НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ
LXX, 1-2 (2025), 1–18

Др Миодраг Матељевић, др Марек Светлик

ПОЈАМ ПОВРШИНЕ И ЗАПРЕМИНЕ

1. Увод

Површина и *запремина* спадају међу најстарије математичке појмове. Интуитивно ове појмове можемо схватити као нумеричку карактеристику геометријских фигура, површи и тела. На пример, грубо говорећи, површину фигуре у равни можемо схватити као број јединичних квадрата од којих се та фигура састоји. При томе, јединични квадрат јесте квадрат чије странице имају дужину 1. Слично, запремину тела можемо схватити као број јединичних коцака од којих се то тело састоји. При томе, јединична коцка јесте коцка чије ивице имају дужину 1.

Формална и у потпуности коректна дефиниција површине и запремине није једноставна. Површина фигура у равни (фигуре можемо видети као одређене подскупове скупа $\mathbb{R}^2$) може се дефинисати као дводимензионална Лебегова или Жорданова мера. Следствено, запремина тела у простору (тела можемо видети као одређене подскупове скупа $\mathbb{R}^3$) може се дефинисати као тродимензионална Лебегова или Жорданова мера. Користећи дефиницију површине фигуре у равни можемо дефинисати и површину површи у простору.

2. Површина фигура у равни

2.1. Површина правоугаоника. Ако су a и b дужине страница и P површина правоугаоника онда је $P = ab$. Специјално, површина квадрата чија страница има дужину a јесте a^2. Природно се намеће питање: Можемо ли ову формулу извести из неких других једноставнијих? Ако на пример погледамо дефиницију Лебегове мере на $\mathbb{R}^2$ (видети нпр. [1]) видимо да се по дефиницији узима да је Лебегова мера правоугаоника $[a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$, тј. правоугаоника чија темена имају координате (a_1, a_2), (b_1, a_2), (b_1, b_2) и (a_1, b_2), где су $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ такви да је $a_1 < a_2$ и $b_1 < b_2$, једнака $(a_2 - a_1) \cdot (b_2 - b_1)$. Стога можемо узети и да је површина правоугаоника чије странице имају дужине a и b једнака ab по дефиницији.

Излагање на ову тему аутори су одржали на Државном семинару о настави математике и рачунарства, фебруара 2024. године у Београду.

2.2. Површина паралелограма. Видели смо да ако су познате дужине страница правоугаоника онда једноставно можемо одредити и површину тог правоугаоника. То не важи за произвољни паралелограм. Прецизније, ако су познате дужине страница (произвољног) паралелограма то није довољно да одредимо и површину тог паралелограма. У том циљу размотримо следећи задатак.

Задатак 1. Одредити површину

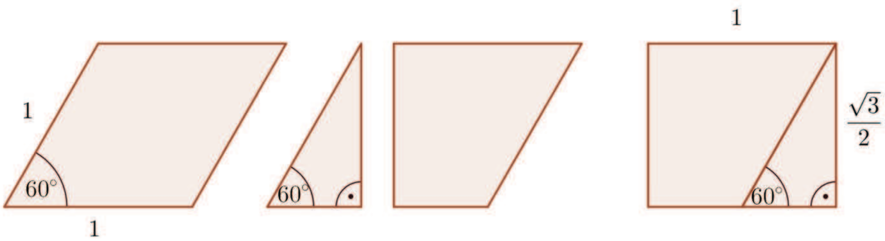
а) квадрата странице 1;

б) ромба чија страница има дужину 1 и чији је један унутрашњи угао једнак 60°.

Решење.

а) Површина квадрата странице 1 јесте 1.

б) Површину P ромба чија је страница дужине 1 и чији је један унутрашњи угао једнак 60° можемо одредити користећи адитивност површине (в. слику 1). Важи $P = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\triangle$.



Слика 1. Површина ромба

Задатак 1 показује да постоје паралелограми $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ такви да је $AB = A_1B_1 = a$ и $BC = B_1C_1 = b$ а површине им нису једнаке. Осим тога, на основу дела б) тог задатка можемо закључити и како се у општем случају рачуна површина паралелограма ако су познате дужине странице и одговарајуће висине. Ако су a дужина странице, h_a дужина одговарајуће висине и P површина паралелограма онда је $P = ah_a$.

Размотримо и следећи задатак, који нам се на први поглед може учинити као добра илустрација формуле за површину паралелограма ако су дате дужина странице и дужина одговарајуће висине тог паралелограма.

Задатак 2. Одредити дужину странице ромба, ако је дужина висине тог ромба $h = 6$ а површина $P = 24$.

Решење. Нека је дужина странице ромба једнака a. Како је $P = ah$ следи да је $a = \dfrac{P}{h}$ односно $a = 4$. На први поглед задатак је веома једноставан. Да бисмо га решили довољно је да поделимо два природна броја (наравно, ако знамо формулу за површину ромба). Међутим, ако мало анализирамо решење можемо закључити да је дужина странице ромба краћа од дужине висине ромба. А то је немогуће. Дакле решење које смо добили није добро. Тачно решење била би констатација да такав ромб не постоји. $\triangle$

Приметимо још да смо приликом извођења формуле за површину паралелограма користили адитивност површине фигура. Ово својство површине фигура користићемо и за извођење других формула.

2.3. Површина троугла. Од два подударна троугла можемо формирати паралелограм. Отуда ако су a дужина странице троугла, h_a дужина одговарајуће висине и P површина троугла онда је $P = \frac{ah_a}{2}$. Површину троугла можемо израчунати и ако су познате дужине свих страница троугла[1]. Ако су a, b и c дужине странице троугла, P површина троугла и $s = \frac{a+b+c}{2}$ онда је $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.[2]

Уопште, јасно је да ако неки елементи троугла (странице или углови) јединствено одређују тај троугао онда на основу нумеричких карактеристика тих елемената (дужина страница и мера углова) можемо израчунати и површину тог троугла.

