису синтаксно исти: запис p није исти као запис $\neg\neg p$. На пример, ако је p исказ

„ученик има све петице“, онда је $\neg\neg p$ исказ „није тачно да ученик нема све петице“ и у класичној логици ова реченица има исто значење као и полазна. Слично, исказ „није тачно да број 6 није паран број“ семантички је еквивалентан исказу „број 6 је паран“. Међутим, у свакодневном говору двострука негација не мора увек да значи исто што и полазни исказ. На пример, реченица „Није да ученик није радио“ у класичној логици одговара реченици „Ученик је радио“. У свакодневном говору може да значи да се ученик трудио, али можда није било довољно. Зато у настави треба нагласити да је закон двоструке негације правило класичне логице, али да се његова примена у свакодневном језику мора тумачити пажљиво.

5. Синтакса и семантика

Још један важан изазов у настави математичке логице јесте разликовање синтаксе и семантике. У математици није довољно да запис буде формално правилан, већ треба и разумети шта тај запис значи и под којим условима је тврдња коју изражава истинита. Синтакса се односи на правила формирања математичког записа: правилну употребу симбола, квантификатора, логичких везника, заграда, једнакости ... Семантика се, с друге стране, односи на значење тог записа: шта се њиме тврди, на који скуп се тврдња односи, када је она истинита, а када није. Због тога је важно стално наглашавати да синтаксно правилно написана формула не мора бити и истинита формула. То би требало и илустровати примерима.

У исказној логици ову разлику можемо да објаснимо преко формула и њихових истинитосних вредности. На пример, посматрајмо правилно записану формулу

$$(p \Rightarrow (q \wedge r)) \vee (q \Rightarrow r).$$

То што је формула правилно написана не говори још да ли је она истинита или неистинита. Потребно је да исказним словима која се у формули појављују припишемо истинитосне вредности. У једној интерпретацији исказном слову можемо да припишемо тачно једну вредност. Потом, користећи таблице налазимо истинитосну вредност целе формуле. На пример, можемо узети да исказно слово p има истинитосну вредност $\perp$, исказно слово q истинитосну вредност $\top$ и r вредност $\top$. У наведеном примеру формула $(p \Rightarrow (q \wedge r)) \vee (q \Rightarrow r)$ за такву валуацију има вредност $\top$. Овај поступак показује да се у семантици исказне логице формула не посматра само као низ правилно распоређених симбола, већ као израз коме се, у одређеном тумачењу, може приписати истинитосна вредност.

Ова разлика је још видљивија у предикатској логици, где осим логичких везника, важну улогу имају и квантификатори, универзални и егзистенцијални. Треба нагласити да су они јако битни због формулације тврђења која се односе на скупе. Повезани су са речима „сви“ и „неки“, које су у природном језику веома честе, али у логици добијају прецизно значење. Предикатска логика омогућава да се говори о објектима, њиховим особинама и односима између њих. У семантици језика првог реда значење формуле зависи и од домена о коме говоримо, односно од скупа објеката на који се променљиве односе.

ПРИМЕР 5.1. Посматрајмо реченице

$$(\exists x \in \mathbb{R})(x^2 = 2) \quad \text{и} \quad (\exists x \in \mathbb{Q})(x^2 = 2).$$

Оба записа су правилно формирана: квантификатор је смислено употребљен, променљива је назначена, а формула $x^2 = 2$ је јасна. Међутим, прва реченица је тачна, јер постоји реалан број чији је квадрат једнак 2, а друга није. Дакле, промена скупа над којим се променљива посматра мења истинитосну вредност исказа.

Добри примери су и примери са променом редоследа квантификатора.

ПРИМЕР 5.2. Посматрајмо реченице

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(y > x) \quad \text{и} \quad (\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})(y > x).$$

Опет, синтаксно су оба записа правилна, али семантички изражавају потпуно различите тврдње. Први исказ значи да за сваки реалан број x постоји реалан број y који је већи од њега. Овај исказ је тачан, за дато x може да се узме да је $y = x + 1$. Други исказ тврди да постоји постоји највећи реалан број, што није тачно.

Овај пример је важан јер указује и на то да је битан редослед навођења квантификатора, јер промена редоследа може да потпуно промени значење. Зато је корисно да се од ученика тражи да формулу прочитају речима, одреде домен на који се она односи и објасне у ком случају је тачна, а у ком није. На тај начин се разликовање синтаксе и семантике повезује са разумевањем математичког текста, решавањем задатака и писањем доказа.

