НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ
LXX, 1-2 (2025), 19–35

Др Небојша Икодиновић

ЗАШТО ЈЕ МАТЕМАТИКА ВАЖНА?

(Трагом једног задатка са разговора за посао)

Сажетак. За наслов је изабрано питање на које се увек изнова траже одговори који су усаглашени са сталним променама у образовању и наставној пракси. Стереотипни одговори углавном истичу практичне примене математике, често с посебним нагласком на свакодневни живот и актуелне природно-друштвене теме. У новије време, одговори се све више преусмеравају на утицај учења математике на развој когнитивних способности, на развој памћења, учења, мишљења, закључивања итд. Вођени управо овим идејама, покушаћемо да образложимо и афирмишемо тезу да наглашавање стваралачких аспеката математике снажно развија више нивое мишљења и истовремено значајно стимулише функционалну употребу математике. Општа прича биће изложена кроз решавање једног занимљивог и необичног задатака који ћемо анализирати из различитих углова: у наставном контексту, као полазиште за стварање математике, са становишта когнитивне науке.

1. Прилике и изазови наставе математике

Наставу математике данас треба сагледавати и планирати између два наизглед опречна феномена. Према подацима са Careercast сајта[1] за 2021. годину на листи првих 10 најпожељнијих занимања налазимо следећих шест професија:

1. Data Scientist
3. Statistician
5. Mathematician
7. Operations Research Analyst
9. Actuary
10. Software Engineer

У школовању за ове послове доминирају математика и математички начин размишљања. Овакве околности су свакако добар подстицај и одлична прилика

Чланак је заснован на излагању које је аутор имао на XIV симпозијуму „Математика и примене“, који је организовао Математички факултет у Београду 2024. године

[1] https://www.careercast.com/jobs-rated/best-jobs-2021

за наставу математике. Ипак, суочавамо се и са озбиљним изазовима. Генерално је мала заинтересованост за студије математичког усмерења, а неке од разлога анализира чланак [2] болног наслова (у преводу на српски): *'Радије бих умро': разлози које наводе 16-годишњаци због којих не желе да студирају математику.* Међународна математичка унија улаже велике напоре да промовише и популаризује наставу математике. Овај чланак је донекле инспирисан управо оваквим напорима.

1.1. Превелико поједностављивање обесмишљава наставу

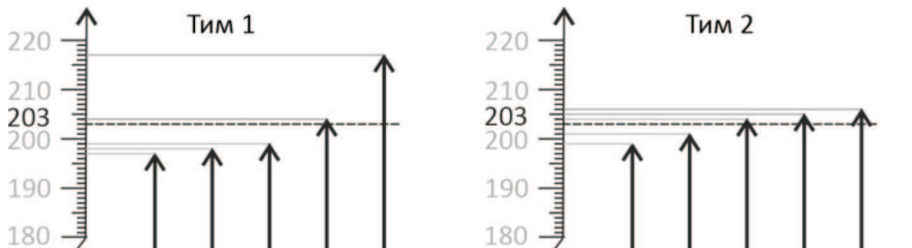
Шта се заправо очекује од наставе математике? Укратко, од наставе математике будућност очекује солидан ниво *математичке писмености* и јак подстицај развоју когнитивних способности. Когнитивна способност је заједнички назив за способности памћења, мишљења, учења, закључивања итд. којима је заједничко да представљају основу за сазнајну делатност и интелектуално функционисање било које врсте. *Математички начин размишљања* користићемо као приближан општи назив за когнитивне аспекте наставе математике.

Поменута два циља наставе математике се међусобно допуњују и сваки је, у одређеној мери, претпоставка за онај други. Сасвим уопштено говорећи, ова два циља наставе математике можда најочитије препознајемо на тзв. сертификационим и квалификационим тестирањима. Сертификациони тестови су типични за крај једног образовног циклуса и претежно су усмерени на математичку писменост. Квалификациони тестови су уобичајени за почетак професионалне каријере и карактерише их наглашена провера математичког начина размишљања. Осврнимо се на два сасвим једноставна, школска задатка.

Задатак 1. Одредите средњу висину и медијану петорице кошаркаша, ако су њихове висине:

а) 197 cm, 198 cm, 199 cm, 204 cm, 217 cm;

б) 199 cm, 201 cm, 204 cm, 205 cm, 206 cm.



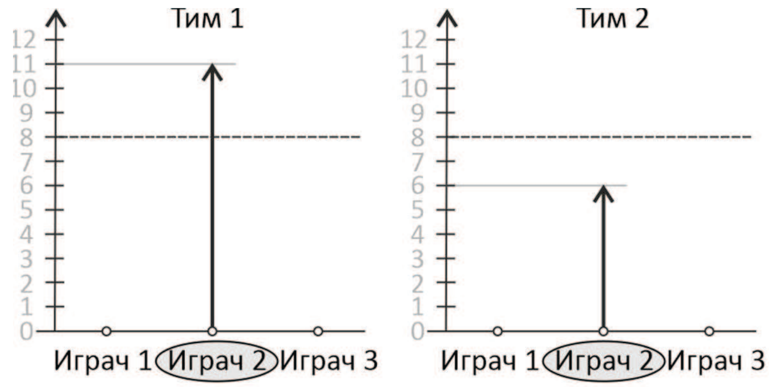
Слика 1. Просечна висина кошаркаша и медијана

Задатак наведеног типа јасно проверава оствареност следећег исхода:

(⋆) ученик је у стању да одреди средњу вредност и медијану за неки скуп података.

