

Анђелка Симић Миливојевић

РАЗВИЈАЊЕ ДИВЕРГЕНТНОГ МИШЉЕЊА У НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ

Апстракт. У раду се разматрају могућности подстицања дивергентног мишљења у настави математике применом задатака који омогућавају више решења, различите стратегије и аргументовање поступака. Полази се од тога да настава математике не треба да буде усмерена само на један тачан резултат и један очекивани поступак, већ и на стварање ситуација у којима ученици истражују, упоређују приступе и образлажу своја решења. У теоријском делу рада разјашњавају се основни аспекти дивергентног мишљења: флуентност, флексибилност и оригиналност. Затим се приказују наставни формати погодни за његов развој, а посебна пажња посвећена је улози наставника у подстицању различитих идеја, поређењу ученичких решења и развијању математичке аргументације. У завршном делу рада дати су примери задатака који могу да помогну у развијању дивергентног мишљења кроз наставу математике.

1. Увод

У настави математике често је присутна слика часа на коме ученици траже једно тачно решење и користе један очекивани поступак за решавање задатка. Такав приступ има значајну улогу у усвајању основних појмова, правила и процедура, али уколико постане доминантан може сузити простор за самостално истраживање, повезивање идеја и развој математичког мишљења. Када ученици имају прилику да постављају питања, траже више начина решавања, користе различите репрезентације и повезују математичке појмове, математика постаје средство за мишљење, истраживање и разумевање света око себе. У том контексту посебно је значајно развијање дивергентног мишљења у настави математике. Оно није важно само за ученике који имају већа постигнућа, већ за све ученике, јер подстиче активније учешће, флексибилнију примену знања и сигурност у самосталном решавању проблема. У млађим разредима основне школе задаци треба више да се ослањају на конкретне, визуелне и опипљиве садржаје, јер ученици тог узраста лакше уче кроз непосредно искуство, слике, моделе и ситуације блиске свакодневном животу. Такав начин рада није искључен ни са ученицима који су у старијим разредима основне школе и средњој школи, али је с њима могуће радити и сложеније задатке који захтевају повезивање више појмова, избор стратегије, проверу претпоставки и аргументовање решења. Овако

усмерена настава доприноси развоју функционалних знања, јер ученици математичке садржаје не усвајају само као издвојене поступке, већ уче да их повезују и примењују у другим наставним предметима и различитим реалним ситуацијама.

У раду ће најпре бити размотрена теоријска полазишта о дивергентном мишљењу и његовој улози у настави математике. Након тога биће приказани наставни формати, типови задатака и поступци наставника који могу да подстакну ученике да исти проблем разматрају на више начина. У завршном делу рада биће дати примери задатака погодних за развој дивергентног мишљења, уз коментаре о начинима на које они подстичу различите приступе, математичку аргументацију и функционалну примену знања.

2. Дивергентно мишљење у настави математике

Мишљење омогућава појединцу да уочи односе међу појавама, да повезује елементе у одређеном контексту и разуме свет око себе. У класичној психолошкој литератури посебно место заузима разликовање конвергентног и дивергентног мишљења, које се најчешће повезује са радом Ц. П. Гилфорда. Конвергентно мишљење усмерено је ка једном тачном или најбоље утемељеном решењу, док дивергентно мишљење подразумева генерисање више различитих и оригиналних решења и приступа у оквиру исте проблемске ситуације [4, 5]. У контексту математике, посебно је важно да се генерисане идеје критички вреднују и аргументовано оправдавају у односу на циљ и услове задатка, уз јасне критеријуме ваљаности решења [3, 8]. У том смислу, дивергентно и конвергентно мишљење делују комплементарно, те прво отвара простор за више могућих решења, а друго омогућава избор, проверу и аргументовање. У настави математике ова разлика је посебно значајна, јер математичко мишљење не подразумева само примену усвојених правила и процедура. Оно обухвата и способност ученика да проблем сагледа из више углова, да промени стратегију, изабере одговарајући поступак и своје решење математички образложи. Због тога задаци који дозвољавају више начина решавања, више тачних одговора или више могућих интерпретација могу бити значајан подстицај за развој дивергентног мишљења.

Дивергентно мишљење се најчешће операционализује преко флуентности, флексибилности и оригиналности, док поједини аутори као посебан показатељ издвајају и елаборацију. Флуентност означава способност генерисања већег броја математички смислених идеја или решења за дати проблем. Флексибилност подразумева промену приступа, прелазак с једне стратегије на другу и употребу различитих математичких појмова, поступака или репрезентација. Оригиналност се односи на неочекивана, ређа или нестереотипна решења, док елаборација подразумева разрађивање идеје, поступка или решења [4, 16].