6. Закључак

Настава математичке логике не би требало да се сведе само на увођење симбола, таблица истинитости и формалних правила. То јесте неопходно, али да би ученици то боље разумели треба их уводити поступно, полазећи од природног језика, интуитивног закључивања и примера који су ученицима блиски. У том процесу посебно је важно показати да речи које ученици већ користе у свакодневном говору, као што су „и“, „или“, „ако“, „не“, „сви“ и „неки“, у математици добијају строже и прецизније значење. На то указује и Коста Дошен у књизи [3], истичући да основне логичке речи припадају природном језику, али да их логика издваја и проучава њихову улогу у правилном закључивању. Управо то може да нам помогне да приближимо ученицима формални језик логике. Ученици тада не доживљавају симболе као нешто спољашње и нешто што је наметнуто, већ као средство којим се отклања двосмисленост и јасније изражава структура математичке тврдње.

Посебно је важно да се формални појмови уводе кроз примере који су ученицима блиски. Могу се користити примери из свакодневног живота, тумачење правилника, конкурса и слично. Занимљиве логичке загонетке и проблеми истине

могу да буду добар увод, јер ученици у њима прво интуитивно разматрају могуће случајеве, прате последице претпоставки и проверавају да ли закључак зависи од изабраног случаја. Такви примери указују на то да се логичко закључивање може развијати и пре експлицитног увођења формалних симбола. Међутим, они истовремено указују и на ограничења интуиције: када су проблеми сложенији, потребно је имати прецизнији апарат за проверу исправности закључка.

Примери који су овде разматрани указују на то да се многе ученичке тешкоће јављају онда када се значење из свакодневног језика непосредно преноси у математички контекст. На то наилазимо код дисјункције, која у свакодневном говору често има искључујуће значење, код импликације, која се погрешно разуме само као узрочно-последична веза, као и код негације сложених исказа. На пример, треба указати и на закон двоструке негације и указати на то да записи p и $\neg\neg p$ нису синтаксно исти, али у класичној логици имају исту истинитосну вредност. Импликација често задаје доста потешкоћа ученицима, па је зато у настави потребно посебно обрадити случај када је претпоставка нетачна, као и примере у којима импликација изгледа необично из угла свакодневног језика. Сличне потешкоће појављују се и при разликовању импликације и еквиваленције, посебно у поступцима решавања једначина и у разумевању математичких доказа.

Разликовање синтаксе и семантике представља још једну важну наставну тему. Потребно је разумети шта формула тврди, у ком домену се тумачи и под којим условима је истинита, а не само да ли је синтаксно лепо записана. То се јасно види у примерима из предикатске логице, где промена домена или редоследа квантификатора може потпуно да промени значење исказа. Зато је корисно да се од ученика тражи да формуле не само записују, већ и читају речима и тумаче.

На основу наведених примера може се закључити да настава математичке логице треба да буде усмерена не само на усвајање формалних правила, већ и на разумевање њихове улоге. Логика није само додатак математици, већ један од њених основних начина мишљења. Она помаже ученицима да прецизно читају услове задатка, разликују претпоставке од закључака, уоче оправдане и неоправдане кораке у доказу и схвате значење математичких тврдњи. У том смислу, логика повезује језик, мишљење и математичко доказивање. Овакво схватање логице може се повезати и са њеним местом у настави филозофије. У средњој школи ученици се са логиком често сусрећу и у филозофији, где се говори о правилном мишљењу. Са друге стране, у математици се исти проблеми посматрају строже: уводе се симболи, правила и формални записи којима се закључивање може прецизно проверити.

Зато филозофску и математичку логику и не треба посматрати као две потпуно одвојене области. Оне су повезане, истим проблемима се баве, само се разликују по приступу. Филозофски приступ наглашава разумевање мишљења и аргумената, док математички приступ наглашава прецизан запис и проверу закључивања.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] М. Bako, *Why we need to teach logic and how can we teach it*, International Journal for Mathematics Teaching and Learning **3** (2002), 1–9.
- [2] Н. Икодиновић, *Математика 1* – уџбеник са збирком задатака за први разред гимназија и средњих стручних школа, Klett, Београд, 2014.
- [3] К. Дошен, *Основна логика*, Математички институт САНУ, Београд, 2008.
- [4] N. A. Tarasenkova, I. A. Akulenko, *The problem of forming and developing students' logical thinking in the context of subject specialization in secondary school*, American Journal of Educational Research **2.1B** (2014), 33–40.

Природно-математички факултет, Универзитет у Крагујевцу

E-mail: nenad.stojanovic@pmf.kg.ac.rs, milica.vucicevic@pmf.kg.ac.rs