Тако на пример, за сваки од ставова подударности троуглова имамо одговарајућу формулу за површину троугла. Већ смо навели формулу која одговара ставу ССС (страница-страница-страница). Ако су дате дужине две странице a и b и мера угла γ који одређују те две странице онда је на основу става СУС (страница-угао-страница) тај троугао јединствено одређен и његова површина јесте $P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$. Ако су дате дужина странице a и мере углова β и γ налеглих на ту страницу онда је на основу става УСУ (угао-страница-угао) тај троугао јединствено одређен и његова површина јесте $P = \frac{1}{2}a^2\frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$. Коначно, ако су дате дужине две странице a и b ($a > b$) и мера угла α наспрам странице a онда је на основу става ССУ (страница-страница-угао) тај троугао јединствено одређен и његова површина јесте $P = \frac{1}{2}b\sin\alpha\left(\sqrt{a^2 - b^2\sin^2\alpha} + b\cos\alpha\right)$. Извођење ове четири формуле за површину троугла остављамо читаоцима.

Насупрот томе, постоји бесконачно много неподударних троуглова чија је једна страница дужине a и одговарајућа висина дужине h_a и сви они имају једнаку површину.

2.4. Површина многоугла. Површина фигуре која се може раставити на коначан број троуглова једнака је збиру површина тих троуглова (на основу својства адитивности површине). Како се сваки n-тоугао може раставити на $n-2$ троуглова, следи да површину многоугла можемо одредити тако што одредимо површине троуглова на које се тај многоугао раставља.

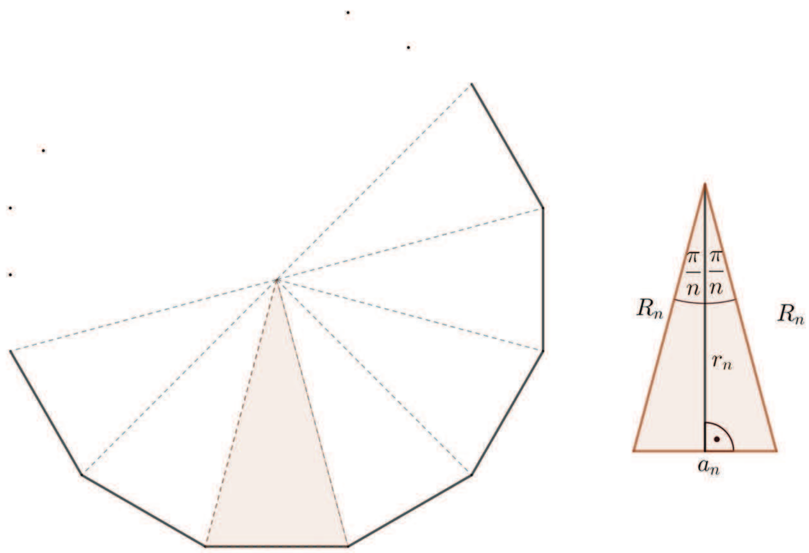
[1] Видели смо да за четвороугао то није могуће; за разлику од четвороугла, троугао је јединствено одређен дужином својих страница.

[2] Формула је позната као Херонов образац; не обрађује се у редовној настави у основним школама у Републици Србији.

Посебно, ако је дата дужина странице a_n или дужина полупречника уписаног круга r_n или дужина полупречника описаног круга R_n правилног n-тоугла онда можемо одредити површину P_n тог n-тоугла. Важи

$$P_n = n\frac{a_n^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n} = nr_n^2\operatorname{tg}\frac{\pi}{n} = n\frac{R_n^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n}. \tag{1}$$

Заиста, карактеристични троугао овог n-тоугла јесте једнакокраки троугао чија је основица дужине a_n, краци дужине R_n, висина која одговара основици дужине r_n и угао при врху $\dfrac{2\pi}{n}$ (слика 2).



Слика 2. Површина правилног n-тоугла

Површина тог троугла, с једне стране, једнака је $\frac{1}{2}R_n^2\sin\frac{2\pi}{n}$, а с друге стране $\frac{1}{2}a_n r_n$. Отуда, узимајући у обзир да је $\frac{a_n}{2r_n} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$ добијамо одговарајуће формуле.

Специјално, површина правилног петоугла чија је страница дужине a јесте $P = \frac{5a^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{5}$.

2.5. Површина круга. Нека је дат круг k полупречника r. Посматрајмо правилне n-тоуглове уписане у круг k и правилне n-тоуглове описане око круга k. Обележимо са $P_u(n,r)$ површину правилног n-тоугла уписаног у круг k, а са $P_o(n,r)$ површину правилног n-тоугла описаног око круга k. На основу (1) важи $P_u(n,r) = n\frac{r^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$ и $P_o(n,r) = nr^2\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$. Јасно је да за површину круга k, коју можемо обележити са $P(r)$, морају важити неједнакости

$$P_u(n,r) \leqslant P(r) \leqslant P_o(n,r). \tag{2}$$

Може се показати да је низ $P_u(n,r)$ монотоно растући, а низ $P_o(n,r)$ монотоно опадајући. Осим тога важи

$$\lim_{n\to\infty} P_u(n,r) = \lim_{n\to\infty} n\frac{r^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n} = r^2\pi$$

и

$$\lim_{n\to\infty} P_o(n,r) = \lim_{n\to\infty} nr^2 \operatorname{tg}\frac{\pi}{n} = r^2\pi.$$

Стога, узимајући у обзир (2), добијамо $P(r) = r^2\pi$.

2.6. Површина криволинијског трапеза. Нека је $f : [a,b] \to [0,+\infty)$ непрекидна функција и нека је

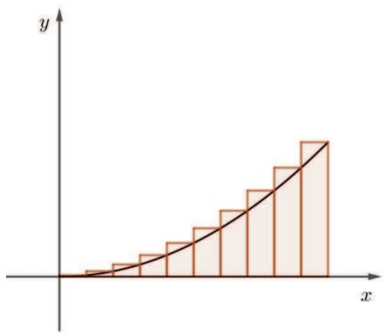
$$\Phi = \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\,\}.$$

Како се дефинише, односно чему је једнака површина фигуре Φ?[3] На пример, чему је једнака површина фигуре Φ, ако је $f : [0,1] \to [0,+\infty)$ функција дефинисана са $f(x) = x^2$?

Старогрчки математичар Архимед је површину скупа Φ израчунао спроводећи поступак чију осавремењену верзију приказујемо у наставку излагања.