Флуентност се у настави математике може препознати у ситуацијама у којима ученик наводи више математички оправданих примера, решења или поступака. То могу бити активности у којима ученици састављају различите изразе чија је вредност једнака датом броју, набрајају могуће комбинације, проналазе више примера који испуњавају задате услове или креирају више геометријских облика

од датих елемената. Питања која подстичу флуентност могу да гласе: „Напиши што више примера за ...“, „Колико има могућности ...?“, „На колико начина можеш да ...?“ или „Која све решења испуњавају дати услов?“. Флексибилност се испољава када ученик уме да пређе са аритметичког на алгебарски приступ, са симболичког записа на цртеж или табелу, или када исти задатак решава на различите начине. У том смислу корисно је разликовати потенцијалну и практичну флексибилност [20]. Потенцијална флексибилност значи да ученик познаје више начина решавања и може да их наведе када га наставник на то подстакне, док практична флексибилност постаје видљива онда када ученик те начине заиста користи у решавању задатка и уме да изабере и оправда одговарајући приступ. Један од предуслова за развој оригиналности код ученика је добро познавање основних математичких садржаја, јер је тешко креативно и оригинално решавати задатке без чврсте основе знања [10]. Постоје радови који експлицитно указују да је тема дивергентног/креативног мишљења у математици „осетљива“ у школској пракси. Михајловић [10] указује да се креативни аспект математике у настави често занемарује, док проблеми отвореног типа, за разлику од рутинских и затворених задатака, стварају услове за развој дивергентног мишљења. Они омогућавају ученицима да трагају за различитим решењима и стратегијама, чиме се подстичу флуентност, флексибилност и оригиналност математичког мишљења.

Развој дивергентног мишљења не треба посматрати као једноставан линеаран процес у коме старији ученици нужно испољавају виши степен креативности. Истраживања развоја креативног мишљења указују на то да се различите компоненте креативности развијају неуједначено па неке од њих током школовања стагнирају или опадају, док се друге (на пример оригиналност и поједини аспекти визуелно-просторног мишљења) могу снажније испољити у каснијим фазама развоја, укључујући адолесценцију [6, 7]. Због тога у настави математике не треба полазити од претпоставке да узраст сам по себи обезбеђује развијеније дивергентно мишљење. С друге стране, старији ученици располажу богатијим математичким знањем и ширим репертоаром појмова, правила и процедура, што омогућава примену сложенијих задатака који подстичу дивергентно мишљење. То су задаци чије решавање подразумева више корака, различите стратегије, повезивање више математичких појмова, проверу претпоставки и аргументовање решења. Управо зато је код овог узраста важно систематски понудити задатке који подстичу генерисање више идеја, промену стратегије, уочавање различитих односа и поређење више могућих приступа.

Осим когнитивних услова, важно је имати у виду и афективну страну учења математике. Математичка анксиозност, страх од грешке, несигурност и негативне емоције у вези с математиком могу смањити ученикову спремност да истражује, предлаже мање очекиване приступе и одступи од познатог поступка. Математичка анксиозност може ометати когнитивну обраду, нарочито радну меморију, што је значајно за разумевање тешкоћа које ученици имају у решавању математичких проблема [1]. Стога развој дивергентног мишљења не зависи само од избора задатака, већ и од наставне атмосфере у којој се различити покушаји, питања и начини размишљања прихватају као део процеса учења.

3. Наставни формати и технике који подстичу дивергентно мишљење

Дивергентно мишљење у настави математике може се подстицати различитим наставним форматима који ученике не усмеравају само ка једном унапред очекиваном поступку, већ их подстичу да истражују, бирају стратегије, проверавају претпоставке и образлажу своја решења. Такви задаци не замењују увежбавање основних поступака, већ га допуњују и проширују, јер ученицима омогућавају да математичко знање користе флексибилније, самосталније и у новим ситуацијама. Посебан значај имају отворени задаци (*open-ended tasks*) и задаци са више решења (*Multiple Solution Tasks*, MST), јер ученицима омогућавају да исти проблем разматрају на више начина [2, 8, 11]. Осим тога, важни су и постављање проблема (*problem posing*) [16, 17], као и активности математичког моделовања, односно задаци који подстичу изградњу модела (*Model-Eliciting Activities*, MEA) [9]. Активности типа увек-понекад-никад (*Always-Sometimes-Never*, ASN) такође могу бити корисне јер подстичу ученике да испитују тврђења, траже примере и контрапримере и образлажу своје закључке. Истраживања показују да је креативност ученика повезана са успешношћу у решавању геометријских проблема, нарочито када је реч о отвореним нерутинским задацима који омогућавају више решења [15]. Геометрија је у том погледу посебно погодна, јер омогућава повезивање визуелног увида, различитих репрезентација, помоћних конструкција и више путева решавања. Слично томе, истраживање са ученицима средњошколског узраста указује на значај дивергентних математичких проблема и поступне наставничке подршке у развијању напреднијег математичког мишљења [12]. У наставку ће бити приказани наставни формати и типови задатака који могу да отворе простор за више идеја, различите приступе, поређење решења и математичку аргументацију.

Отворени задаци немају унапред задат јасан пут до циља и често немају јединствен одговор. Они могу бити различитог степена отворености: од задатака у којима је дат проблем, али је могуће више начина решавања, преко задатака с више тачних одговора, до ситуација у којима ученици самостално осмишљавају поступак, решење или чак сам проблем. Наставнички фокус код оваквих задатака није само на томе да ли је добијено решење тачно, већ и на начину на који је ученик до њега дошао. Зато је важно да ученици решења представљају, пореде и образлажу. На тај начин развијају навику да испитују услове задатка, проверавају претпоставке и уочавају да истом проблему могу приступити на више начина.