Међутим, на овом исходу се не сме зауставити настава. Нема много смисла прикупљати и обрађивати податке ако се на то не надовеже анализа и дискусија добијених резултата. Главни циљ мора бити извлачење валидних закључака у ситуацијама када су познате средња вредност и медијана за неки обиман скуп непознатих података, и у складу са тим закључцима доношење одговарајућих одлука. Управо то се очекује и на квалификационим тестирањима, да кандидат функционално употребљава средњу вредност и медијану. Зато обрада појмова аритметичке средине и медијане мора бити знатно изнад нивоа који одређује исход (⋆). Не сме остати недоречено зашто се уводе поједини појмови и чему служе. У том смислу, на задатке претходног типа неопходно је надовезати и задатке попут наредног.

Задатак 2.* Познато је да се улични баскет игра „три на три“. Током једне утакмице за сваког кошаркаша је забележен укупан број поена који је постигао. За први тим, просечан број кошева је 8, а медијана је 11; за други тим, просечан број кошева је такође 8, али је медијана 6. Наведите један математички аргумент, уз одговарајуће образложење, зашто се први тим може сматрати бољим од другог тима.



Слика 2. Просечан број кошева свих кошаркаша и медијана

Нажалост, међу ученицима који знају да ураде задатак 1 има мало оних који могу коректно да одговоре и на задатак 2, тј. да закључе: у првом тиму је један играч значајно „подбацио“, док је у другом тиму један играч био знатно успешнији од преостала два играча. Звездица наведена поред редног броја задатка 2 не упозорава да је реч о тежем задатку, већ да је реч о задатку који би морао бити укључен у редовну наставу. Ученици који се зауставе на нивоу задатка 1, углавном математику сматрају бескорисном и временом је све теже прате. Управо због тога, претерано поједностављивање градива обесмишљава наставу.

1.2. Методе обуке значајно утичу на развој когнитивних способности

Често се занемарује да, осим математичког садржаја, на развој когнитивних способности велики утицај имају и методе обуке, тј. наставне методе којима се реализује сама настава. Као илустрацију, издвајамо важна запажања потврђена истраживањима у којима су магнетном резонанцом праћене мождане активности током математичке делатности. Показано је [3, 4, 6] да *учење новог математичког знања може драматично да промени обрасце мождaних активности. Промене које се догађају резултат су, чини се, садржаја и метода обуке.*

Размотримо три грубо подељене основне методе обуке класификоване према циљевима учења и природном редоследу надовезивања:

- репродуктивни приступ (ученик зна одговоре на конкретна питања);
- процедурални приступ (ученик уме да реши класу сродних задатака);
- хеуристички приступ (ученик аналитички тражи и образлаже решење проблема).

На пример, на репродуктивно учење таблице множења надовезују се процедуре множења и дељења било која два природна броја. Већина ученика која рутински рачуна, нпр. 1431 : 27, има потешкоћа да реши математички ребус приказан испод, иако је за његово решавање потребно само познавање поступка дељења два броја. Когнитивне способности долазе до изражаја у пуном смислу тек са задацима попут ребуса.

$$\begin{array}{r}
\ast\ \ast\ \ast\ \ast : \ast\, 7 = \ast\ \ast \\
\underline{-\ \ast\ \ast\ 5} \\
\ast\ \ast \\
\underline{-\ \ast\ 1} \\
0
\end{array}$$

Слика 3. Решење ребуса представља дељење 1431 : 27.

Математика се превасходно учи разумевањем, а не само памћењем. Увек постоји велика опасност да настава математике буде сведена на репродуктивни ниво и заробљена у процедуралне оквире. Донекле је разумљива тежња ученика да наставу сведу на чист репродуктивни ниво будући да такво учење захтева најмање напора. Нажалост, напори наставника да ученике уздигну изнад репродуктивног нивоа, углавном се завршавају на процедуралним нивоу који је тек предуслов квалитетног учења математике.

Главну смерницу за „обуку“ у настави математике сажето можемо исказати Скемповим речима [11]: … *деца неће бити успешна у учењу математике уколико се не подучавају на начин који им омогућава да употребе своју интелигенцију* …