Нека је $n \in \mathbb{N}$. Поделимо интервал $[0,1]$ тачкама $x_k = \dfrac{k}{n}$, $0 \leqslant k \leqslant n$ и посматрајмо правоугаонике $P_k = [x_{k-1}, x_k] \times [0, f(x_k)]$, $1 \leqslant k \leqslant n$ (слика 3). Ако је S_n сума површина свих правоугаоника P_k онда је

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1}).$$



Слика 3. Правоугаоници P_k

Како је $f(x_k) = \left(\dfrac{k}{n}\right)^2$ и $x_k - x_{k-1} = \dfrac{1}{n}$ следи

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2 \\ &= \frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{1}{6}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)\Big(2+\frac{1}{n}\Big). \end{aligned}$$

Како је $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, на основу правила за лимес збира и производа, закључујемо да је $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{3}$.

С друге стране, ако знамо интеграле и Њутн-Лајбницову формулу, једноставно добијамо да је површина фигуре Φ једнака

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\bigg|_{x=0}^{1} = \frac{1}{3}.$$

[3] Фигура Φ назива се и криволинијски трапез.

Како можемо извести Њутн-Лајбницову формулу? Односно, како можемо показати да је површина фигуре Φ једнака $F(b)-F(a)$, при чему је F примитивна функција функције f?

За $t \in [a,b]$ дефинишемо

$$A(t) = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant x \leqslant t, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\,\}.$$

Обележимо са $P(t)$ површину фигуре $A(t)$.

Приметимо да је $P : [a,b] \to [0,+\infty)$. Специјално, $P(a) = 0$ а $P(b)$ је површина скупа Φ (јер је $A(b) = \Phi$).

Даље, нека је $t \in [a,b)$ фиксирано и $h > 0$ такво да $t+h \in [a,b]$. Осим тога, нека је

$$M = \max_{t \leqslant x \leqslant t+h} f(x) \quad \text{и} \quad m = \min_{t \leqslant x \leqslant t+h} f(x).$$

Тада (због непрекидности функције f) постоје $0 \leqslant \theta_1, \theta_2 \leqslant 1$ такви да је

$$M = f(t+\theta_1 h) \quad \text{и} \quad m = f(t+\theta_2 h).$$

Јасно је да важи

$$f(t+\theta_2 h)h = mh \leqslant P(t+h) - P(t) \leqslant Mh = f(t+\theta_1 h)h.$$

Отуда је

$$f(t+\theta_2 h) \leqslant \frac{P(t+h)-P(t)}{h} \leqslant f(t+\theta_1 h),$$

а самим тим и

$$\lim_{h\to 0+} f(t+\theta_2 h) \leqslant \lim_{h\to 0+} \frac{P(t+h)-P(t)}{h} \leqslant \lim_{h\to 0+} f(t+\theta_1 h),$$

тј.

$$f(t) \leqslant P'(t) \leqslant f(t).$$

Аналогно, разматрајући фиксирано $t \in (a,b]$ и $h > 0$ такво да $t-h \in [a,b]$ може се добити

$$f(t) \leqslant P'(t) \leqslant f(t).$$

Дакле, за свако $t \in [a,b]$ важи

$$P'(t) = f(t).$$

Другим речима функција P је примитивна функција (неодређени интеграл) функције f. Штавише, P није било која примитивна функција функције f, већ она примитивна функција чија је вредност у тачки a једнака 0 (видели смо да је $P(a) = 0$).

Дакле, $P(t) = F(t)-F(a)$, где је F произвољна примитивна функција функције f.

Коначно, како је с једне стране $P(b)$ површина фигуре Φ, а с друге стране $P(b) = F(b) - F(a)$ добијамо да је површина фигуре Φ једнака $F(b) - F(a)$.

3. Запремина тела у простору

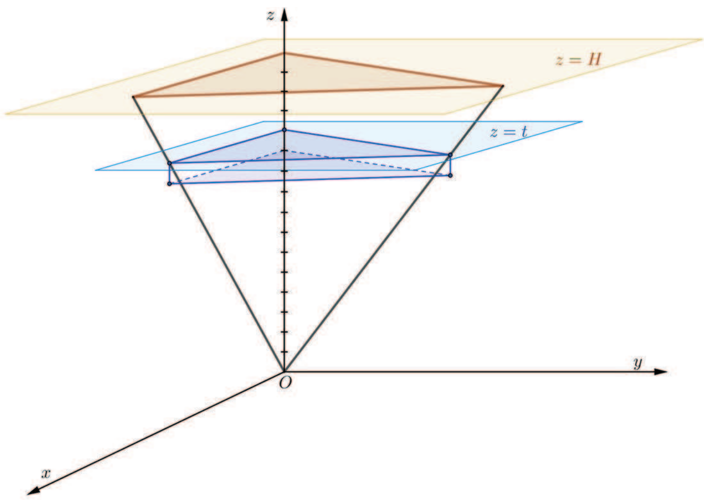
3.1. Запремина призме. Ако су a, b и c дужине ивица и V запремина квадра онда је $V = abc$. Слично, као и код одговарајуће формуле за површину правоугаоника и ову формулу за запремину квадра можемо узети за дефиницију запремине квадра. Следствено, можемо узети да је запремина коцке чија ивица има дужину a по дефиницији једнака a^3. Даље, аналогно као што смо извели формуле за површине многоуглова можемо показати да је запремина призме чија основа има површину B а висина дужину H једнака BH.

3.2. Запремина пирамиде. Прикажимо како је могуће израчунати запремину пирамиде чија основа има површину B, а висина дужину H.

Претпоставимо да је пирамида Φ смештена у координатни систем $Oxyz$ тако да основа пирамиде припада равни $z = H$ а врх је координатни почетак.

Нека је $0 \leqslant t \leqslant H$. Са $F(t)$ обележимо пресек пирамиде Φ са равни $z = t$, а са $B(t)$ површину фигуре $F(t)$. Фигура $F(t)$, при чему је $0 < t \leqslant H$ слична је фигури $F(H)$ (основа пирамиде) са коефицијентом сличности $\dfrac{t}{H}$. Стога је $B(t) = \dfrac{t^2}{H^2}B$. Даље, можемо поступити на два начина.

