

Др Павле Младеновић, др Војислав Петровић

ДВА ВЕКА ОД ВЕЛИКОГ ОТКРИЋА¹

Ове, 2026. године навршавају се два века од открића неееуклидске геометрије. Револуционарно откриће Лобачевског² и његовог савременика Бојаи³ једно је од најзначајнијих у историји математике.

Све је почело још у IV веку пре нове ере у античкој Грчкој.

Еуклид

Еуклид (*Εὐκλείδης*, око 365–око 300. п.н.е.) је старогрчки математичар. Аутор је најстаријих математичких трактата који су сачувани до данашњих дана.

Мало се зна о његовом животу. Познато је да је рођен у Атини, да је био Платонов ученик и да се научним радом бавио у Александрији, где је основао математичку школу.

Главна Еуклидова дело има наслов *Почеци* (грч. *Στοιχῆα*), које је познато под латинским именом *Елементи*. Еуклид је у овом делу систематизовао сва претходна знања грчке математике (из 4. и 5. века п.н.е.) и на тај начин створио основу за њен даљи развој. *Елементи* садрже излагање тема из планиметрије, стереометрије, разних питања теорије бројева, алгебре, опште теорије односа и метода одређивања површина и запремина (у које је укључен и метод исцрпљивања).

Састоје се од 13 књига које су посвећене следећим темама:

Књиге 1–4 (планиметрија) – обрада *Почетака* Хипократа Хиоског;

Књига 5 – теорија пропорција геометријских величина;

Књига 6 – теорија сличности;

Књиге 7–9 – теорија бројева и бројевних пропорција;

Књига 10 – теорија ирационалних величина;

¹Пленарно предавање на Државном семинару о настави математике и рачунарства, одржано марта 2026. године у Београду.

²Николај Иванович Лобачевски (Николай Иванович Лобачевский, 1792–1856) – руски математичар

³Јанош Бојаи (János Bolyai, 1802–1860) – мађарски математичар

Књига 11 – основи стереометрије;

Књига 12 (обла тела) – обрада дела Еудокса Книдског;

Књига 13 (правилни полиедри) – обрада дела Теетета Атинског.

Еуклиду припада и алгоритам који данас носи његово име и који служи за одређивање највећег заједничког делиоца двају природних бројева и највеће заједничке мере двеју дужи. Еуклид је, такође, доказао да постоји бесконачно много простих бројева. У овом делу први пут је једна математичка дисциплина (геометрија) изложена аксиоматски. Данас, тај аксиоматски метод доминира у математици.

Главним недостатком Еуклидове аксиоматике, који је много касније уочен, сматра се њена некомплетност. Наиме, нема аксиома непрекидности, кретања и поретка. Уместо њих, Еуклид често позива на интуицију и очигледност.

Осим поменутих Елемената, сачувани су и други Еуклидови трактати. Међу њима су *Datta* (*Подаци*) – у којима се описују услови при којима се неки математички објекат може сматрати датим. Затим, књига из оптике у којој се излаже учење о перспективи и књига *Делење фигура* у којој се излаже теорија деформација слика у огледалу.

Каснији аутори помињу и Еуклидове трактате који нису сачувани. Ту спадају четири књиге о конусним пресецима (о чијим садржајима се зна из дела Аполонија из Пергама) и две књиге о местима на површини (земље). Осим њих, треба поменути три књиге под насловима *Поризми* (чији садржаји нису познати), *О лажном закључивању*, трактат из астрономије под насловом *Појаве* и трактат из музике.

Пети постулат

Еуклидови *Елементи* су први списи у којима је нека математичка дисциплина заснована аксиоматски. То значи да је утемељена на одређеном броју тврђења која се не доказују и која се унапред прихватају као тачна. Та тврђења је Еуклид звао аксиомама и постулатима. Сва остала тврђења су била доказивана.

На истом основу је заснована и савремена математика, с тим што се не прави разлика између аксиома и постулата, све су аксиоме.

Додајмо да су *Елементи* доживели преко пет стотина издања на разним језицима.

Еуклидова аксиоматика геометрије имала је 14 тврђења која се нису доказивала, пет постулата и девет аксиома. Постулати су били следећи.

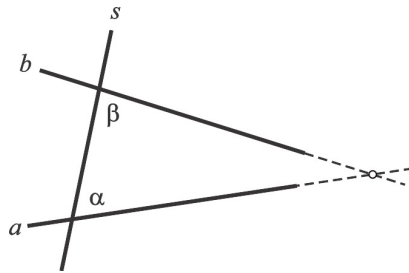
Нека се претпостави:

- I да се може повући од сваке тачке до сваке тачке права линија;
- II и да ограничена права линија може бити продужена у сваком правцу непрекидно;
- III и да се може описати од сваког средишта сваким растојањем круг;

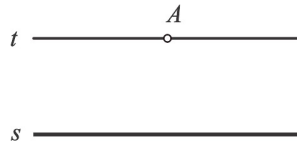
IV и да су сви прави углови једнаки међусобно;

V и да ће се, ако једна права у пресеку са другим двома образује са исте стране два унутрашња угла чији је збир мањи од два права угла, те две праве, бескрајно продужене, сећи и то са оне стране са које су ови углови мањи од два права.

На сл. 1 праве су a и b , сечица је s , а унутрашњи углови су α и β , при чему је $\alpha + \beta < 180^\circ$.