Задаци с више решења осмишљени су тако да имају више тачних одговора или више суштински различитих поступака који воде до истог решења. У таквим задацима наставник не тражи само коначан резултат, већ и различите начине долажења до њега. Захтеви као што су: „Наћи бар два различита начина“, „Покажи још један поступак“ или „Упореди своје решење с решењем друга“ усмеравају ученике ка флуентности и флексибилности. Овај формат је посебно користан јер ученици увиђају да математички задатак не мора бити везан за један поступак. На пример, исти проблем може се решити цртежом, табелом, једначи-

ном, разматрањем случајева или уочавањем обрасца. Када ученици упоређују различите поступке, они развијају не само способност генерисања више идеја, већ и способност процене који је приступ у датој ситуацији најпогоднији.

Код задатака у којима се очекује *постављање проблема*, ученици не решавају само задатке које је формулисао наставник, већ сами осмишљавају математичке проблеме на основу дате слике, ситуације или већ решеног задатка. Уместо да одговарају на постављено питање, они га сами формулишу. Овакав приступ отвара простор за различите идеје јер једни ученици на пример могу да се усмере на углове, други на обим или површину, трећи на бројање, трансформације или услове. На тај начин природно се развија више различитих приступа и перспектива, а наставник из ученичких питања може да сагледа како ученици разумеју структуру математичке ситуације.

Активности типа *увек-понекад-никад* полазе од тврђења о математичким појмовима која ученици треба да класификују и оправдају. Ако ученици тврде да тврђење важи увек или никада, потребно је да своје мишљење поткрепе доказом, док за одговор „понекад“ треба да наведу пример у коме оно важи и контрапример у коме не важи. Овај формат развија флексибилност у аргументацији јер ученик прелази са непосредног утиска и „тако изгледа“ на питање „под којим условима важи“. На тај начин ученици уче да разликују опште тврђење од оног које зависи од услова, да траже примере и контрапримере и да своје закључке математички образлажу.

Математичко моделовање полази од реалног контекста и од ученика тражи да конструишу математички модел, примене га и протумаче добијене резултате. У литератури се моделовање често описује као процес који обухвата више повезаних фаза: разумевање реалног проблема и његово поједностављење, формулисање математичког модела, решавање проблема, тумачење и проверу добијеног решења у почетном контексту и, по потреби, ревизију модела. Овај формат природно подстиче ученике на прелазе између цртежа, табеле, рачуна и вербалног објашњења. Истовремено их подстиче да јасно формулишу претпоставке: шта занемарују, шта сматрају константом, које величине су важне и како ће проверити да ли добијени резултат има смисла у реалној ситуацији. Флексибилност се у моделовању види у спремности ученика да прилагоде модел, испробају алтернативне приступе и образложе зашто је неко решење примереније или корисније од другог. У наставном контексту циљ моделовања није само да се пронађе одговор за једну конкретну ситуацију, већ да ученици уоче класу сличних проблема који се могу описати истим или сродним моделом. Зато се математичко моделовање може посматрати као облик проблемски оријентисане наставе који истовремено развија способност решавања проблема, критичког мишљења и повезивања математичких појмова са свакодневним контекстима.

Да би наведени наставни формати заиста подстицали дивергентно мишљење, важна је *улога наставника* у вођењу процеса. Подстицајно окружење подразумева да ученици имају простор да траже више решења за исти проблем, формулишу сопствене задатке, износе претпоставке и предлажу идеје без страха од грешке. У таквом окружењу грешка се не доживљава као неуспех, већ као део процеса

учења и полазиште за даље разматрање. Истраживачки рад погодује подстицању креативности, јер „покреће све сазнајне ресурсе у решавању отворених и нових ситуација како би се дошло до одговора на постављено питање“ [19, стр. 244]. Наставник овај процес усмерава пажљиво одабраним питањима, као што су: „Постоји ли још један начин?“, „Како бисмо могли другачије да посматрамо овај проблем?“, „По чему се овај приступ разликује од претходног?“ и „Када је овај начин погоднији од других?“ Таква питања помажу ученицима да превазиђу ослањање на један поступак и да уоче вредност различитих стратегија. У том смислу, значајну улогу може имати техника *олује идеја* (*brainstorming*). Она подразумева да се најпре подстиче слободно генерисање што већег броја идеја, док се њихова процена и избор одлажу за каснију фазу. Током прве фазе ученици износе предлоге без непосредне процене њихове исправности, чиме се смањује страх од грешке и подстиче слободније мишљење. У другој фази идеје се анализирају, упоређују и вреднују, што омогућава продубљивање разумевања и критичко сагледавање различитих приступа.

Посебно је важно омогућити ученицима избор начина рада и представљања резултата, на пример цртежом, табелом, симболичким записом, графиком или усменим образложењем. Када ученици исти проблем представе на више начина, лакше уочавају односе, проверавају исправност решења и прелазе са конкретног на општи ниво размишљања. Једна од корисних техника је *мапа приступа*. Уместо да се на табли приказује низ изолованих решења, табла се може организовати према врстама приступа: цртеж/шема, табела/примери, рачун/једначина, објашњење речима, а по потреби и график или контрапример. Ученици најпре самостално или у групама раде на задатку, а затим наставник бира неколико решења која представљају суштински различите приступе. Уз свако решење постављају се питања: „Која је главна идеја овог приступа?“, „По чему се овај приступ разликује од осталих?“ и „У којим ситуацијама је овај начин најпогоднији?“ На тај начин табла постаје средство за систематско поређење решења и разматрање критеријума избора, а не само простор за приказ више примера.