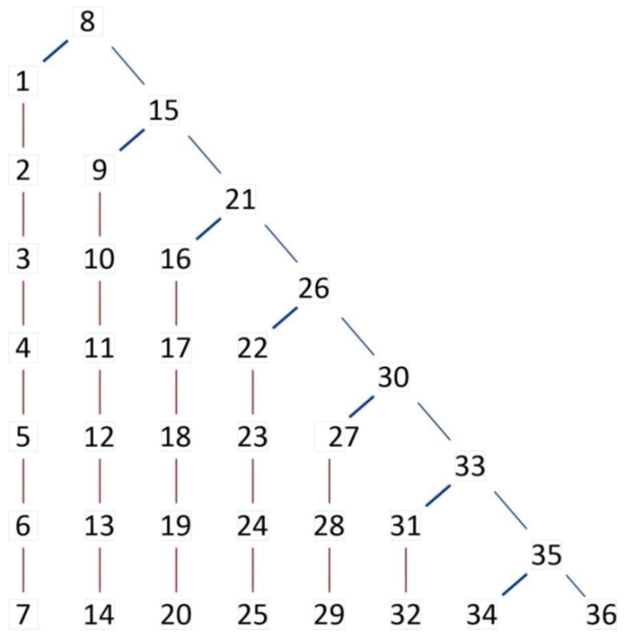
2. Нивои обуке за будућност

Искористићемо један необичан и занимљив задатак да прикажемо различите нивое обуке. Задатак је изабран тако да нас измести из типичних школских тема и дочара атмосферу учења нечега сасвим новог. Изабран је задатак чије се варијанте често наводе као пример проблема који се може очекивати на разговору за посао [12]. Варијанте овог задатка се често укључују и у збирке занимљивих задатака [8]. Осим тога, има и стручних студија [1] и предавања инспирисаних овим задатком [5]. Овај чланак ће истаћи методички потенцијал овог задатка.

Задатак 3. Дате су вам 2 билијарске кугле. Експериментално одредите највиши спрат зграде од 36 спратова са којег се може бацити билијарска кугла тако да се након пада не разбије. Потребно је наћи стратегију одређивања критичног спрата у најмањем броју покушаја.

Подразумевају се следеће природне претпоставке:

- Ако се кугла након бацања са неког спрата не разбије, онда је можете поново користити, без бојазни да је иоле мањег квалитета.
- Ако се кугла разбије приликом бацања са k-тог спрата, разбиће се и приликом бацања са сваког вишег спрата.
- Ако се кугла не разбије приликом бацања са k-тог спрата, неће се разбити ни приликом бацања са било ког нижег спрата.



Слика 4. Шема бацања 2 кугле са 36-спратнице

Овај задатак је у збиркама занимљивих задатака углавном приказан као необична главоломка намењена за „једнократну забаву“. Пођимо зато од готовог решења које се даје у оваквим збиркама.

Решење. Критични спрат се може одредити у највише 8 корака. Најпре треба бацати прву куглу редом са спратова 8, 15, 21, 26, 30, 33, 35, док се не разбије. Када се прва кугла разбије на неком од ових спратова, другу куглу треба бацати редом са спратова који су испод спрата на коме се прва кугла разбила, и изнад су свих спратова са којих се прва кугла није разбила (ако је таквих спратова било). На слици 4 приказана је шема описаног поступка који ће се сигурно завршити после највише 8 покушаја, без обзира који спрат је критичан.

Наведено решење заправо садржи само крајњи резултат и тешко се може реконструисати начин размишљања који је довео до решења. Додатно, претходно решење не олакшава много решавање наредног задатка.

Задатак 4. Наћи најмањи број покушаја да се открије критични спрат зграде од 100 спратова помоћу две кугле.

Најлакши начин да неког обучимо да решава читаву класу сродних проблема јесте да понудимо „огољену“ процедуру. У случају нашег задатка, може се показати да важи следећа

Теорема 1. Најмањи број покушаја p да се открије критични спрат зграде од s спратова помоћу две кугле једнак је највећем природном решењу неједначине

$$\frac{p(p-1)}{2} \geqslant s.$$

Опремљени овом теоремом брзо долазимо до решења задатка 4: најмањи природан број који је решење неједначине

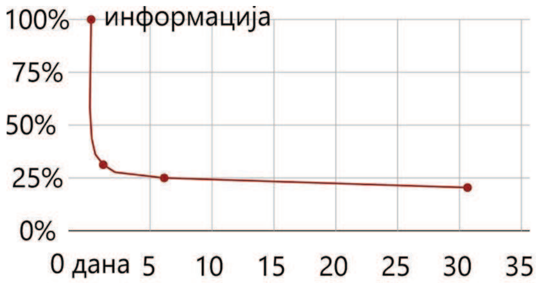
$$\frac{p(p-1)}{2} \geqslant 100$$

јесте број 14. Штавише, једноставно решавамо све сродне задатке.

Задатак 5. Наћи најмањи број покушаја да се открије критични спрат зграде од 837 спратова помоћу 2 кугле.

Мали број ученика се у оваквим ситуацијама запита одакле нам формула из Теореме 1. Ученици су навикнути да једноставно прихватају теореме, без било каквог доказа и објашњења, као рецепте за решавање одговарајуће класе задатака.

Учење математике оваквом врстом обуке има веома малу когнитивну вредност. Таква обука може бити подстрек само изузетно мотивисанима и надаренима. Упознавање са готовим одговором на конкретно питање има скоро исту когнитивну вредност као упознавање са готовом теоремом, формулом или процедуром, која покрива донекле ширу класу сродних.



Слика 5. Ебингхаусова крива заборављања

Испоставља се да овакав приступ обучавања, тј. учења прати тзв. *Ебингхаусова крива заборављања* (слика 5) која је сличног облика као приликом учења бесмислених чињеница.

Додатно, претходне методе „готовог решења" и „готове формуле" неће нам бити много од помоћи да решимо следећи задатак.

Задатак 6. Наћи најмањи број покушаја да се открије критични спрат зграде од 100 спратова помоћу 3 кугле.