Сл. 1



Сл. 2

С обзиром на своју формулацију, V постулат је одударао од осталих постулата, пре је личио на неку теорему. Између осталог, то је побудило сумњу и Еуклида и његових савременика да би се он могао доказати помоћу преосталих постулата, као многе друге теореме. Тиме би престао да буде аксиома. Тако је настао чувени проблем Еуклидовог V постулата.

Више од две хиљаде година математичари су безуспешно покушавали да докажу Еуклидов V постулат. Преглед тих истраживања може се наћи у књизи [6]. У тим покушајима, било је пуно различитих идеја, и оштроумних и блиставих, али ниједна није уродила решењем.

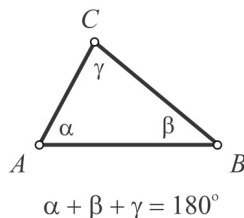
Разлог за то сигурно је тежина самог проблема али и чињеница да је имао *хиљаду лица*. Наиме, за V постулат установљено је више тврђења која су наизглед различита од њега, али која су у суштини једно те исто. У математици су позната као еквивалентна тврђења или кратко *еквиваленти*. Тако из V постулата следи свако од њих и обратно. Разуме се, иста веза важи и између свака два еквивалента. Навешћемо неколико познатијих еквивалената.

ЕКВИВАЛЕНТ 1. (аксиома паралелности) *У равни одређеној правом s и тачком A , при чему $A \notin s$, постоји јединствена права t кроз A која не сече s (сл. 2).*

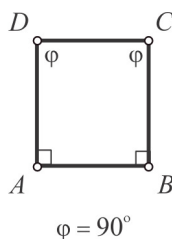
Аксиому паралелности, као еквивалент V постулату, открио је Џон Плејфер⁴.

⁴Џон Плејфер (John Playfair, 1748–1819) – енглески математичар

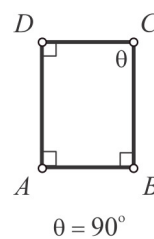
ЕКВИВАЛЕНТ 2. *Збир унутрашњих углова сваког троугла је константан и једнак равном углу (сл. 3).*



Сл. 3



Сл. 4



Сл. 5

Лежандр⁵ је показао да V постулат следи из еквивалента 2 и обратно. Сличним истраживањима су се бавили Сакери⁶ и Ламберт⁷.

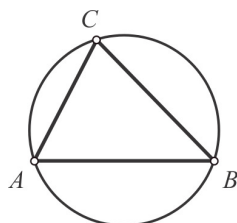
Сакери је испитивао четвороуглове $ABCD$ у којима је $\angle A = \angle B = 90^\circ$ и $AD = BC$ (сл. 4). Установио је да је V постулат еквивалентан с чињеницом да је $\varphi = 90^\circ$.

Ламберт је посматрао четвороуглове $ABCD$ у којима је $\angle A = \angle B = \angle D = 90^\circ$ (сл. 5) и нашао да је V постулат еквивалентан с чињеницом да је $\theta = 90^\circ$.

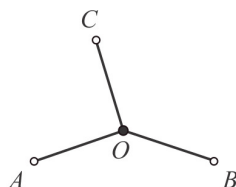
Интересантно је да је те четвороуглове, много пре Сакерија и Ламберта, испитивао Ибн ал-Хајсам⁸.

Следећи еквивалент односи се на кружницу описану око троугла.

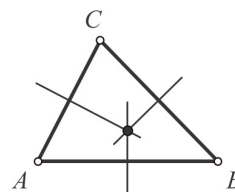
ЕКВИВАЛЕНТ 3. *Око сваког троугла постоји описана кружница, тј. кружница која садржи сва три темена троугла (сл. 6).*



Сл. 6



Сл. 7



Сл. 8

Лако се види да је ово тврђење еквивалентно са следећим тврђењем:

ЕКВИВАЛЕНТ 3'. *За сваке три неколинеарне тачке A, B, C , постоји тачка O , таква да је $OA = OB = OC$ (сл. 7).*

Јасно, A, B и C су темена троугла, а O центар описане кружнице из еквивалента 3.

⁵Адријен Лежандр (Adrien Legendre, 1752–1833) – француски математичар

⁶Ђовани Сакери (Giovanni Saccheri, 1667–1733) – италијански математичар

⁷Јохан Ламберт (Johann Lambert, 1728–1777) – швајцарски математичар

⁸Ибн ал-Хајсам (965–1040) – арапски математичар

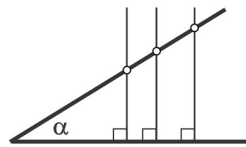
И наредно тврђење је еквивалентно са еквивалентом 3.

ЕКВИВАЛЕНТ 3". *Симетрале страница сваког троугла секу се у једној тачки* (сл. 8).

Пресечна тачка је O – центар описане кружнице око троугла.

Наредни еквивалент добио је Лежандр при испитивању збира унутрашњих углова троугла.

ЕКВИВАЛЕНТ 4. *Све нормале повучене на један крак оштрог угла секу други крак* (сл. 9).



$$\alpha < 90^\circ$$

Сл. 9

Упркос великим напорима пропраћеним маштовитим замислима, ниједан од ових и других покушаја није успео у доказу V постулата. Због чега је то било неизбежно, постало је јасно тек у XIX веку.