Први начин јесте спровођење Архимедовог поступка. У том циљу нека је $n \in \mathbb{N}$. Поделимо интервал $[0, H]$ тачкама $z_k = H\dfrac{k}{n}$, $0 \leqslant k \leqslant n$. За фиксирано $k \in \{1, \ldots, n\}$ уочимо призму $\Pi_k = D(z_k) \times [z_{k-1}, z_k]$, где је $D(z_k)$ ортогонална пројекција фигуре $F(z_k)$ на раван Oxy (слика 4).



Слика 4. Израчунавање запремине пирамиде

Запремина призме Π_k једнака је $B(z_k)(z_k - z_{k-1})$. Стога, ако са V_n обележимо суму запремина призми Π_k, $k \in \{1, \ldots, n\}$ добијамо

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} B(z_k)(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k^2}{H^2} \cdot B \cdot \frac{H}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2} \cdot B \cdot \frac{H}{n}$$
$$= \frac{BH}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 = BH \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}.$$

Како је $\lim_{n\to\infty} V_n = \frac{1}{3}BH$ добијамо да је запремина пирамиде $V = \frac{1}{3}BH$.

Други начин јесте примена интеграла. На тај начин добијамо да је запремина пирамиде

$$V = \int_0^H B(t)\,dt = H^{-2}B \int_0^H t^2 dt = \frac{1}{3}BH.$$

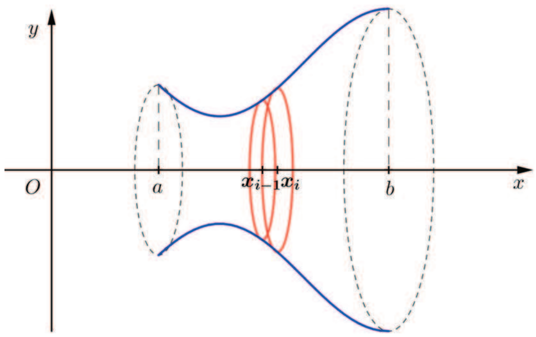
4. Запремина и површина ротационих тела

.

Нека је $f : [a, b] \to [0, +\infty)$ непрекидна функција и нека је

$$F = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y \leqslant f(x) \,\}.$$

Ротацијом фигуре F око $x-$осе добија се ротационо тело Φ.



Слика 5. Израчунавање запремине ротационог тела

Уочимо поделу $P : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ интервала $[a, b]$ и „појас“ Π_i ($i \in \{1, \ldots, n\}$) тела Φ између равни $x = x_{i-1}$ и $x = x_i$ (в. слику 5). Нека је

$$m_i = \min_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \quad \text{и} \quad M_i = \max_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x).$$

За запремину $V(\Pi_i)$ „појаса“ Π_i важи

$$\pi m_i^2(x_i - x_{i-1}) \leqslant V(\Pi_i) \leqslant \pi M_i^2(x_i - x_{i-1}).$$

Отуда за запремину $V(\Phi)$ тела Φ важи

$$\pi \sum_{i=1}^{n} m_i^2 (x_i - x_{i-1}) \leqslant V(\Phi) \leqslant \pi \sum_{i=1}^{n} M_i^2 (x_i - x_{i-1}).$$

Међутим, како су $\pi \sum\limits_{i=1}^{n} m_i^2 (x_i - x_{i-1})$ и $\pi \sum\limits_{i=1}^{n} M_i^2 (x_i - x_{i-1})$ доња односно горња Дарбуова сума функције πf^2 при подели P а функција πf^2 интеграбилна следи да је запремина $V(\Phi)$ тела Φ једнака

$$V(\Phi) = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx. \tag{3}$$

Додатно, ако је функција f диференцијабилна на (a, b) показује се (видети нпр. [2]) да за површину омотача тела Φ коју обележавамо са $S(\Phi)$ важи

$$S(\Phi) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx. \tag{4}$$

4.1. Ваљак. Ако је $R > 0$, $H > 0$ и функција $f : [0, H] \to [0, +\infty)$ дефинисана са $f(x) = R$, онда је одговарајућа фигура F правоугаоник страница H и R, а тело Φ ваљак чији је полупречник основе R, а висина H. Стога, на основу (3), добијамо да је запремина ваљка Φ једнака

$$\pi \int_0^H R^2\, dx = \pi R^2 H,$$

док на основу (4) добијамо да је површина омотача ваљка Φ једнака

$$2\pi \int_0^H R\sqrt{1 + 0^2}\, dx = 2\pi RH.$$

4.2. Купа. Ако је $R > 0$, $H > 0$ и функција $f : [0, H] \to [0, +\infty)$ дефинисана са $f(x) = \dfrac{R}{H}x$, онда је одговарајућа фигура F правоугли троугао чије су катете H и R, а тело Φ купа чији је полупречник основе R, а висина H. Стога, на основу (3), добијамо да је запремина купе Φ једнака

$$\pi \int_0^H \Big(\frac{R}{H}x\Big)^2 dx = \frac{1}{3}\pi R^2 H,$$

док на основу (4) добијамо да је површина омотача купе Φ једнака

$$2\pi \int_0^H \frac{R}{H}x \sqrt{1 + \Big(\frac{R}{H}\Big)^2}\, dx = \pi R\sqrt{H^2 + R^2}.$$

Приметимо да је површина омотача купе једнака површини кружног исечка чији полупречник има дужину $\sqrt{H^2 + R^2}$, а одговарајући кружни лук дужину $2\pi R$.

4.3. Лопта. Ако је $R > 0$ и функција $f : [-R, R] \to [0, +\infty)$ дефинисана са $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ онда је одговарајућа фигура F полукруг полупречника R, а тело Φ лопта полупречника R. Стога, на основу (3), добијамо да је запремина лопте полупречника R једнака

$$\pi \int_{-R}^{R} \left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 dx = \frac{4}{3} R^3 \pi,$$

док на основу (4) добијамо да је површина сфере полупречника R једнака

$$2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2} dx = 4R^2\pi.$$

4.4. Сферна калота. Нека су дате сфера S и раван α такве да је $S \cap \alpha = k$, где је k кружница. *Сферна калота* јесте површ коју чине кружница k и све тачке сфере S које су са исте стране равни α. *Висина сферне калоте* јесте дуж чије су крајње тачке центар кружнице k и пресечна тачка сферне калоте и нормале на раван α у тачки која је центар кружнице k. *Полупречник сферне калоте* јесте полупречник сфере S.