На овом месту, корисно је подсетити на цитат из предговора чувене књиге [10]: *Ако наставник с ученицима само механички 'теше' увежбане поступке, смањује њихово интересовање и кочи њихов интелектуални развој. Но ако он у својим ученицима буди радозналост дајући им задатке који су примерени њиховом знању и ако им помаже стимулативним питањима, развијаће у њима склоност за самосталним мишљењем и показивати им путеве до њега.*

2.1. Добра, боља, најбоља стратегија

Неки садржај почињемо трајно да памтимо тек када почнемо да увиђамо смисао, логичку повезаност и шири контекст у којем су одређени концепти настали и даље се развијали. Другим речима, све постаје јасније када аналитички почнемо да размишљамо о тематици, када аналитички приступамо проблемима. У наставку ћемо приказати само неке основне аспекте аналитичког приступа нашим задацима.

Ако било ком од претходних задатака приступимо аналитички, не само да ћемо обухватити знатно ширу класу сродних проблема, већ ћемо истаћи и важне опште принципе решавања проблема и примене математике.

Поједине фазе аналитичког решавања нашег задатка могли бисмо сликовито назвати на следећи начин:

1. Боље је имати било какву стратегију, него никакву.
2. Постоји ли боља стратегија?
3. Постоји ли најбоља стратегија?

Снагу аналитичког приступа ћемо показати полазећи од варијанте задатка која је једноставнија од претходних.

Задатак 7. Наћи најмањи број покушаја да се открије критични спрат зграде од 14 спратова помоћу 2 кугле.

Почетно суочавање са било каквим проблемом требало би да буде: **Боље је имати било какву стратегију, него никакву**. Веома је важно стално стимулисати и охрабривати ученике да дају било какве предлоге за решавање проблема. Сви предлози и иницијативе ученика су методички вредни, без обзира да ли су погрешни или добри.

За задатак 7 добро стимулативно питање јесте да се прво размотри једноставнији случај – одређивање критичног спрата само једном куглом. Када бисмо имали на располагању само једну куглу, једини начин да одредимо тражени спрат јесте да редом испробавамо спрат по спрат, почевши од најнижег. Наравно, у овом случају, највећи могући број покушаја је 14. (Можда се кугла неће разбити ни када се баци са 14. спрата.)

На претходно питање треба недовезати дискусију како можемо смањити број покушаја, додавањем друге кугле. На пример, прву куглу бисмо могли да бацамо са сваког четвртог спрата (4, 8, 12) док се не разбије. Ако се прва кугла разбије бацањем са 4. спрата, онда другом куглом проверавамо спратове 1, 2, 3. Ако се разбије са 8. спрата, другом куглом проверавамо само спратове, 5, 6 и 7. Ако се разбије са 12. спрата, другом куглом проверавамо 9, 10 и 11. Дакле, стратегијом бацања прве кугле са сваког четвртог спрата, у најгорем случају нам је потребно 6 покушаја. Исти број покушаја је довољан и за другачије стратегије: бацање прве кугле са сваког петог спрата или бацање прве кугле са сваког трећег спрата (видети табелу 1). Али, ако бисмо прву куглу бацали са сваког другог спрата, у најгорем случају је потребно 7 покушаја; а ако бисмо бацали са 6 и 12 спрата, у најгорем случају потребно је 8 покушаја.

Прву куглу бацамо са сваког:	Највећи број покушаја:
4. спрата (4-8-12)	$3+3=6$
5. спрата (5-10)	$2+4=6$
3. спрата (3-6-9-12)	$4+2=6$
2. спрата (2-4-6-8-10-12-14)	$7+1-8$
6. спрата (6-12)	$2+5=7$
...	...

Табела 1. Неколико једноставних стратегија одређивања критичног спрата 14-спратнице помоћу 2 кугле

Постоји ли боља стратегија? Постоји. Критични спрат 14-спратнице помоћу 2 кугле можемо одредити у 5 покушаја ако поступимо на следећи начин: прву куглу редом бацамо са спратова 5, 9, 12, 14, док се разбије; када се прва кугла разбије, другом куглом проверавамо редом спратове који се налазе између последња два спрата са којих је бацана прва кугла.

Бацање прве кугле са:	Ако се прва кугла разбије, бацамо другу куглу:
5. спрата	1. → 2. → 3. → 4.
9. спрата	6. → 7. → 8.
12. спрата	10. → 11.
14. спрата	13.

Табела 2. Стратегија одређивања критичног спрата 14-спратнице помоћу 2 кугле у највише 5 покушаја

Да ли је стратегија приказана у табели 2 и најбоља? Замислимо да смо прву куглу први пут бацили са p-тог спрата, при чему је $1 \leqslant p \leqslant 14$. Ако се тада кугла разбије, онда помоћу друге кугле у највише $p-1$ покушаја ћемо утврдити тражени спрат, а укупан број покушаја биће p. Али ако се прва кугла не разбије приликом бацања са p-тог спрата, како бисмо могли да сачувамо p као највећи могући број покушаја? Замислимо да се прва кугла није разбила приликом првог бацања, али јесте приликом другог. У том случају, укупан број покушаја ће остати p, ако за другу куглу остане $p-2$ покушаја. То ћемо постићи ако прву куглу у другом покушају бацимо са спрата $p+(p-1)=2p-1$. (Између спратова p и $2p-1$ постоје $p-2$ спрата.) Ако се прва кугла не разбије на спрату $2p-1$, наредни спрат са кога треба бацити прву куглу oређујемо на сличан начин. Ако се прва кугла разбије у трећем бацању, онда за другу куглу треба да остане $p-3$ покушаја. То значи да прву куглу у трећем покушају треба бацити са спрата $(2p-1)+(p-2)=3p-3$. Главна идеја ове стратегије јесте да сваки пут када бацимо прву куглу и она се не разбије, за другу куглу предвиђамо мање бацања. Уочавамо да ћемо критични спрат пронаћи у највише p покушаја, уколико висина зграде није већа од збира првих p бројева:

$$p+(p-1)+\cdots+2+1.$$

Када збир првих p бројева прелази број 14? Није тешко утврдити да је тај збир већи од 14, ако је $p \geqslant 5$. Дакле, критични спрат 14-спратнице помоћу 2 кугле се може утврдити у највише 5 покушаја.

Много важније од решења задатка 7 јесте запажање да је у претходној анализи број 14 потпуно неважан. Читава анализа остаје да важи за било који број спратова и самим тим представља суштину доказа Теореме 1.

Уопштено говорећи, у основи нашег аналитичког приступа је савет из [10]: *Ако не можеш одмах да решиш постављени задатак, покушај најпре да смислиш неки једноставнији: општији задатак, специјалнији задатак, аналогни задатак.* Заиста, ако је p први спрат са кога бацамо прву куглу, онда се задатак своди на један од следећа два једноставнија подзадатка: (1) ако се кугла разбије, остаје једна кугла да се одреди критичан спрат зграде са $p-1$ спратова;

(2) ако се кугла не разбије, остају две кугле да се одреди критичан спрат зграде са $s-p$ спратова.

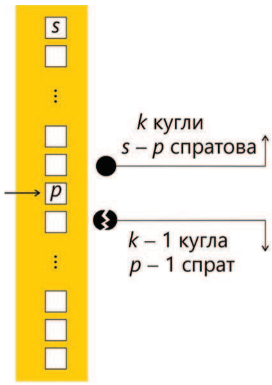
3. Аналитички поглед на наш необичан задатак

Запажање којим је завршен претходни одељак решава и задатке са већим бројем кугли.

Задатак 8. Наћи најмањи број покушаја да се открије критични спрат зграде од s спратова помоћу k кугли.

Ако је p први спрат са кога бацамо прву куглу, онда се задатак своди на један од следећа два једноставнија подзадатка:

- ако се прва кугла разбије, остаје $k-1$ кугла да се одреди критичан спрат зграде са $p-1$ спратова;
- ако се кугла не разбије, остаје k кугли да се одреди критичан спрат зграде са $s-p$ спратова.



Слика 6. После првог бацања задатак се своди на два подзадатка

Потражимо функцију Res за израчунавање решења задатка 8:

$$\mathrm{Res}(k,s) = \text{најмањи број бацања да се одреди критичан спрат зграде од } s \text{ спратова помоћу } k \text{ кугли.}$$

Већ смо размотрили случај када имамо само једну куглу; додајмо и тривијалне случајеве када зграда има само један спрат или нема спратова:

$$\mathrm{Res}(1,s)=s, \quad \mathrm{Res}(k,0)=0, \quad \mathrm{Res}(k,1)=1. \tag{1}$$

Следећа једнакост тачно описује нашу стратегију свођења на два подзадатка:

$$\mathrm{Res}(k,s) = 1 + \min_{1\leqslant p\leqslant s} \max\{\mathrm{Res}(k-1,p-1), \mathrm{Res}(k,s-p)\}. \tag{2}$$

После првог бацања, за сваки избор спрата за прво бацање кугле ($1 \leqslant p \leqslant s$), бирамо веће решење одговарајућих подзадатака, да бисмо на крају међу њима изабрали најмање, чиме одређујемо и први спрат са кога треба бацати.

Једнакости (1) и (2) дефинишу поступак израчунавања решења задатка 8, за задате аргументе s и k. На пример, да бисмо израчунали $\mathrm{Res}(2,5)$, треба израчунати решење већег броја подзадатака:

$$\begin{array}{lllll} \mathrm{Res}(1,0)=0, & \mathrm{Res}(1,1)=1, & \mathrm{Res}(1,2)=2, & \mathrm{Res}(1,3)=3, & \mathrm{Res}(1,4)=4, \\ \mathrm{Res}(2,0)=0, & \mathrm{Res}(2,1)=1, & \mathrm{Res}(2,2)=2, & \mathrm{Res}(2,3)=2, & \mathrm{Res}(2,4)=3. \end{array}$$

Најзад добијамо:

$$\mathrm{Res}(2,5) = 1 + \min_{1\leqslant p\leqslant 5} \max\{\mathrm{Res}(1,p-1), \mathrm{Res}(2,5-p)\} = 1+2 = 3.$$

Једнакости (1) и (2) заправо представљају индуктивну (рекурзивну) дефиницију функције Res. На слици 7 је приказан једноставан Python програм који рачуна вредности ове функције.

```
import sys

def Res(k, s):
    if k == 1:
        return s

    if s == 0 or s == 1:
        return s

    min = sys.maxsize
    for p in range(1, s + 1):

        res = max(Res(k - 1, p - 1), Res(k, s - p))
        if res < min:
            min = res

    return min + 1
```

Слика 7. Програм који рачуна вредности функције $(k,s) \mapsto \mathrm{Res}(k,s)$

Програм брзо даје решење за 2 кугле и 14 спратова, $\mathrm{Res}(2,14) = 5$, или пак 3 кугле и 14 спратова, $\mathrm{Res}(3,14) = 4$. Ипак, на решење задатка 3 (којим смо започели причу), са 2 кугле и 36 спратова, мораћемо дуго да чекамо.