N. I. Lobachevsky

Николај Иванович Лобачевски

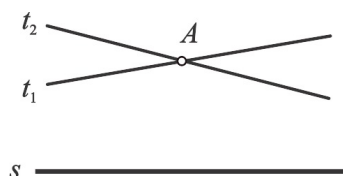


Јанош Бојаи

Лобачевски је 1826. године дошао на идеју да, уместо V постулата, као аксиому узме тврђење које је у оквиру његове негације. На тој аксиоми и прве четири групе Еуклидовог система, Лобачевски је изградио нову геометрију. До исте замисли, готово у исто време, дошао је и мађарски математичар Јанош Бојаи.

Та нова геометрија касније је названа *геометрија Лобачевског*, односно *геометрија Бојаи-Лобачевског*, односно *хиперболична геометрија*.

Као што је наведено, она је заснована на хиперболичној аксиоми паралелности V_H која је једна од негација Плејферове аксиоме паралелности.



Сл. 10

V_H (хиперболична аксиома паралелности) *У равни одређеној правом s и тачком A , при чему $A \notin s$, постоје две праве t_1 и t_2 кроз A које не секу s (сл. 10).*

Напомена. У оквиру негације V Еуклидовог постулата налази се и претпоставка да свака права која садржи тачку A из аксиоме V_H сече праву s . То тврђење, уз нешто измењене прве четири групе аксиома, води тзв. *пројективној геометрији*, такође једној новој геометрији.

Основно питање везано за нову геометрију Лобачевског и Бојаи било је проблем непротивречности. Ради се о томе, да ли нова аксиома, заједно с онима из преостале четири групе, може да доведе то тога да истовремено важе и неко тврђење и његова негација. Уколико би се тако нешто десило, таква теорија би била безвредна. Ни Лобачевски ни Бојаи нису имали одговор на то питање.

Лобачевски је, у оквиру нове геометрије, доказао низ тврђења која су у многоструку одударала од сличних из традиционалне еуклидске геометрије. Иако се нигде није појавила противречност, то није била гаранција да противречност не постоји, да се неће појавити касније. Ипак, и Лобачевски и Бојаи били су убеђени у исправност својих геометрија.

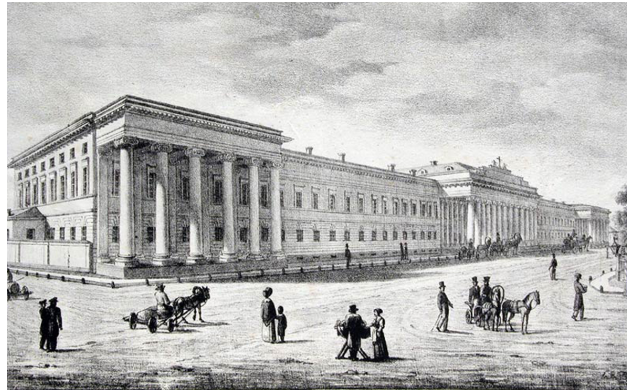
Тачним датумом открића геометрије Лобачевског сматра се 24. фебруар 1826. године. (Негде се помиње 23. фебруар; видети референце [5] и [2].) Тога дана је Лобачевски представио нову геометрију на предавању које је одржао на Физичко-математичком факултету Казањског универзитета.

Текст или белешке са тог предавања нису сачувани, али је садржај објављен 1829. године у чланку под насловом *О основама геометрије (О начелах геометрии)* у *Казањском веснику*. Вреди још поменути да је мађарски математичар Бојаи своје резултате објавио 1832. године.

Ни Лобачевски ни Бојаи нису дочекали потврду својих уверења. Белтрами⁹ је 1863. године доказао да ако у тродимензионом простору важи еуклидска геометрија, онда се у том простору могу наћи површи константне негативне кривине или псеудосфере на којима важи геометрија

⁹Еуђенио Белтрами (Eugenio Beltrami, 1835–1900) – италијански математичар

Лобачевског. Потом су Белтрами и Клајн¹⁰ 1871-73. године конструисали модел хиперболичне планиметрије у пројективној равни. Коначно је Поенкаре¹¹ 1882-83. године конструисао модел хиперболичне планиметрије у еуклидској равни.



Казански универзитет

Осим тога, Клајн је доказао да ако је еуклидска геометрија непротивречна, онда су и нееуклидске геометрије такође непротивречне. Тиме су ове геометрије стављене у раван равноправних математичких дисциплина.

Лобачевски

Николај Иванович Лобачевски рођен је 1. децембра 1792. године у губернији чији је центар био Нижњи Новгород. Када је имао шест година умро му је отац, а мајка се преселила у Казањ. У гимназију се уписао 1802. године, а студент Казањског универзитета постао је 14. фебруара 1807. године. Степен магистра добио је 3. августа 1811. године.

За адјункта (асистента) чисте математике постављен је 26. марта 1814. године. Школске 1814-1815. године први пут је држао предавања на Казањском универзитету и то из *Теорије бројева* по Гаусу и Лежандру. Теорију бројева *по Гаусу* предаје и следеће 1815-1816. школске године. Звање ванредног професора Казањског универзитета добио је 7. јула 1816. године.

Предавања из геометрије држао је школске 1816-1817. године и вероватно је тада, покушавајући да докаже пети Еуклидов постулат, први пут дошао на идеју о решењу проблема V постулата.