Сличну функцију има и *галерија решења*. Након индивидуалног или групног рада наставник издваја неколико решења која су заиста различита по приступу и излаже их у учионици. Ученици затим анализирају и упоређују решења, а дискусија се усмерава питањима: „Која је главна идеја?“, „Шта је у овом решењу другачије?“, „Када би овај приступ био најпрактичнији?“ и „Шта можемо да применимо у наредном задатку?“ Посебно је корисно да ученици на крају формулишу које су стратегије додали у свој репертоар, на пример разликовање случајева помоћу табеле, формулисање једначине, процену резултата или коришћење цртежа као подршке размишљању. Галерија решења и мапа приступа у великој мери подстичу прелаз од потенцијалне ка практичној флексибилности. Ученици не само да уочавају различите приступе, већ постепено почињу свесно да их користе у новим ситуацијама. Овакве наставничке технике доприносе томе да се у настави математике не вреднује само тачан резултат, већ и процес долажења до решења, разноврсност идеја, аргументација и способност избора одговарајуће стратегије.

4. Примери

ПРИМЕР 1. На квадратној мрежи нацртати што више неподударних четвороуглова чија су темена у тачкама мреже, а површина једнака 24 квадратне јединице.

Коментар. Задатак омогућава ученицима да до решења дођу на више начина и да при томе истражују особине различитих фигура које имају једнаке површине. Најједноставније је почети од правоугаоника, па ученици могу нацртати правоугаонике димензија 1×24 , 2×12 , 3×8 или 4×6 јер сваки од њих има површину 24. Затим се може прећи на паралелограме, па се избором различитих основица и одговарајућих висина, на пример, $a = 6$, $h = 4$ или $a = 8$, $h = 3$, добијају нови четвороуглови исте површине. Могу се цртати и ромбови, трапези или неправилни четвороуглови, водећи рачуна да површина остане 24. У квадратној мрежи ученици могу бројати јединичне квадрате, померати темена фигуре, „искосити“ правоугаоник у паралелограм или користити сечење и преслагање делова, чиме се види да различити облици могу имати једнаке површине. На тај начин задатак подстиче дивергентно мишљење: флуентност се испољава у броју различитих исправних примера које ученик може да нацрта, флексибилност у преласку са једног типа четвороугла на други и са формуле на визуелно или конструктивно размишљање. При томе, важно је дати прилику ученицима да објасне како су размишљали и зашто свака нацртана фигура заиста има тражену површину. Оригиналност долази до изражаја када ученик понуди необичан, мање очекиван четвороугао, користи мрежу на нестандартан начин или покаже како се од једне фигуре трансформацијом може добити друга фигура исте површине.

ПРИМЕР 2. Мердевине дужине 5 m наслоњене су на зид. Доњи крај мердевина удаљен је 3 m од зида.

а) Дату ситуацију представити скицом одговарајуће ситуације и правоуглог троугла.

б) Уз помоћ Питагорине теореме израчунати до које висине зида мердевине досежу.

в) Размотрити како се висина мења ако се доњи крај мердевина помера ближе или даље од зида (а дужина мердевина се не мења). Нацртати неколико скица и направити табелу с неколико различитих удаљености и одговарајућим висинама.

г) Размотрити задатак у реалном контексту и проценити које су комбинације дужине мердевина и удаљености њиховог подножја од зида безбедније за употребу.

д) Навести још најмање два примера из свакодневног живота у којима се може применити Питагорина теорема (нпр. дијагонала екрана ...).

Коментар. Овако формулисан задатак више није само обичан текстуални задатак за примену Питагорине теореме, већ мали моделујући и истраживачки задатак. Полази се од реалне ситуације, мердевина наслоњених на зид, коју

ученици треба да преведу у математички модел, односно у правоугли троугао у коме су мердевине хипотенуза, удаљеност од зида једна катета, а висина до које мердевине досежу друга катета. У конкретном случају добија се једначина $3^2 + h^2 = 5^2$, па је $h = 4$. Дакле, мердевине досежу висину од 4 m. Међутим, задатак се не завршава добијањем једног резултата, већ се проширује на испитивање више могућности: ученици могу мењати удаљеност доњег краја мердевина од зида и посматрати како се мења висина. На пример, ако је удаљеност 1 m, висина је $\sqrt{24}$ m; ако је удаљеност 2 m, висина је $\sqrt{21}$ m; ако је удаљеност 3 m, висина је 4 m; ако је удаљеност 4 m, висина је 3 m. Тако ученици уочавају да се, при истој дужини мердевина, висина смањује када се доњи крај мердевина удаљава од зида.