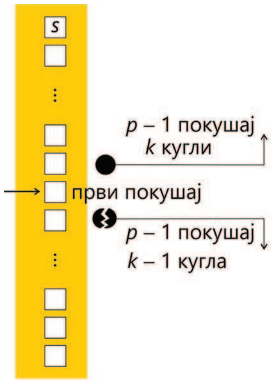
Можемо ли саставити програм који ће брже решавати задатак 3? До велике промене у брзини израчунавања доводи мала промена перспективе при разматрању проблема, која је већ наговештена на крају претходног одељка. Уместо да бројимо покушаје у зависности од броја спратова и кугли, бројимо спратове у зависности од броја покушаја и броја кугли. Уместо задатка 8, пажњу усмеравамо на следећи задатак.

Задатак 9. Наћи највећи број спратова зграде чији се критични спрат може одредити у највише p покушаја помоћу k кугли.

Увешћемо нову функцију – спратност:

$$\begin{bmatrix} p \\ k \end{bmatrix} = \text{највећи број спратова чији се критични спрат може открити у највише } p \text{ покушаја помоћу } k \text{ кугли.}$$

Функцију спратности прецизно дефинишемо ослањајући се на препознатљиву шему приказану на слици 8.



Слика 8. После првог бацања, задатак 9 се своди на два једноставнија подзадатка

После првог бацања, задатак се своди на два подзадатка, при чему је овога пута једноставнија веза између решења задатка и тих подзадатака. Почетни услови су одређени тривијалним случајевима: без кугли или без покушаја можемо испитивати само зграду без спратова.

$$\begin{bmatrix} p \\ 0 \end{bmatrix} = 0, \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix} = 0.$$

Након првог бацања, зграду делимо на две подзграде; висина почетне зграде једнака је збиру висина обе подзграде увећаном за 1.

$$\begin{bmatrix} p \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + 1.$$

Једноставно је формирати табелу вредности овако дефинисане функције (табела 3). Поступак је сличан формирању Паскаловог троугла. Најпре у поља прве врсте и прве колоне уписујемо нуле. У остала поља уписујемо следбеника збира бројева из поља горе-лево и поља непосредно изнад.

Из ове таблице читамо решење нашег првог задатка, које нам претходни програм није могао брзо вратити: $\mathrm{Res}(2, 36) = 8$.

Нови Python програм који користи нову стратегију за решавање задатака приказан је на слици 9. Програм заправо рачуна табелу вредности $\begin{bmatrix} p \\ k \end{bmatrix}$, док се у колони одређеној бројем датих кугли не престигне задата висина зграде.

Овај програм ће веома брзо вратити решење задатка са 2 кугле и 36 спратова: $\mathrm{Res}(2,36) = 8$. Брзо добијамо и решења $\mathrm{Res}(2,100) = 14$, $\mathrm{Res}(3,1000) = 19$ итд.

(p,k)	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1
2	0	2	3	3	3
3	0	3	6	7	7
4	0	4	10	14	15
5	0	5	15	25	30
6	0	6	21	41	56
7	0	7	28	63	98
8	0	8	36	92	162
9	0	9	45	129	255
10	0	10	55	175	385

Табела 3. Табела вредности $\begin{bmatrix} p \\ k \end{bmatrix}$

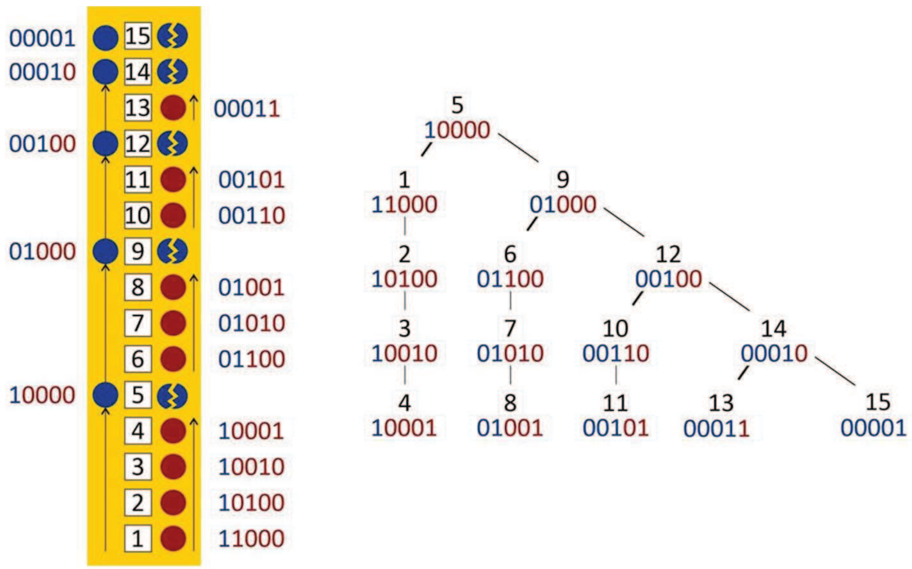
```
INT_MAX = 32767

def Res(n, k):
    sprat = [[0 for x in range(k + 1)] for x in range(n + 1)]

    for i in range(1, n + 1):
        sprat[i][1] = 1
        sprat[i][0] = 0

    for j in range(1, k + 1):
        sprat[1][j] = j

    for i in range(2, n + 1):
        for j in range(2, k + 1):
            sprat[i][j] = INT_MAX
            for x in range(1, j + 1):
                res = 1 + max(sprat[i - 1][x - 1], sprat[i][j - x])
                if res < sprat[i][j]:
                    sprat[i][j] = res

    return sprat[n][k]
```