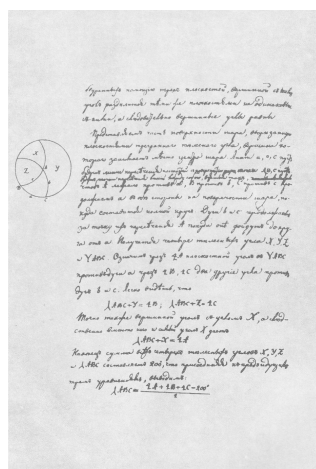
Године 1823. Лобачевски је предао рукопис уџбеника геометрије начелнику Казањског просветног округа Магницком. Излагање геометрије у том уџбенику битно се разликовало од традиционалног. Лобачевски је тврдио да се пети Еуклидов постулат не може строго доказати, а да постојећи

¹⁰Феликс Клајн (Felix Klein, 1849–1925) – немачки математичар

¹¹Анри Поенкаре (Henri Poincaré, 1854–1912) – француски математичар

докази представљају само објашњења. Академик Фус је написао врло оштру негативну рецензију за тај уџбеник. Име аутора није му било познато.

Предавање на коме је представљена нова геометрија одржано је 1826. године. У периоду 1835-38. година у *Научним записима* Казањског универзитета Лобачевски је објавио *Нове основе геометрије с комплетном теоријом паралелних правих* (*Новые начала геометрии с полной теорией параллельных*), где је дао систематско излагање нове геометрије. У посебном издању је 1835. године објављен рад *Имагинарна геометрија* (*Воображаемая геометрия*) у коме су приказане неке даље последице, као што су хиперболична тригонометрија и примене у интегралном рачуну.



Из списка Лобачевског

Гаус¹² је прочитао 1841. године брошуру Лобачевског *Геометријска истраживања у теорији паралелних правих*, која је 1840. године објављена на немачком језику. На Гаусов предлог Лобачевски је изабран за дописног члана Гетингенског научног друштва као *истакнути математичар Руске империје*.

Лобачевски је дао значајан допринос и у другим областима математике, посебно у анализи и алгебри.

Током универзитетске каријере Лобачевски се бавио и административним и управљачким пословима. Више година био је главни библиотекар универзитетске библиотеке. У периодима 1820-1821. и 1823-1825. школске године био је декан Физичко-математичког факултета Казањског универзитета. Године 1827. изабран је за ректора Казањског универзитета и на тој дужности остао до 1846. године.

По његовој идеји грађене су зграде Казањског универзитета, као што су анатомски театар, библиотека и астрономска опсерваторија. У то време Лобачевски је био председник грађевинске комисије.

¹²Карл Фридрих Гаус (Carl Friedrich Gauss, 1777-1855) – немачки математичар

Активно је учествовао у организовању заштите Казањског универзитета за време епидемије колере 1830. године, када је универзитет практично био претворен у тврђаву. Огроман лични напор уложио је у спасавање библиотеке и инструмената астрономске опсерваторије за време пожара који је захватио Казањ 1842. године.

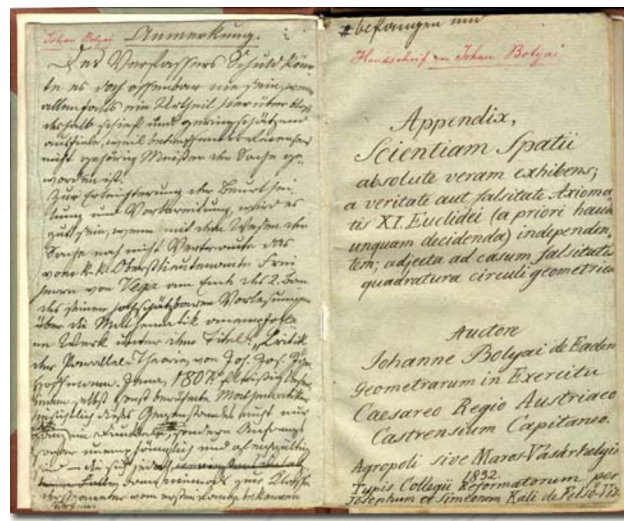
Године 1846. Лобачевски је ослобођен дужности ректора и пензионисан као професор. Пред крај живота је ослепео. По његовом диктату записан је његов последњи рад *Пангеометрија* који је објављен у *Научним записима* Казањског универзитета 1885. године.

Године 1832. оженио се Варваром Алексејевном Мојсијевом са којом је имао седморо деце. Умро је 12. фебруара 1856. године.

Више детаља из биографије Лобачевског могу се наћи у референцама [1], [2] и [5].

Бојаи

Јанош Бојаи рођен је 15. децембра 1802. године у граду Коложвару, који се у данашње време зове Клуж-Напока или кратко Клуж и налази се у Румунији. Његов отац Фаркаш Бојаи (1775–1856) био је професор математике, песник и друг великог математичара Гауса. Фаркаш Бојаи је такође покушавао да докаже постулат о паралелним правим, полазећи од претпоставке да се око сваког троугла може описати кружница.



Бојајев Апендикс

Када је имао 13 година, Јанош Бојаи је знао диференцијални и интегрални рачун. Као студент војно-инжењерске академије, Бојаи је са својим другом Сасом покушавао да докаже постулат о паралелним правим.

Сачувани су цртежи који показују да је већ у то време Бојаи био на путу да открије неевклидску геометрију.