Флуентност се развија кроз навођење више различитих положаја мердевина и израчунавање одговарајућих висина. Флексибилност се испољава у преласку са скице на математички запис, затим на табелу, вербално објашњење и реалну интерпретацију резултата. Оригиналност се може испољити у начину на који ученици бирају нове случајеве, уочавају граничне, постављају додатна питања или проналазе друге примере из живота у којима се примењује Питагорина теорема. Посебну вредност има део задатка који се односи на безбедност, јер ученици тада не посматрају математички резултат изоловано, већ га повезују са стварним контекстом. На пример, могу закључити да неки положаји мердевина математички јесу могући, али нису практични или безбедни. На тај начин задатак развија и критичко мишљење, аргументовање и пренос знања на нове ситуације. У датом примеру положај са удаљеношћу 4 m није најбезбеднији, јер су мердевине сувише положене. Безбедније је да мердевине не буду ни превише усправне ни превише положене. У пракси се често користи правило по коме је удаљеност доњег краја мердевина од зида приближно једна четвртина висине до које мердевине досежу.

ПРИМЕР 3. Заменити слова цифрама (различита слова различитим, а иста слова истим цифрама) и звездице знацима рачунских операција тако да важи:

$$A * L * G * E * B * P * A = 2026.$$

Одредити што више решења.

Решење и коментар. Математички ребуси припадају групи задатака који ангажују све аспекте дивергентног мишљења. Флуентност се развија јер ученици траже што више различитих математички исправних решења, а не само један тачан одговор. Флексибилност се испољава у промени стратегије када један избор цифара или операција не води до циља. Ученици могу, на пример, да крену од производа који је близу броја 2026, да затим преосталим бројевима „подешавају“ резултат, или да користе заграде како би груписали делове израза. Оригиналност се може препознати у ређим и неочекиваним комбинацијама цифара, операција и заграда. Додатну вредност у настави има кратка дискусија после решавања: које су стратегије биле најуспешније, ко је кренуо од множења, ко је користио сабирање и одузимање за „дотеривање“ резултата, а ко је решење пронашао на неочекиван начин. Таква размена чини ученичке стратегије видљивим и подстиче ученике да уче једни од других.

Нека од решења овог ребуса су: $7 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 4 + 5 - 2 + 7 = 2026$; $8 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 4 + 5 - 3 + 8 = 2026$; $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 4 + 3 - 2 + 9 = 2026$.

ПРИМЕР 4. Одредити полином другог степена с целобројним коефицијентима тако да је његов слободан члан једнак 6 и да је један његов корен број 2. Испитати да ли је такав полином јединствен и, ако није, одредити општи облик свих полинома који задовољавају дате услове.

Коментар. Уместо да се од ученика тражи један тачно одређен полином, овако формулисан задатак отвара простор да ученици траже, описују и пореде читаву фамилију полинома који задовољавају дате услове. На пример, полиноми $x^2 - 5x + 6$, $2x^2 - 7x + 6$ и $-x^2 - x + 6$ испуњавају све наведене услове, па се уочава да решење није јединствено. До општег облика ученици могу доћи на различите начине: полазећи од општег облика $ax^2 + bx + 6$ и услова $P(2) = 0$, или од факторисаног облика $(x - 2)(ax - 3)$. У оба случаја добија се фамилија полинома $P(x) = ax^2 - (2a + 3)x + 6$, где је a било који цео број различит од нуле.

Са становишта развијања дивергентног мишљења, задатак је погодан јер не усмерава ученике ка једном једином одговору, већ ка истраживању више могућих решења и њиховом уопштавању. Флуентност се испољава у навођењу више различитих примера полинома, док се флексибилност види у промени стратегије (неки ученици могу кренути од фактора $(x - 2)$, други од општег облика $ax^2 + bx + 6$ и услова $P(2) = 0$). Оригинално се може испољити у избору мање очекиваних вредности параметра a , на пример негативних коефицијената, или у самосталном уочавању општег облика свих решења. На тај начин ученици прелазе с тражења једног решења на размишљање о целој класи, што представља важан помак од конвергентног ка дивергентном начину мишљења.

ПРИМЕР 5. Од картона ширине 25 cm и дужине 40 cm из сваког од четири угла изрезани су квадрати странице x , а затим је од остатка направљена кутија без поклопца.

а) Написати формулу којом се може израчунати запремина кутије у зависности од x .

б) Одредити за које вредности x овај модел има смисла.

в) Одредити вредност x за коју је запремина кутије највећа.

г) Протумачити добијено решење у реалном контексту (да ли су све математички дозвољене вредности и практично корисне).

Коментар. Након резања, дужина основе кутије је $40 - 2x$, ширина основе $25 - 2x$, а висина кутије је x . Зато је запремина кутије дата функцијом $V(x) = x(40 - 2x)(25 - 2x)$. Овај модел има смисла само ако су све димензије позитивне, па мора да важи $x > 0$, $40 - 2x > 0$ и $25 - 2x > 0$, одакле добијамо да је $0 < x < 12,5$. Ученици могу да истражују запремину за различите вредности x , на пример помоћу табеле, графика или рачуна. Ако се користи алгебарски запис, функција се може представити као $V(x) = 4x^3 - 130x^2 + 1000x$. Највећа вредност

запремине добија се за $x = 5$ cm. Тада су димензије основе $40 - 2 \cdot 5 = 30$ cm и $25 - 2 \cdot 5 = 15$ cm, а висина кутије је 5 cm. Највећа запремина је $V(5) = 5 \cdot 30 \cdot 15 = 2250$ cm³. У реалном контексту, „најбоља“ вредност x значи ону вредност за коју кутија има највећу запремину, али треба имати у виду да нису све математички дозвољене вредности једнако практичне. На пример, ако је x веома мало, кутија је плитка; ако је x близу 12,5, једна димензија основе постаје веома мала, па кутија није употребљива.