Слика 9. Нови програм који рачуна вредност функције $(k,s) \mapsto \mathrm{Res}(k,s)$

И како то често бива, испоставља се да функција спратности није нека необична функција везана само за један необичан задатак. Функција спратности је заправо парцијална сума биномних коефицијената.

Теорема 2. $\begin{bmatrix} p \\ k \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{k} \binom{p}{i}.$

Доказ Теореме 2 почива на запажању да за задате параметре p и k, сваком спрату можемо придружити један бинарни низ дужине p у коме се појављује највише k јединица. Спрату додељујемо низ тако што замислимо да је управо тај спрат критичан, а цифрама 0 и 1 бележимо да ли се бачена кугла разбила (1) или није (0); ако се експеримент заврши за мање од p корака, на формирани низ дописујемо потребан број нула. На слици 10 је приказан случај када је $s = 15$, $k = 2$, и самим тим $p = 5$. На пример, ако је 11. спрат критичан, то ћемо утврдити после три бацања прве кугле, при чему се она разбија у трећем бацању (почетак одговарајућег низа је 001), након чега следе два бацања друге кугле, која се разбија у другом бацању, па је одговарајући низ 00101. Ако је пак 6. спрат критичан, то ћемо утврдити после два бацања прве кугле, која се разбија у другом бацању (почетак низа је 01), након чега следи само једно бацање друге кугле, која се тада и разбија (па је проширени низ 011), и дописујемо још две нуле да би дужина низа била пет: 01100.



Слика 10. Бинарни описи критичних спратова

Укупан број бинарних низова дужине p у којима се појављује највише k јединица је управо парцијална сума биномних коефицијената.

Теорема 2 и скица њеног доказа доводе у везу наш задатак са биномним коефицијентима, бинарним стаблима и сл. и отварају бројне истраживачке проблеме. Познато је, на пример, да не постоји „лепа и једноставна“ формула за парцијалне суме биномних коефицијената, па се намећу питања добрих процена ових сума, одн. асимптотских формула.

4. Има ли у настави места за ‘необичне’ задатке?

Као што је наведено на почетку, избор необичног задатка одређен је настојањем да што верније дочарамо суочавање са нечим новим. Међутим, ова наша прича се може пренети на многе школске теме. Наводимо само два примера, један из основношколске, један из средњошколске математике. Први пример показује да чисто процедурално знање није довољно за функционалну примену наученог. Други пример истиче да је процедурална вештина могућа без суштинског разумевања базичних коцепата на које се то знање односи.

Ученици седмог разреда примењују готову формулу за израчунавање броја дијагонала многоугла:

$$D_n = \frac{n(n-3)}{2}.$$

На ову формулу надовезују се типични школски задаци попут: Колико дијагонала има 100-угао? Овај задатак, заједно са формулом која га решава, не показује ученицима снагу и значај математичког начина размишљања. Од саме формуле је, наравно, много важније знати како се до ње долази. Само у том случају развијамо способност да решавамо много ширу класу сродних задатака. Бројање дијагонала многоугла има смисла само ако се препозна снага методе бројања која доводи до формуле. Та снага се може препознати само уз, на пример, задатке 10–12. Наша наставна стратегија би морала бити ‘укидање звездица’ уз ове ‘напредне’ задатке.

Задатак 10.* На шаховском турниру је учествовало пет шахиста, Пера, Мика, Лаза, Сима и Аца. Колико партија је укупно одиграно ако се играло по систему свако са сваким?

Задатак 11.* Тачка O је почетна тачка шест полуправих које све леже у једној полуравни. Колико конвексних углова одређују ове полуправе?

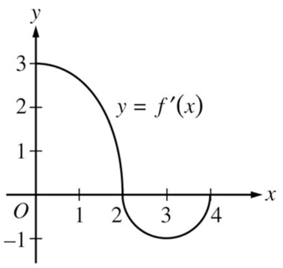
Задатак 12.* Колико дијагонала има икосаедар?

У средњим школама, ученици обављају процедуралне захтеве одређивања извода или интеграла:

$$\left(\sqrt[3]{x\sqrt{x\sqrt{x^7}}}\right)' \quad \text{или} \quad \int \sqrt[3]{x\sqrt{x\sqrt{x^7}}}\,dx,$$

без икаквог суштинског разумевања одговарајућих појмова и концепата. Познате таблице извода, одн. интеграла и једноставне алгебарске трансформације су довољне да се претходни задаци реше. Ученик може да увежба и знатно сложеније примере, а да има велике тешкоће да реши следећи ‘напредни’ задатак.