Када је завршио војно-инжењерску академију, Бојаи је упућен на службу у Темишвар. Тамо је око 1825. године доказао прва тврђења из неевклидске геометрије. Своја истраживања је у срећеном облику објавио 1832. године као *Апендикс (Додатак)* у раду свог оца који је имао наслов *Искусство увођења младих у основе математике – елементарне и више*. Током живота Бојаи није добио признање за своја открића. Имао је и једно неуспешно учешће на конкурс у Лајпцигу 1837. године, где је тема конкурса било учење о имагинарним величинама. Ови неуспеси, односно његово схватање да је доживео неуспех, утицали су на психу Јаноша Бојаија. То стање се посебно погоршало када је сазнао за дело Лобачевског које је објављено на немачком језику 1840. године.

Гаус је достигнућа Бојаија и Лобачевског хвалио у неким својим писмима, али није јавно о томе говорио.

Јанош Бојаи је умро 27. јануара 1860. године.

Еуклидска геометрија и геометрија Лобачевског

Према Хилбертовој¹³ аксиоматици, Еуклидска геометрија се заснива на прве четири групе аксиома и V постулату, односно Плејферовој аксиоми паралелности коју ћемо означавати са V_E .

Геометрија Лобачевског заснована је на, такође, прве четири групе аксиома и хиперболичној аксиоми паралелности V_H .

Из тога произлази да су сва тврђења, која су последице прве четири групе аксиома, важећа у обе геометрије. Таква су, рецимо, тврђење о јединствености нормале из тачке на праву, о неједнакости страница троугла, о спољашњем углу троугла, о ставовима о подударности троуглова и многа друга.

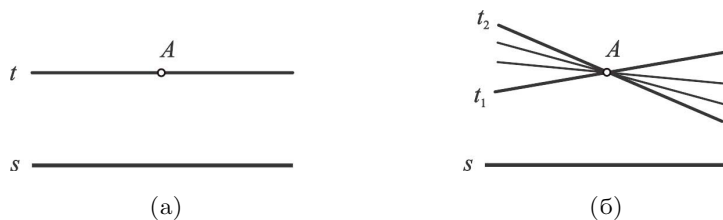
Уопште, ако геометрију засновану на прве четири групе аксиома, сходно Хилбертовој аксиоматици, назовемо *апсолутном*, сва тврђења те геометрије важе и у еуклидској и у геометрији Лобачевског.

С друге стране, тврђења Еуклидске геометрије и геометрије Лобачевског, која су последице аксиома V_E и V_H , у потпуности се разликују. То је због тога што аксиома V_E тврди једно, а аксиома V_H супротно.

У даљем, навешћемо нека карактеристична тврђења у којима се те две геометрије *разилазе*. Притом ћемо се ограничити на планиметрије, тј. геометрије у равни.

Почећемо са аксиомама V_E и V_H . Као што смо видели, аксиома V_E тврди да кроз тачку A ван праве s пролази јединствена права t која не сече s (сл. 11(а)). С друге стране, аксиома V_H гарантује постојање две такве праве t_1 и t_2 (сл. 11(б)).

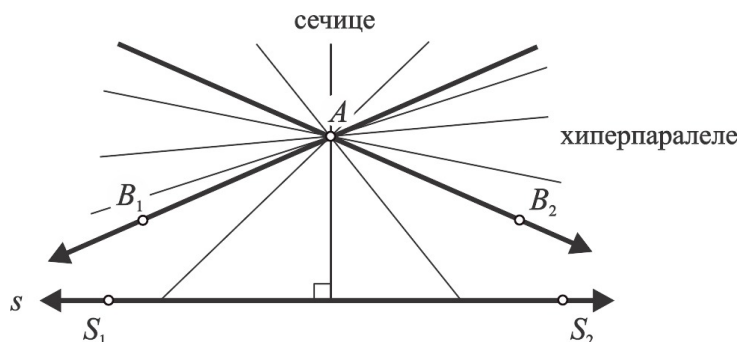
¹³ Давид Хилберт (David Hilbert, 1862–1943) – немачки математичар



Сл. 11

То повлачи да права s припада унутрашњости једног од углова које образују праве t_1 и t_2 , што је немогуће у еуклидској геометрији, сем у случају равног угла. Осим тога, свака права кроз A и која пролази кроз унутрашњости друга два унакрсна угла, такође не сече праву s .

Међу правим кроз тачку A које не секу праву s , посебно се издвајају две "граничне праве" AB_1 и AB_2 (сл. 12).



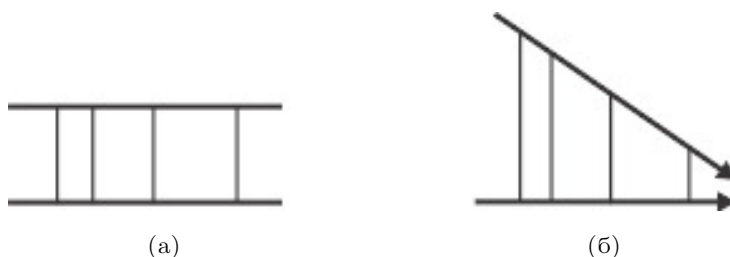
Сл. 12

Оне су симетричне у односу на нормалу из A на s , а у хиперболичкој геометрији зову се *паралелама* с правом s . Притом, за праву AB_1 каже се да је паралелна са s у смеру S_2S_1 , док је права AB_2 паралелна са s у смеру S_1S_2 . То се често означава са $p(\overrightarrow{AB_1}) \parallel p(\overrightarrow{S_2S_1})$, односно $p(\overrightarrow{AB_2}) \parallel p(\overrightarrow{S_1S_2})$.