У смислу развијања дивергентног мишљења, задаци овог типа су погодни јер ученици могу да им приступе на више начина: неко ће кренути од скице и геометријског модела, неко од формуле за запремину, неко од табеле вредности, неко од графика функције, а да је уместо запремине било речи о површини, задатак би се могао радити и коришћењем особина квадратне функције. Флуентност се испољава када ученици испитују више могућих вредности за x и добијају различите запремине. Флексибилност се развија кроз прелазак између различитих репрезентација – цртежа, алгебарског израза, табеле, графика и вербалног тумачења. Оригиналноост се може испољити у начину откривања оптималног решења, избору стратегије, прављењу сопствене табеле или графика, као и у дискусији о томе да највећа запремина није увек једини практични критеријум, а важни могу бити и стабилност, облик и употребљивост кутије. Веома је важно да ученици не остану само на формули, већ да објашњавају шта свака димензија представља и зашто је услов $0 < x < 12,5$ неопходан.

ПРИМЕР 6. Дата је парабола $y = x^2 + 4x + 5$. Одредити више примера правих које с датом параболом имају тачно две заједничке тачке. Затим, посматрајући праву облика $y = kx + n$, одредити услов за коефицијенте k и n под којим та права има тачно две пресечне тачке с датом параболом.

Коментар. Најпре запишемо параболу у теменом облику $y = (x + 2)^2 + 1$, па видимо да је њено теме $T(-2, 1)$, а да је парабола отворена нагоре. Један једноставан пример праве која има тачно две пресечне тачке са овом параболом јесте права $y = 2$, јер се из једначине $x^2 + 4x + 5 = 2$ добија $x^2 + 4x + 3 = 0$, односно $(x + 1)(x + 3) = 0$, па је $x = -1$ или $x = -3$. Пресечне тачке су у том случају $(-1, 2)$ и $(-3, 2)$. Општије, ако посматрамо праву облика $y = mx + n$, њене пресечне тачке с параболом добијамо из једначине $x^2 + 4x + 5 = mx + n$, односно $x^2 + (4 - m)x + (5 - n) = 0$. Да би права имала тачно две пресечне тачке с параболом, ова квадратна једначина мора имати два различита реална решења, што значи да њена дискриминанта мора бити позитивна. Дискриминанта је $D = (4 - m)^2 - 4(5 - n)$, па услов $D > 0$ даје $n > 5 - \frac{1}{4}(4 - m)^2$. Дакле, свака права $y = mx + n$ која задовољава овај услов има тачно две пресечне тачке с датом параболом. Посебно, све хоризонталне праве $y = c$, где је $c > 1$, секу параболу у два тачкама, на пример $y = 2$, $y = 3$, $y = 5$ и $y = 10$. Ако је $c = 1$, права додирује параболу у њеном темену, а ако је $c < 1$, нема пресечних тачака. Такође, праве које пролазе кроз теме параболе имају облик $y - 1 = m(x + 2)$, односно $y = mx + 2m + 1$, и за свако $m \neq 0$ имају две пресечне тачке с параболом, јер пролазе кроз теме, али нису тангенте у тој тачки. Примери таквих правих су

$y = x + 3$, $y = -x - 1$, $y = 2x + 5$ и $y = -2x - 3$. Према томе, постоји бесконачно много правих које имају тачно две пресечне тачке с параболом $y = x^2 + 4x + 5$, а општи критеријум за праву $y = mx + n$ јесте $n > 5 - \frac{1}{4}(4 - m)^2$. Вертикалне праве $x = a$ не улазе у овај критеријум, јер нису облика $y = mx + n$, а свака од њих сече параболу у само једној тачки.

Задатак има изражен потенцијал за подстицање дивергентног мишљења, јер омогућава више тачних решења и више начина доласка до њих. Флуентност се огледа у проналажењу већег броја правих које имају две пресечне тачке са параболом, док се флексибилност испољава у промени приступа: од графичког тумачења положаја праве и параболе до алгебарског испитивања дискриминанте. Оригиналност се може јавити у уочавању различитих породица решења, као што су хоризонталне праве или праве које пролазе кроз теме параболе, као и у формулисању општег услова за све праве које задовољавају тражено својство.

5. Задаци

1. Написати најмање два пара различитих разломака чији је збир једнак 1.
2. Осмислити задатак из свакодневног живота у коме се користи проценат.
3. Користећи дате једноцифрене и двоцифрене бројеве највише по једном, знакове рачунских операција и заграда, саставити израз тако да се добије задати троцифрени број.