Ако је $R > 0$, $0 < h < 2R$ и функција $f : [R - h, R] \to [0, +\infty)$ дефинисана са $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ онда се ротацијом графика функције f око x-осе добија сферна калота полупречника R и висине h. Стога је површина сферне калоте полупречника R и висине h једнака

$$2\pi \int_{R-h}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2} dx = 2\pi Rh.$$

Приметимо да у граничном случају, када је $h = 2R$, сферна калота постаје сфера.

4.5. Сферни појас. Нека су дате сфера S и две паралелне равни α_1 и α_2 такве да је $S \cap \alpha_1 = k_1$ и $S \cap \alpha_2 = k_2$, где су k_1 и k_2 кружнице. *Сферни појас* јесте површ коју чине кружнице k_1 и k_2 и све тачке сфере S које су између равни α_1 и α_2. *Висина сферног појаса* јесте дуж чије су крајње тачке центри кружница k_1 и k_2. *Полупречник сферног појаса* јесте полупречник сфере S.

Ако је $R > 0$, $-R < a < b < R$ и функција $f : [a, b] \to [0, +\infty)$ дефинисана са $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ онда се ротацијом графика функције f око x-осе добија сферни појас полупречника R и висине $h = b - a$. Стога је површина сферног појаса полупречника R и висине $h = b - a$ једнака

$$2\pi \int_{a}^{b} \sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2} dx = 2\pi R(b - a) = 2\pi Rh.$$

Приметимо да у граничном случају, када је или $b = R$ или $a = -R$, сферни појас постаје сферна калота.

Осим тога, интересантно је да површина сферног појаса зависи само од полупречника и висине сферног појаса (растојања равни α_1 и α_2), а не и од „положаја“ појаса („положаја“ равни α_1 и α_2).

4.6. Одсечак лопте. Нека су дате лопта L и раван α такве да је $L \cap \alpha = K$, где је K круг. *Одсечак лопте* јесте тело које чине круг K и све тачке лопте L које су са исте стране равни α. *Висина одсечка лопте* јесте висина одговарајуће сферне калоте која уз круг K чини границу тог одсечка. *Полупречник одсечка лопте* јесте полупречник лопте L.

Ако је $R > 0$, $0 < h < 2R$ и функција $f : [R-h, R] \to [0, +\infty)$ дефинисана са $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ онда се ротацијом фигуре

$$F = \{\,(x, y) \in \mathbb{R}^2 : R - h \leqslant x \leqslant R, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\,\}.$$

око x-осе добија одсечак лопте полупречника R и висине h. Стога је запремина одсечка лопте полупречника R и висине h једнака

$$\pi \int_{R-h}^{R} \left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 \, dx = \frac{1}{3}\pi h^2 (3R - h).$$

Приметимо да у граничном случају, када је $h = 2R$, одсечак лопте постаје лопта.

4.7. Појас лопте. Нека су дате лопта L и две паралелне равни α_1 и α_2 такве да је $L \cap \alpha_1 = K_1$ и $L \cap \alpha_2 = K_2$, где су K_1 и K_2 кругови. *Појас лопте* јесте површ коју чине кругови K_1 и K_2 и све тачке лопте L које су између равни α_1 и α_2. *Висина појаса лопте* јесте висина одговарајућег сферног појаса који уз кругове K_1 и K_2 чини границу тог појаса лопте. *Полупречник појаса лопте* јесте полупречник лопте L.

Ако је $R > 0$, $-R < a < b < R$ и функција $f : [a, b] \to [0, +\infty)$ дефинисана са $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ онда се ротацијом фигуре

$$F = \{\,(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\,\}.$$

око x-осе добија појас лопте полупречника R и висине $h = b - a$. Полупречници кругова K_1 и K_2 једнаки су редом $r_1 = \sqrt{R^2 - a^2}$ и $r_2 = \sqrt{R^2 - b^2}$. Запремина појаса лопте добијеног ротацијом фигуре F једнака је

$$\begin{aligned}\pi \int_a^b \left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 dx &= \pi(b-a)\Big(R^2 - \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)\Big) \\ &= \pi h\Big(R^2 - \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)\Big).\end{aligned}$$

Приметимо да у граничном случају, када је или $b = R$ или $a = -R$, појас лопте постаје одсечак лопте.

Осим тога, интересантно је да запремина појаса лопте зависи не само од полупречника и висине појаса лопте веће и од „положаја“ појаса („положаја“ равни α_1 и α_2).

Може се показати да је запремина појаса лопте у потпуности одређена висином појаса и полупречницима кругова K_1 и K_2. Прецизније, ако је висина одсечка лопте h, полупречници кругова K_1 и K_2 редом r_1 и r_2 онда је запремина појаса лопте једнака

$$\frac{\pi h}{6}\left(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2\right).$$

Заиста, како је $a^2 = R^2 - r_1^2$ и $b^2 = R^2 - r_2^2$ и како је $ab = \dfrac{1}{2}\Big(a^2 + b^2 - (b-a)^2\Big)$ добијамо

$$\pi h\Big(R^2 - \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)\Big) = \frac{\pi h}{6}\left(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2\right).$$

4.8. Торус. Нека је $0 < r < R$ и k кружница чија је једначина у Oxy равни: $x^2 + (y - R)^2 = r^2$. *Торус* је површ која настаје ротацијом кружнице k око x-осе. Приметимо да се приликом те ротације центар кружнице k (чији је полупречник r) креће по кружници чији је полупречник R. Кружница k назива се *генератриса торуса*, а кружница по којој се креће центар кружнице k назива се *директриса торуса*.

Нека је

$$F_1 = \Big\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -r \leqslant x \leqslant r, 0 \leqslant y \leqslant R + \sqrt{r^2 - x^2} \Big\}$$

и нека је Φ_1 тело које настаје ротацијом фигуре F_1 око x-осе. Даље, нека је

$$F_2 = \Big\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -r \leqslant x \leqslant r, 0 \leqslant y \leqslant R - \sqrt{r^2 - x^2} \Big\}$$

и нека је Φ_2 тело које настаје ротацијом фигуре F_2 око x-осе.