Основно својство паралела AB_1 и AB_2 је да свака права која пролази кроз тачку A и унутрашњост угла B_1AB_2 , сече праву s . С друге стране, све праве које пролазе кроз A и унутрашњости углова упоредних углу B_1AB_2 , не секу s и за њих се каже да су *хиперпаралелне* или *мимоилазне* с правом s . Тако је скуп свих правих које пролазе кроз тачку A разбијен у три класе с обзиром на праву s . Једну чине сечице – оне које секу s , другу – хиперпаралеле (мимоилазне) и трећу – две паралеле (сл. 12). И прва и друга класа су бесконачне.

Ако се изузме да се паралелне праве, и у еуклидској и у хиперболичкој геометрији, не секу и да је паралелност у обе геометрије релација еквиваленције, у скоро свим другим својствима те паралеле се значајно разликују.

На пример, у еуклидској геометрији, све тачке једне паралеле једнако су удаљене од друге (сл. 13(а)). Насупрот томе, у хиперболичној геометрији, растојања тачака једне паралеле од друге, сва су различита (сл. 13(б)).



Сл. 13

Штавише, у хиперболичној геометрији, растојања тачака једне паралеле од друге монотонно опадају у смеру паралелности и теже нули (налик графику функције и њеној асимптоти). У супротном смеру, та се растојања неогранично повећавају.

Додајмо још да све тачке које су једнако удаљене од праве s и налазе се са исте стране s , у еуклидској геометрији леже на правој паралелној са s . У хиперболичној геометрији, никоје три такве тачке нису колинеарне и леже на једној кривој која је једно уопштење кружнице и зове се *еквидистанта* (сл. 14).



Сл. 14

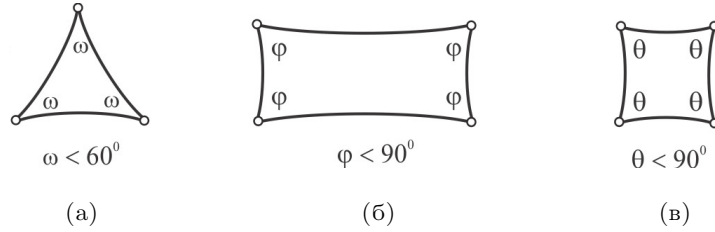
Што се тиче збира унутрашњих углова троугла, ситуација је следећа. У апсолутној геометрији (базираној на прве четири групе аксиома) може се показати да збир унутрашњих углова троугла не може бити већи од 180° . С обзиром на еквивалент 2, за тај збир у хиперболичној геометрији важи следеће необично тврђење.

ТЕОРЕМА 1. *Збир унутрашњих углова троугла у хиперболичној геометрији је мањи од 180° . Штавише, за свака три угла α, β, γ , таква да је $0^\circ < \alpha + \beta + \gamma < 180^\circ$, постоји троугао чији су то унутрашњи углови.*

Последица је

ТЕОРЕМА 2. *Збир унутрашњих углова простог n -угла, $n \geq 3$, мањи је од $(n - 2) \cdot 180^\circ$.*

У овој геометрији постоји једнакостраничан троугао, све стране су међусобно подударне и сви углови су међусобно подударни. Међутим, углови таквог троугла, због теореме 1, мањи су од 60° (сл. 15(a)).



Сл. 15

Такође, постоје једнакоугли и правилни четвороуглови (у еуклидској геометрији правоугаоници и квадрати) али њихови углови су мањи од 90° (сл. 15 (б), (в)).

Необично је и наредно тврђење о троугловима.

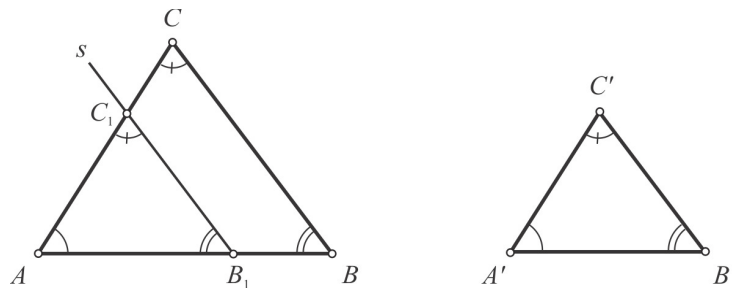
ТЕОРЕМА 3. *Ако за унутрашње углове троуглова ABC и $A'B'C'$ важи*

$$\angle A \cong \angle A', \quad \angle B \cong \angle B', \quad \angle C \cong \angle C',$$

тада је $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Доказ. На основу тзв. теореме о трихотомији, која потиче из апсолутне геометрије, за странице AB и $A'B'$ важи тачно једна од наредне три могућности.

(а) $AB \cong A'B'$. На основу става (УСУ – страница и налегли углови) о подударности троуглова, који такође припада апсолутној геометрији, следи $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.



Сл. 16

(б) $AB > A'B'$. Уочимо на страници AB тачку B_1 , такву да је $AB_1 \cong A'B'$ и кроз њу полуправу s која с полуправом B_1A образује угао подударан са $\angle B$, тј. подударан са $\angle B'$ (сл. 16).

Тада полуправа s не сече страницу BC . У противном, уколико би је секла у некој тачки D , добили бисмо троугао B_1BD у којем је збир углова већи од 180° . Но, то је контрадикција већ у апсолутној геометрији.