-131

5

-7

-2

1

-20

50

4. Број 24 представити као производ два цела броја. Записати све начине. Редослед чинилаца није битан.
5. Полином $x^2 + 5x + 6$ разложити на чиниоце на бар два различита начина.
6. Написати најмање два различита система од две линеарне једначине с две непознате, с целобројним коефицијентима, чије је решење уређени пар $(2, -1)$.
7. Размотрити систем једначина

$$\begin{cases} y = x - 1, \\ (x - 1)^2 + (y - 6)^2 = 19. \end{cases}$$

Да ли дати систем има једно, више или ниједно решење? За образложење одговора користити различите стратегије, на пример: методу замене, геометријско тумачење, проверу удаљености тачке од праве.

8. Одредити све полиноме облика $x^2 + bx + 6$ који имају целобројан корен.
9. Написати бар две различите квадратне једначине чија су решења бројеви који представљају дан и месец рођења ученика. На пример, ако ученик

- слави рођендан 10. новембра, решења квадратне једначине треба да буду бројеви 10 и 11.
10. Одредити бар две различите вредности параметра m тако да једначина $x^2 - mx + 4 = 0$ има реална решења.
11. Одредити бар два различита аритметичка низа од по 5 чланова чија је сума једнака 100.
- а) За сваки низ записати први члан и разлику.
- б) Објаснити како се могу систематски креирати нови низови са истом сумом.
12. Ученица штеди новац на два начина:
- План А: Креће од 1000 динара и сваког следећег месеца штеди 200 динара више него претходног (аритметички модел).
- План Б: Креће од 1000 дин, а сваког наредног месеца штеди 20% више него претходног (геометријски модел).
- а) За оба плана написати низ који описује колико новца се одваја сваког месеца.
- б) За оба плана израчунати колико се уштеди након 6 месеци.
- в) Осмислити бар још један „план штедње“ (аритметички или геометријски) и упоредити га са ова два.
- г) Који план је боље изабрати за кратак, а који за дужи временски период? Образложити одговор.
13. Одредити дужине страница троугла чији је обим једнак 24 cm тако да троугао буде:
- а) једнакокрак, б) правоугли, в) тупоугли, г) оштроугли.
14. Разврстати следећа тврђења у табелу према томе да ли важе УВЕК, ПОНЕКАД или НИКАД. Ако се тврђење сврста у колону ПОНЕКАД, потребно је навести један пример када је тврђење тачно и један пример када оно није тачно.
- Тврђења:
- А. Троугао који има две једнаке странице има и два једнака угла.
- В. Постоји троугао са страницама 3 cm, 4 cm и 7 cm.
- С. Троугао који има један прав угао је једнакокрак.
- Д. Збир два унутрашња угла у троуглу може бити 90° .
- Е. Два троугла са истим обимом имају једнаке површине.
- Ф. Збир унутрашњих углова троугла је 180° .
- Г. Сваки троугао у коме су сва три унутрашња угла оштра је једнако-страничан.
15. Осмислити начин за одређивање растојања од тачке на копну, у којој стоји посматрач, до врха светионика који се налази на оближњем острву.

16. Размотрити све правоугаоне облике дворишта са обимом 200 m и целобројном дужином стране не мањом од 10 m и објаснити које од њих има најмању, а које највећу површину.
17. Дата су два темена троугла у простору: $A(1, 2, 3)$, $B(5, 2, 3)$. Одредити координате трећег темена $C(x, y, z)$ тако да троугао ABC буде правоугли.
18. Правимо правоугаоне кутије (праве призме) од картона тако да им је запремина једнака 1000 cm^3 , а димензије су целобројне дужине ($y \text{ cm}$).
 - а) Пронађи бар две различите тројке димензија (a, b, h) .
 - б) За сваку кутију одредити површину омотача (без поклопца).
 - в) Која од пронађених кутија има најмању површину омотача?
19. Ако је α један оштар угао правоуглог троугла, одредити бар два различита правоугла троугла за које је $\sin \alpha = \frac{3}{5}$.
 - а) За сваки такав троугао нацртати скицу и одредити дужине катета и хипотенузе.
 - б) Објаснити зашто постоји бесконачно много различитих правоуглих троуглова са истим синусом угла α .
 - в) Шта остаје исто, а шта се мења када „увећавамо“ троугао?
20. Дрво баца сенку дугу 12 m, а угао под којим сунчеви зраци падају на земљу је 60° . Осмислити бар два различита начина за приближно одређивање висине дрвета. Објаснити предности и недостатке сваког метода (тачност, практичност, потребни инструменти).

6. Закључак

Развој дивергентног мишљења у настави математике важан је јер ученике подстиче да задатке не посматрају само као поступке који воде до једног тачног решења, већ као прилику за истраживање, постављање питања и избор различитих стратегија. Такав приступ не искључује усвајање основних математичких знања и процедура, већ их продубљује и омогућава њихову лакшу примену. У раду су приказани наставни формати и примери задатака који ученицима омогућавају да понуде више идеја, мењају приступе, користе различите репрезентације и образлажу своја решења. Осим што је важно развијати дивергентно мишљење још од млађег узраста, изузетно је значајно неговати га и у старијим разредима основне и у средњој школи, када ученици већ могу да повезују више математичких појмова и самосталније проверавају своје претпоставке. Ипак, сами задаци нису довољни. Важну улогу има наставник, који избором задатака, питањима, вођењем дискусије и поређењем различитих решења ствара услове за развој дивергентног мишљења. У таквој настави грешка није само показатељ нетачности, већ прилика за ново размишљање и боље разумевање. Зато развој дивергентног мишљења не треба посматрати као додатак редовној настави, већ као њен саставни део. Промишљеним избором задатака и начином рада могу се развијати флуентност, флексибилност, оригиналност, математичка аргументација и дубље