Запремина тела чија је граница торус (а које такође називамо торус) чија је генератриса кружница полупречника r, а директриса кружница полупречника R јесте

$$\begin{aligned} V(\Phi_1) - V(\Phi_2) &= \pi \int_{-r}^{r} \Big(R + \sqrt{r^2 - x^2}\Big)^2 dx \\ &\quad - \pi \int_{-r}^{r} \Big(R - \sqrt{r^2 - x^2}\Big)^2 dx = (r^2\pi) \cdot (2R\pi). \end{aligned}$$

Приметимо да је запремина торуса једнака запремини правог кружног ваљка чија је основа круг чији је полупречник једнак полупречнику генератрисе, а висина једнака дужини директрисе торуса.

Површина торуса јесте

$$\begin{aligned} S(\Phi_1) + S(\Phi_2) &= 2\pi \int_{-r}^{r} \Big(R + \sqrt{r^2 - x^2}\Big) \sqrt{1 + \Big(-\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\Big)^2}\, dx \\ &\quad + 2\pi \int_{-r}^{r} \Big(R - \sqrt{r^2 - x^2}\Big) \sqrt{1 + \Big(\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\Big)^2}\, dx \\ &= (2\pi R) \cdot (2\pi r). \end{aligned}$$

Приметимо да је површина торуса једнака површини омотача правог кружног ваљка чија је основа круг чији је полупречник једнак полупречнику генератрисе, а висина једнака дужини директрисе торуса.

4.9. Торичелијева труба. Торичелијева труба јесте тело које настаје ротацијом фигуре

$$F = \Big\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leqslant x < +\infty, 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{x} \Big\}$$

око x-осе. Торичелијева труба јесте тело које има коначну запремину и чија граница има бесконачну површину. Заиста, ако са V обележимо запремину а са S површину границе Торичелијеве трубе онда је

$$V = \pi \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \pi$$

и

$$S = \pi + 2\pi \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\,dx \geqslant \pi + 2\pi \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = +\infty.$$

Неки математичари сматрају да је Торичелијева труба парадоксно тело. Наиме, како је површина њене границе бесконачна следи да је потребна бесконачна количина боје да би се та граница обојила. С друге стране у такву трубу, када се у потпуности напуни, стаје коначна количина боје која ће свакако обојити њену унутрашњост.

5. Запремина тела у $\mathbb{R}^3$

У секцији 3 приказали смо како можемо израчунати запремине призме и пирамиде ако су познате површине њихових основа и дужине њихових висина, а у секцији 4 приказали смо како помоћу интегралног рачуна можемо рачунати запремине ротационих тела.

У Математичкој анализи дефинишемо Жордан-мерљиве скупове у $\mathbb{R}^3$, као и Жорданову меру таквих скупова. Укратко, за ограничен скуп $E \subset \mathbb{R}^3$ кажемо да је Жордан-мерљив ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји највише пребројива фамилија квадара таква да је скуп ∂E (граница скупа E) подскуп уније чланова те фамилије и сума запремина свих чланова те фамилије је мања од ε. Жорданова мера скупа E по дефиницији је једнака

$$\iiint_E dx\,dy\,dz.$$

Запремину тела T у $\mathbb{R}^3$ можемо дефинисати, на пример, као Жорданову меру скупа T. Имајући у виду такву дефиницију запремине можемо урадити следеће задатке.

Задатак 3. Нека је $R > 0$. Израчунати запремину $V(B)$ лопте

$$B = \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2\,\}.$$

Решење. Имамо да је

$$V(B) = \iiint_B dx\,dy\,dz.$$

Након увођења смене $x = \rho\cos\varphi\cos\theta$, $y = \rho\cos\varphi\sin\theta$, $z = \rho\sin\varphi$, при чему $0 \leqslant \rho \leqslant R$, $-\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, применом Фубинијеве теореме (за детаље видети, на пример, [3]) добијамо

$$\begin{aligned}\iiint_B dx\,dy\,dz &= \iiint_{[0,R]\times[-\pi/2,\pi/2]\times[0,2\pi]} \rho^2\cos\varphi d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi}\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho^2\cos\varphi d\varphi\right)d\theta\right)d\rho = \frac{4}{3}\pi R^3. \quad \triangle\end{aligned}$$

Задатак 4. Израчунати запремину $V(\Pi)$ пирамиде

$$\Pi = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0 \}.$$

Решење. Имамо да је

$$V(\Pi) = \iiint_\Pi dx\, dy\, dz.$$

Применом Фубинијеве теореме добијамо да је

$$\iiint_\Pi dx\, dy\, dz = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} 1 dz \right) dy \right) dx = \frac{1}{6}. \quad \triangle$$

Задатак 5. Израчунати запремину $V(C)$ тела

$$C = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \geqslant 0, z \leqslant y^2, 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1 \}.$$

Решење. Важи

$$V(C) = \iiint_C dx\, dy\, dz = \iint_{[0,1]\times[0,1]} y^2\, dx\, dy = \frac{1}{3}. \quad \triangle$$

6. Површина површи у $\mathbb{R}^3$

У секцији 4 приказали смо како можемо израчунати површину ротационе површи. Сада ћемо приказати како можемо рачунати површину и неких других класа површи.

У Математичкој анализи (видети, на пример, [3]) дводимензионалну глатку елементарну површ у $\mathbb{R}^3$ дефинишемо на следећи начин. Скуп $S \subset \mathbb{R}^3$ је дводимензионална глатка елементарна површ ако постоји пресликавање

$$f = (f_1, f_2, f_3) : (a,b) \times (c,d) \to S$$

које има следећа својства[4]

1° f и f^{-1} су непрекидне бијекције;

2° f је непрекидно диференцијабилно;

3° за свако $(u,v) \in (a,b)\times(c,d)$ важи $\dfrac{\partial f}{\partial u}(u,v) \times \dfrac{\partial f}{\partial v}(u,v) \neq (0,0,0)$ (тј. векторски производ вектора $\left(\dfrac{\partial f_1}{\partial u}, \dfrac{\partial f_2}{\partial u}, \dfrac{\partial f_3}{\partial u}\right)(u,v)$ и $\left(\dfrac{\partial f_1}{\partial v}, \dfrac{\partial f_2}{\partial v}, \dfrac{\partial f_3}{\partial v}\right)(u,v)$ различит је од нула вектора).