На основу Пашове аксиоме, која је из апсолутне геометрије, полуправа s сече страницу AC у тачки C_1 . Сада је $\triangle AB_1C_1 \cong \triangle A'B'C'$ на основу поменутог става (УСУ). То повлачи да је $\angle B_1C_1A \cong \angle C' \cong \angle C = \angle BCA$, па је збир углова у четвороуглу B_1BCC_1 једнак

$$\begin{aligned} \angle C_1B_1B + \angle B_1BC + \angle BCC_1 + \angle CC_1B_1 \\ = (180^\circ - \angle B_1BC) + \angle B_1BC + \angle BCC_1 + (180^\circ - \angle BCC_1) = 360^\circ. \end{aligned}$$

Међутим, то је контрадикција с тврђењем теореме 2 за $n = 4$. То значи да овај случај није могућ.

(в) $AB < A'B'$. Слично као случај (б).

Тако остаје само случај (а), а тада је $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. ■

Еуклидска и хиперболична геометрија се *разилазе* и по питању површине троугла. У еуклидској, та површина је једнака полупроизводу странице и одговарајуће висине. На немало изненађење, у хиперболичној геометрији важи

ТЕОРЕМА 4. *Ако је P површина троугла чији су углови α , β и γ изражени у радијанима, тада је*

$$P = R(\pi - \alpha - \beta - \gamma),$$

где је константа R тзв. *полупречник кривине хиперболичног простора*.

Необично је то што, за разлику од еуклидске геометрије, у овој геометрији површина троугла не зависи од страница, већ само од углова. Уз то, што је збир углова мањи, површина троугла је већа. Сходно теореме 4, површина троугла у овој геометрији тежи константи $R\pi$ када збир његових углова тежи нули.

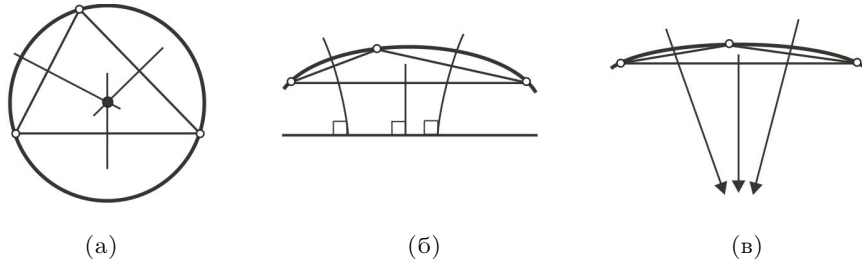
Кад је у питању кружница описана око троугла, ситуација у еуклидској геометрији је следећа. На основу еквивалента 3 *симетрале страница сваког троугла секу се у једној тачки*. Та тачка је једнако удаљена од темена троугла, те је центар описане кружнице. Према томе, око сваког троугла у еуклидској геометрији постоји описана кружница.

Међутим, у хиперболичној геометрији ствари су сасвим другачије. За симетрале страница троугла важе следећа тврђења.

ТЕОРЕМА 5. *Ако се симетрале двеју страница троугла секу, тада кроз пресечну тачку пролази и трећа симетрала (сл. 17(а)).*

ТЕОРЕМА 6. *Ако су симетрале двеју страница троугла хиперпаралелне (мимоилазне) праве, тада је и трећа симетрала хиперпаралелна (мимоилазна) са сваком од њих и све три су нормале на исту праву (сл. 17(б)).*

ТЕОРЕМА 7. *Ако су симетрале двеју страница троугла паралелне (у хиперболичном смислу), тада је и трећа симетрала паралелна с њима у истом смеру (сл. 17(в)).*

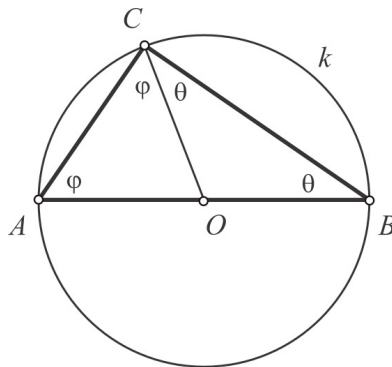


Сл. 17

У првом случају, темена троугла припадају кружности. У другом, леже на раније поменутој еквидали. У трећем случају, темена троугла леже на једној необичној кривој која се зове *орицикл*. Све три су криве 2. реда, са правом могу да имају највише две заједничке тачке.

Познато је да је у еуклидској геометрији периферијски угао над пречником кружности прав. С друге стране, у хиперболичкој геометрији важи тврђење

ТЕОРЕМА 8. У хиперболичкој геометрији, угао над пречником кружности је оштар.



Сл. 18

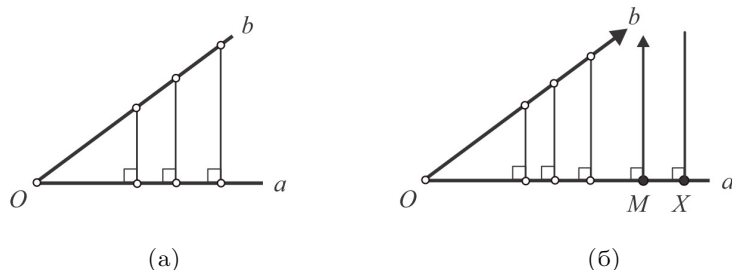
Доказ. Нека је AB пречник кружности k с центром O и нека је C произвољна тачка те кружности различита од A и B (сл. 18).