разумевање појмова. Тако настава математике постаје простор у коме ученици не уче само готове поступке, већ развијају способност да математички мисле, истражују и стваралачки приступају проблемима.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] M. H. Ashcraft, *Math anxiety: Personal, educational, and cognitive consequences*, Current Directions in Psychological Science, **11** (2002) (5), 181–185.
<https://doi.org/10.1111/1467-8721.00196>
- [2] J. P. Becker, S. Shimada, (Eds.), *The open-ended approach: A new proposal for teaching mathematics*, NCTM/ERIC, 1997.
- [3] A. Cropley, *In praise of convergent thinking*, Creativity Research Journal, **18** (3) (2006), 391–404. https://doi.org/10.1207/s15326934crj1803_13
- [4] J. P. Guilford, *Creativity: Yesterday, today and tomorrow*, The Journal of Creative Behavior, **1** (1) (1967), 3–14. <https://doi.org/10.1002/j.2162-6057.1967.tb00002.x>
- [5] S. Kadum, *Divergentno mišljenje u procesu suvremenoga odgoja i obrazovanja*, Metodički ogleđi, **26** (1) (2019), 81–98. <https://doi.org/10.21464/mo.26.1.7>
- [6] K. H. Kim, *The creativity crisis: The decrease in creative thinking scores on the Torrance Tests of Creative Thinking*, Creativity Research Journal, **23** (4) (2011), 285–295. <https://doi.org/10.1080/10400419.2011.627805>
- [7] S. W. Kleibeuker, C. K. W. De Dreu, E. A. Crone, *The development of creative cognition across adolescence: Distinct trajectories for insight and divergent thinking*, Developmental Science, **16**(1) (2013), 2–12. <https://doi.org/10.1111/j.1467-7687.2012.01176.x>
- [8] R. Leikin, *Challenging mathematics with multiple solution tasks and mathematical investigations in geometry*, In: Y. Li, E. A. Silver, S. Li (Eds.), *Transforming mathematics instruction: Multiple approaches and practices* (pp. 59–80), Springer, 2014.
https://doi.org/10.1007/978-3-319-04993-9_5
- [9] R. Lesh, H. Doerr, H. (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching*, Lawrence Erlbaum, 2003.
- [10] А. Михајловић, *Развијање креативности у почетној настави математике методом отвореног приступа*, Докторска дисертација, Универзитет у Крагујевцу, Факултет педагошких наука, Јагодина, 2012.
- [11] N. Nohda, *Teaching by open-approach method in Japanese mathematics classroom* In: T. Nakahara, M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, pp. 39–53, 2000.
- [12] E. Pujiastuti, A. Suyitno, Sugiman, *Using of divergent problems based on teacher scaffolding levels to grow of advanced mathematical thinking of senior high school students*, Journal of Physics: Conference Series, **1567** (2) (2020), Article 022093.
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/1567/2/022093>
- [13] M. A. Runco, *Creativity*, Annual Review of Psychology, **55** (2004), 657–687.
<https://doi.org/10.1146/annurev.psych.55.090902.141502>
- [14] A. H. Schoenfeld, *Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics*, In: D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334–370). Macmillan, 1992.
- [15] E. M. Schoevers, E. H. Kroesbergen, M. Moerbeek, P. P. M. Leseman, *The relation between creativity and students' performance on different types of geometrical problems in elementary education*, ZDM Mathematics Education, **54** (1) (2022), 133–147.
<https://doi.org/10.1007/s11858-021-01315-5>
- [16] E. A. Silver, *On mathematical problem posing*, For the Learning of Mathematics, **14** (1) (1994), 19–28.
- [17] E. A. Silver, *Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing*, ZDM Mathematics Education, **29** (3) (1997), 75–80.
<https://doi.org/10.1007/s11858-997-0003-x>

- [18] J. R. Star, D. Tuomela, N. Joglar-Prieto, P. Hästö, R. Palkki, M. Á. Abánades, J. Pejlare, R. H. Jiang, L. Li, R.-D. Liu, *Exploring students' procedural flexibility in three countries*, International Journal of STEM Education, **9** (2022), Article 4.
<https://doi.org/10.1186/s40594-021-00322-y>
- [19] J. Šefer, J. Radišić, S. Jošić, *Istraživački rad i rešavanje problema kao podsticaj stvaralaštva, inicijative i saradnje u nastavi*, U: J. Šefer, J. Radišić (Ur.), *Stvaralaštvo, inicijativa i saradnja: Implikacije za obrazovnu praksu – II deo* (str. 243–266). Institut za pedagoška istraživanja, 2012.
- [20] L. Xu, R. Liu, J. R. Star, J. Wang, Y. Liu, R. Zhen, *Measures of potential flexibility and practical flexibility in equation solving*, Frontiers in Psychology, **8** (2017), Article 1368.
<https://doi.org/10.3389/fpsyg.2017.01368>

Гимназија „Бранислав Петронијевић“, Уб

E-mail: andjelka.simic@dms.rs