Пресликавање f називамо *параметризацијом* површи S.

Пример 1. (Полусфера полупречника R) Нека је $R > 0$ и нека је $S = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z > 0 \}$. Скуп S је дводимензионална глатка елементарна површ. Заиста, нека је $f : (0,\pi)\times(0,\pi) \to S$ дефинисано са

$$f_1(u,v) = R\cos u, \quad f_2(u,v) = R\sin u \cos v, \quad f_3(u,v) = R\sin u \sin v.$$

[4]Уместо производа интервала $(a,b)\times(c,d)$ за домен пресликавања f можемо узети било који скуп хомеоморфан са $(a,b)\times(c,d)$.

Непосредно се проверава да пресликавање f има својства $1°$–$3°$, тј. пресликавање f јесте једна параметризација површи S.

Осим тога, пресликавање f није једина параметризација површи S. Нека је $D = \{\, (u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < R^2 \,\}$. Пресликавање $g : D \to S$ дефинисано са

$$g_1(u, v) = u \quad g_2(u, v) = v \quad g_3(u, v) = \sqrt{R^2 - u^2 - v^2}$$

има својства $1°$–$3°$ и јесте параметризација површи S, такође.

Како можемо одредити површину $P(S)$ дводимензионалне глатке елементарне површи S?

Како бисмо укратко приказали како се дефинише та површина, претпоставимо додатно да је пресликавање f дефинисано и непрекидно диференцијабилно на $[a, b] \times [c, d]$. Уочимо поделе $a = u_0 < u_1 < \ldots < u_n = b$ и $c = v_0 < v_1 < \ldots < v_m = d$ интервала $[a, b]$ односно $[c, d]$ и апроксимирајмо пресликавање f део по део линеарним пресликавањем. Идеја је да, грубо говорећи, „мале делове“ површи апроксимирамо паралелограмима. Апроксимацију спроводимо на следећи начин: на сваком од правоугаоника $[u_{i-1}, u_i) \times [v_{i-1}, v_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m$ дефинишемо пресликавање l_{ij} $(i \in \{1, \ldots, n\},\ j \in \{1, \ldots, m\})$ такво да је

$$l_{ij}(u, v) = f(u_{i-1}, v_{j-1}) + \frac{\partial f}{\partial u}(u_{i-1}, v_{j-1})(u - u_{i-1}) + \frac{\partial f}{\partial v}(u_{i-1}, v_{j-1})(v - v_{j-1}).$$

Пресликавањем l_{ij} правоугаоник $[u_{i-1}, u_i) \times [v_{j-1}, v_j)$ пресликава се на паралелограм R_{ij} чије странице имају дужине

$$|f_u(u_{i-1}, v_{j-1})|(u_i - u_{i-1}) \quad \text{и} \quad |f_v(u_{i-1}, v_{j-1})|(v_j - v_{j-1}).$$

Површина паралелограма R_{ij} јесте интензитет векторског производа вектора $\frac{\partial f}{\partial u}(u_{i-1}, v_{j-1})(u_i - u_{i-1})$ и $\frac{\partial f}{\partial v}(u_{i-1}, v_{j-1})(v_j - v_{j-1})$ односно важи

$$P(R_{ij}) = \left| \frac{\partial f}{\partial u}(u_{i-1}, v_{j-1})(u_i - u_{i-1}) \times \frac{\partial f}{\partial v}(u_{i-1}, v_{j-1})(v_j - v_{j-1}) \right|.$$

тј.

$$P(R_{ij}) = \left| \frac{\partial f}{\partial u}(u_{i-1}, v_{j-1}) \times \frac{\partial f}{\partial v}(u_{i-1}, v_{j-1}) \right| (u_i - u_{i-1})(v_j - v_{j-1}).$$

Отуда површину $P(S)$ површи S можемо дефинисати као граничну вредност суме

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |f_u(u_{i-1}, v_{j-1}) \times f_v(u_{i-1}, v_{j-1})|(u_i - u_{i-1})(v_j - v_{j-1}),$$

кад параметри подела интервала $[a, b]$ и $[c, d]$ теже нули.[5] Испоставља се да при наведеним условима та гранична вредност постоји и једнака је

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} |f_u(u, v) \times f_v(u, v)|\, du\, dv.$$

[5] Параметар поделе $P : a = t_0 < \ldots < t_n = b$ интервала $[a, b]$ јесте $\lambda(P) = \max\limits_{i \in \{1, \ldots n\}} (t_i - t_{i-1})$.

Дакле,

$$P(S) = \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} |f_u(u,v) \times f_v(u,v)|\, du\, dv.$$

Може се показати (ми то овде нећемо чинити) да површина дводимензионалне глатке елементарне површи не зависи од параметризације те површи.

Пример 2. (Површина полусфере полупречника R). На основу примера 1 имамо да је скуп $S = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = R^2, z > 0 \}$ дводимензионална глатка елементарна површ чија је једна параметризација пресликавање $f = (f_1, f_2, f_3) : (0,\pi) \times (0,\pi) \to S$ дефинисано са

$$f_1(u,v) = R\cos u, \quad f_2(u,v) = R\sin u \cos v, \quad f_3(u,v) = R \sin u \sin v.$$

Непосредно можемо израчунати да је

$$\left| \frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) \right| = R^2 \sin u.$$

Стога је

$$\begin{aligned} P(S) &= \iint\limits_{[0,\pi]\times[0,\pi]} \left| \frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) \right| du\, dv = \iint\limits_{[0,\pi]\times[0,\pi]} R^2 \sin u\, du\, dv \\ &= R^2 \int_0^\pi \left(\int_0^\pi \sin u\, du \right) dv = 2\pi R^2. \end{aligned}$$

Површину $P(S)$ можемо израчунати користећи и параметризацију $g : D \to S$ површи S дату у примеру 1. Тада је

$$\left| \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) \right| = \frac{R}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}}$$

и[6]

$$P(S) = \iint_{\overline{D}} \left| \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) \right| du\, dv = \iint_{\overline{D}} \frac{R}{\sqrt{R^2-u^2-v^2}}\, du\, dv = 2\pi R^2.$$

Приметимо да у случају кад за параметризацију површи S узмемо пресликавање g оно јесте непрекидно диференцијабилно на D, али није на $\overline{D}$. Штавише, $\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v)$ и $\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v)$ нису дефинисани за $(u,v) \in \overline{D} \setminus D$, али

$$\iint_{\overline{D}} \left| \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) \right| du\, dv$$

ипак постоји (у несвојственом смислу[7]). $\triangle$

[6] $\overline{D} = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leqslant R^2\}$

[7] У овом раду нећемо се детаљније бавити овим феноменом.