Задатак 13.* Функција f је непрекидна на $[0,4]$ и диференцијабилна на $(0,4)$. На слици 11 дат је график $y = f'(x)$. Заокружити слово испред тачног одговора.



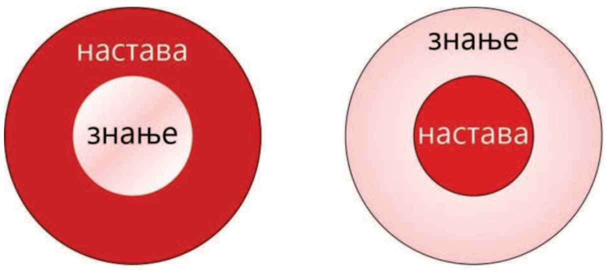
Слика 11. График $y = f'(x)$

(A) $f(0) < f(2) < f(4)$
(B) $f(0) < f(2) = f(4)$
(C) $f(0) < f(4) < f(2)$
(D) $f(4) = f(2) < f(0)$
(E) $f(4) < f(0) < f(2)$

Да би се покренуле и ангажовале когнитивне способности неопходно је да задаци попут оних које смо означили звездицама постану саставни део редовне наставе. Док год се такви задаци остављају само за ‘напредне’, редовна настава ће се за све већи број ученика сводити на учење бесмисленог материјала.

Предлоге да се редовна настава обогати новом врстом задатака обично прате примедбе да се у расположивом времену једва постиже реализација преобимних наставних програма. При томе, наставни програм се традиционално посматра као колекција свих процедура потребних за решавање типичних класа математичких задатака. Такво становиште је и разлог што у редовној настави доминирају обуке решавања великог броја шаблонизованих задатака које ће добро увежбани ученик рутински решавати ослањајући се само на памћење, и без икаквих додатних когнитивних напора.

Згодно је место да цитирамо духовито и помало иронично запажање из [7]: *студенти у просеку запамте само 40% онога што сте им испричали, па зато у курс треба натрпати 250% онога што треба да се научи.* Заиста, у новије време, програми наставе постају све амбициознији, а захтеви који се постављају пред ученике све нижи. Ствари би требало поставити сасвим другачије. Сваку наставну тему треба градити на добро заснованом језгру које се мора савладати са високо постављеним захтевима и које ће се даље проширивати и развијати превасходно уз когнитивне напоре ученика.



Слика 12. Однос садржаја који се обради на часовима и знања које ученик заиста усвоји

Слика 12 илуструје два приступа организацији наставе. На дијаграму лево, ширина прстена би се могла интерпретирати као мера количине узалудног напора наставника. У дијаграму десно, ширина прстена представља количину когнитивног напора ученика да постигне постављене циљеве. Овај други дијаграм сажима велики број теорија учења и подучавања, почев од конструктивистичких теорија с почетка 20. века, па до новијих модела попут реверзибилног откривања, индиректног учења и сл. Ученик само својим учењем конструише знање, наставник само помаже и подстиче ту конструкцију.

ЛИТЕРАТУРА

[1] M. Boardman, *The Egg-drop numbers*, Mathematics Magazine, **77** (5) (2004), 368–372.

[2] M. Brown, P. Brown, T. Bibby, *'I would rather die': reasons given by 16-year-olds for not continuing their study of mathematics*, Research in Mathematics Education, **10** (1) (2008), 3–18.

[3] M. Delazer, F. Domahs, L. Bartha, C. Brenneis, A. Lochy, T. Trieb, T. Benke, *Learning complex arithmetic—an fMRI study*, Cognitive Brain Research, **18** (1) (2003), 76–88.

[4] M. Delazer, F. Domahs, L. Bartha, C. Brennis, A. Lochy, T. Trieb, *The acquisition of arithmetic knowledge – An FMRI study*, Cortex, **40** (1) (2004), 166–167.

[5] S. Devadas, *Programming for the Puzzled, Puzzle 4: Please Do Break the Crystal*, MIT OpenCourseWare, 2018, `https://www.youtube.com/watch?v=Fp7usgx_CvM&t=2s`

[6] S. A. Griffin, R. Case, R. S. Siegler, *Rightstart: Providing the central conceptual prerequisites for first formal learning of arithmetic to students at risk for school failure*, in K. McGilly (Ed.), *Classroom lessons: Integrating cognitive theory and classroom practice*, The MIT Press, 1994, 25–49.

[7] P. R. Halmos, *The heart of Mathematics*, The American Mathematical Monthly, **87** (7) (1980), 519–524.

[8] J. D. E. Konhauser, D. Velleman, S. Wagon, *Which Way Did the Bicycle Go?: And Other Intriguing Mathematical Mysteries*, The Mathematical Association of America, 1997.

[9] N. M. McNeil, N. C. Jordan, A. A. Viegut, D. Ansari, *What the science of learning teaches us about arithmetic fluency*, Psychological Science in the Public Interest, **26** (1) (2025), 10–57.

[10] G. Polya, *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*, Princeton University Press, 2014.

[11] R. R. Skemp, *The Psychology of Learning Mathematics*, Routledge, 1987.

[12] X. Zhou, *A Practical Guide To Quantitative Finance Interviews*, CreateSpace Independent Publishing Platform, 2008

Математички факултет, Београд

`nebojsa.ikodinovic@matf.bg.ac.rs`