Како су троуглови AOC и OBC једнакокраки и како наспрам једнаких страница леже једнаки углови (апсолутна геометрија), имамо да је $\angle CAO = \angle OCA = \varphi$ и $\angle OBC = \angle BCO = \theta$. Отуда је збир углова у троуглу ABC једнак $2\varphi + 2\theta$. С обзиром на то да је збир углова у троуглу мањи од 180° (теорема 1), следи $2\varphi + 2\theta < 180^\circ$, односно $\varphi + \theta < 90^\circ$.

Отуда је $\angle ACB < 90^\circ$, тј. $\angle ACB$ је оштар. ■

Најзад, следи осврт на еквивалент 4 који је Лежандр користио у покушају да докаже V постулат.

У еуклидској геометрији, свака нормала на крак a оштрог угла aOb сече крак b . То следи из V постулата примењеног на праве одређене крацима a и b и сечицу која садржи нормалу на крак (сл. 19(a)).

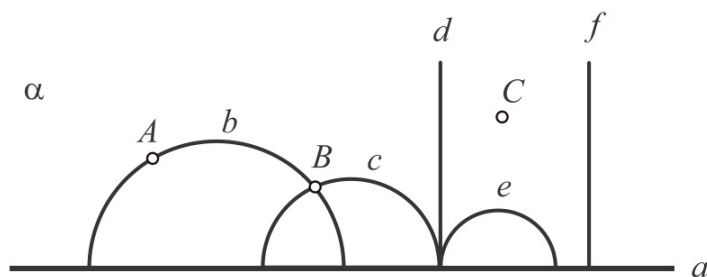


Сл. 19

У хиперболичној геометрији, почев од једне тачке M крака a , нормале на a престају да секу крак b (сл. 19(б)). Исто важи за сваку тачку X , такву да је $O-M-X$. Притом је нормала у тачки M хиперболична паралела са правом која садржи крак b , док су нормале у свим тачкама X хиперпаралелне (мимоилазне) с том правом.

Наведена су само нека од многих тврђења хиперболичне геометрије која се драстично разликују од одговарајућих у еуклидској геометрији. За комплетнији увид, препоручују се монографије о хиперболичној геометрији, попут [3].

На крају, приказаћемо Поенкареов полуравански модел хиперболичне геометрије који се изучава у студентским курсевима Основа геометрије.



Сл. 20

Тај модел се састоји од следећих елемената. У еуклидској равни уочи се права a , која се зове *апсолута* и једна од две отворене полуравни које су одређене том правом. Ту отворену полураван означаћемо са α и она ће представљати хиперболичну раван, коју ћемо кратко звати *h-раван*. Основни објекти дефинишу се на следећи начин.

Хиперболичне тачке или *h-тачке* су све еуклидске тачке које припадају полуравни α , тј. *h-равни*. Хиперболичне праве, *h-праве*, представљене су деловима еуклидских полукружница чији су центри на апсолути и који (ти делови) припадају *h-равни* и деловима еуклидских полуправих с почецима на апсолути и које су нормалне на апсолуту (подразумева се да посматрамо делове који су у *h-равни*).

На сл. 20 приказане су *h-тачке* A, B, C и *h-праве* b, c, d, e, f . Притом, *h-тачка* A припада *h-правој* b , *h-тачка* B је пресек *h-правих* b и c , док *h-тачка* C не припада ниједној од наведених *h-правих*.

У овом моделу, *h-праве* се секу ако се одговарајући еуклидски објекти секу у *h-равни*, као b и c . Код оних *h-правих* које су у хиперболичној равни паралелне, еуклидски објекти се секу на апсолути или су у питању полуправе нормалне на апсолуту. Такве су *h-праве* c, d и e , односно d и f .

Интересантно је да се у случају *h-правих* d и f хиперболична и еуклидска паралелност поклапају.

Коначно, код хиперпаралелних (мимоилазних) *h-правих* еуклидски објекти немају заједничких тачака ни у полуравни α ни на апсолути a , осим у поменутом случају полуправих. Тако су b и d , b и e , b и f , c и f , e и f парови хиперпаралелних *h-правих*.

Испоставља се да су у овом моделу испуњене аксиоме хиперболичне геометрије које се односе на раван.

Додајмо да постоји и просторни Поенкареов модел хиперболичне геометрије. У њему важе све аксиоме те геометрије.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] П. Александров, *Николай Иванович Лобачевский*, Квант, No. 2 (1976), 5–15.
- [2] А. И. Бородин, А. С. Буга, *Выдающиеся математики*, Биографический словарь-справочник, Радянська школа, Киев, 1987.
- [3] P. Kelly, G. Matthews, *The Non-Euclidean, Hyperbolic Plane*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1980.
- [4] Z. Lučić, *Euklidska i hiperbolična geometrija*, Univerzitet u Beogradu, 1994.
- [5] А. Норден, *Великое открытие Лобачевского*, Квант, No. 2 (1976), 16–21.
- [6] Б. А. Розенфельд, А. П. Юшкевич, *Омар Хайам*, Издательство "Наука", Москва 1965.

П. Младеновић, Математички факултет, Београд

Е-маил: paja@matf.bg.ac.rs

В. Петровић, Департман за математику и информатику, ПМФ Нови Сад

Е-маил: vojpet@gmail.com