Нека је $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ пресликавање дефинисано са

$$\langle (x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)\rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2,$$

тј. стандардни скаларни производ у $\mathbb{R}^3$. Даље, ако је

$$E(u,v) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}(u,v), \frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\right\rangle,\quad F(u,v) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}(u,v), \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\right\rangle,$$
$$G(u,v) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial v}(u,v), \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\right\rangle,$$

једноставно се може показати да је $\left|\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\right| = \sqrt{EG-F^2}$. Стога је

$$P(S) = \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} \sqrt{(EG-F^2)(u,v)}\,du\,dv.$$

Иначе, функције E, F и G називају се Гаусови коефицијенти површи S.

Полазећи од дефиниције површине дводимензионалне глатке елементарне површи можемо дефинисати и површину дводимензионалне глатке површи. На пример, ако је површ σ коначна дисјунктна унија глатких елементарних површи $S_1,\dots,S_n$, глатких кривих $\gamma_1,\dots,\gamma_m$ и тачака $p_1,\dots,p_l$ онда је површина површи S једнака збиру површина елементарних површи $S_1,\dots,S_n$. Примери таквих површи су сфера и торус.

Задатак 6. Израчунати површину сфере чији је полупречник R.

Решење. Нека је $\sigma = \{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = R^2\,\}$. Тада је σ дисјунктна унија глатке елементарне површи S чија је параметризација пресликавање $f : (0,\pi)\times(0,2\pi) \to \mathbb{R}^3$ дато са $f(u,v) = (R\sin u\cos v, R\sin u\sin v, R\cos u)$, глатке криве L чија је параматризација пресликавање $\gamma : (0,\pi) \to \mathbb{R}^3$ дато са $\gamma(t) = (R\sin t, 0, R\cos t)$, као и тачака $(0,0,R)$ и $(0,0,-R)$. Стога је површина $P(\sigma)$ површи σ једнака површини $P(S)$ површи S. Дакле, како је $E(u,v) = R^2$, $F(u,v) = 0$ и $G(u,v) = R^2\sin^2 u$ добијамо

$$P(\sigma) = \iint\limits_{[0,\pi]\times[0,2\pi]} \sqrt{(EG-F^2)(u,v)}\,du\,dv = \iint\limits_{[0,\pi]\times[0,2\pi]} R^2\sin u\,du\,dv = 4\pi R^2. \quad \triangle$$

Задатак 7. Израчунати површину торуса чија је директриса кружница полупречника R, а генератриса кружница полупречника r $(0<r<R)$.

Решење. Нека је τ торус чија је директриса $\{\,(x,y,0)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = R^2\,\}$ а генератриса $\{\,(0,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (y-R)^2+z^2 = r^2\,\}$. Тада је τ дисјунктна унија глатке елементарне површи T чија је параметризација пресликавање $f : (0,2\pi)\times(0,2\pi) \to \mathbb{R}^3$ дато са $f(u,v) = ((R+r\cos u)\cos v, (R+r\cos u)\sin v, r\sin u)$, глатке криве L_1 чија је параметризација $\gamma_1 : (0,2\pi) \to \mathbb{R}^3$ дата са $\gamma_1(t) = ((R+r)\cos t, (R+r)\sin t, 0)$, глатке криве L_2 чија је параметризација $\gamma_2 : (0,2\pi) \to \mathbb{R}^3$ дата са $\gamma_2(t) = (0, R+r\cos t, r\sin t)$, као и тачке $(0, R+r, 0)$. Стога је површина

$P(\tau)$ површи τ једнака површини $P(T)$ површи T. Дакле, како је $E(u,v) = r^2$, $F(u,v) = 0$ и $G(u,v) = (R + r\cos u)^2$ добијамо

$$\begin{aligned} P(\tau) &= \iint\limits_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]} \sqrt{(EG - F^2)(u,v)}\, du\, dv \\ &= \iint\limits_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]} r(R + r\cos u)\, du\, dv = (2r\pi)\cdot(2R\pi). \quad \triangle \end{aligned}$$

Задатак 8. Израчунати површину површи $S = \{(x,y,xy) \in R^3 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

Решење. Нека је $D = \{\,(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leqslant 1\,\}$. Параметризација површи S јесте пресликавање $f : D \to \mathbb{R}^3$ дефинисано са $f(u,v) = (u,v,uv)$. Како је $E(u,v) = 1 + v^2$, $F(u,v) = uv$ и $G(u,v) = 1 + u^2$ имамо да је

$$P(S) = \iint_D \sqrt{(EG - F^2)(u,v)}\, du\, dv = \iint_D \sqrt{1 + u^2 + v^2}\, du\, dv.$$

Након увођења смене $u = \rho\cos\theta$, $v = \rho\sin\theta$, при чему $\rho \in [0,1]$ и $\theta \in [0,2\pi]$ добијамо

$$\begin{aligned} \iint\limits_D \sqrt{1 + u^2 + v^2}\, du\, dv &= \iint\limits_{[0,1]\times[0,2\pi]} \rho\sqrt{1+\rho^2}\, d\rho\, d\theta = 2\pi\int_0^1 \rho\sqrt{1+\rho^2}\, d\rho \\ &= \frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

Дакле, површина површи S јесте $\dfrac{2\pi}{3}(2\sqrt{2} - 1)$. $\triangle$

ЛИТЕРАТУРА

[1] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill International Editions, Third Edition, 1987.

[2] Д. Аднађевић, З. Каделбург, *Математичка анализа I*, 11. изд, „Круг“ и Математички факултет, Београд 2014.

[3] M. Jevtić, M. Mateljević, I. Jovanović, *Matematička analiza II*, Matematički fakultet, Beograd 2008.

Математички факултет, Београд

E-mail: `miodrag@matf.bg.ac.rs, marek.svetlik@matf.bg.ac.rs`