НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ У ОСНОВНОЈ И СРЕДЊОЈ ШКОЛИ

Др Војислав Петровић

ПОТЕНЦИЈА ТАЧКЕ У ОДНОСУ НА КРУЖНИЦУ[1]

Увод

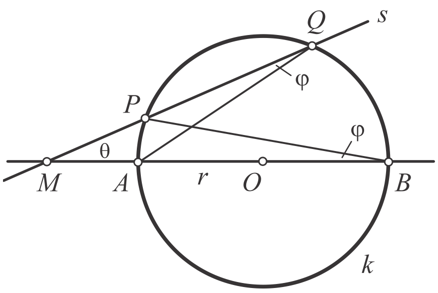
Једна од карактеристичних особина кружнице дата је у следећем тврђењу.

Теорема 1. *Ако је M произвољна тачка у равни кружнице k и ако је s произвољна права кроз M која сече k у тачкама P и Q, тада производ $MP \cdot MQ$ не зависи од избора праве s, тј. $MP \cdot MQ = \text{const}$.*

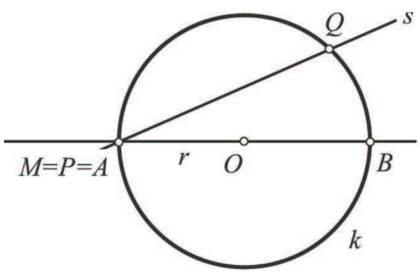
Доказ. Нека је k кружница с центром O и полупречником r. То ћемо означавати са $k(O;r)$. Показаћемо да је $MP \cdot MQ = MA \cdot MB$, где су A и B тачке пресека праве MO и кружнице k. С обзиром на положај тачке M, разликоваћемо три случаја.

(a) $MO > r$, тј. M је у спољашњости k (сл. 1).

Како су PBA и AQP периферијски углови кружнице k над луком PA, они су подударни, $\measuredangle PBA = \measuredangle AQP = \varphi$. Како је уз то $\measuredangle PMB \equiv \measuredangle AMQ = \theta$, следи сличност троуглова MPB и MAQ, $\triangle MPB \sim \triangle MAQ$. Одатле је $MP : MA = MB : MQ$, односно $MP \cdot MQ = MA \cdot MB$.



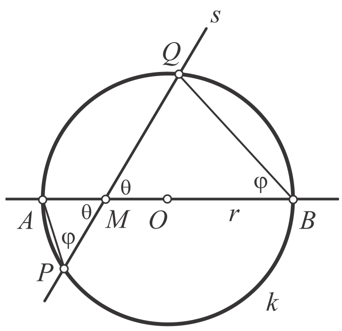
Сл. 1



Сл. 2

(b) $MO = r$, односно $M \in k$ (сл. 2).

[1] Чланак је заснован на предавању, одржаном на Државном семинару Друштва математичара Србије, 2024. године.



Сл. 3

Тада се са M поклапа једна од тачака P и Q, рецимо P, и једна од тачака A и B, рецимо A. Међутим, у свим случајевима је $MP \cdot MQ = MA \cdot MB = 0$.

(c) $MO < r$, тј. M је у унутрашњости k (сл. 3).

Тада важи $\measuredangle MPA = \measuredangle MQB = \varphi$ (периферијски над луком AQ) и $\measuredangle PMA = \measuredangle QMB = \theta$ (унакрсни), па је $\triangle MPA \sim \triangle MBQ$. То повлачи $MP : MB = MA : MQ$, одакле је $MP \cdot MQ = MA \cdot MB$.

Потенција тачке

Потенција тачке M *у односу на кружницу* k, ознака је $p_k(M)$, дефинише се на следећи начин.

Нека је M тачка у равни кружнице k и нека је s произвољна права кроз M која сече k. Ако s сече k у тачкама P и Q, тада је

$$p_k(M) = \begin{cases} MP \cdot MQ, & \text{ако } M \in \operatorname{ext} k \cup k, \\ -MP \cdot MQ, & \text{ако } M \in \operatorname{int} k. \end{cases} \tag{1}$$

(Са $\operatorname{ext} k$ и $\operatorname{int} k$ означене су, редом, спољашња и унутрашња област кружнице k.)

Да је ова дефиниција добра, тј. да вредност $p_k(M)$ не зависи од избора сечице s, гарантује теорема 1.

Напомена. Величина $p_k(M)$ може се згодно изразити преко скаларног производа вектора. Подсетимо се да се скалани производ, $\vec{u} \cdot \vec{v}$, вектора $\vec{u}$ и $\vec{v}$, дефинише као

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \measuredangle\{\vec{u}, \vec{v}\},$$

где су $|\vec{u}|$ и $|\vec{v}|$ интензитети (дужине) вектора $\vec{u}$ и $\vec{v}$. Тада је $p_k(M) = \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ}$ без обзира на положај тачке M у односу на кружницу k.

Заиста, уколико $M \in \operatorname{ext} k$, вектори $\overrightarrow{MP}$ и $\overrightarrow{MQ}$ су исто оријентисани (сл. 1), па је $\measuredangle\{\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MQ}\} = 0$. Отуда је $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = MP \cdot MQ \cdot \cos 0 = MP \cdot MQ$, што се уклапа у дефиницију (1).

Ако $M \in \operatorname{int} k$, вектори $\overrightarrow{MP}$ и $\overrightarrow{MQ}$ су супротно оријентисани (сл. 3), па је $\measuredangle\{\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MQ}\} = 180°$ и $\cos \measuredangle\{\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MQ}\} = -1$. То повлачи да је $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = MP \cdot MQ \cdot (-1) = -MP \cdot MQ$, што такође одговара дефиницији (1).

Коначно, ако $M \in k$, један од вектора $\overrightarrow{MP}$ и $\overrightarrow{MQ}$, рецимо $\overrightarrow{MP}$, једнак је $\vec{0}$, па је $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = \vec{0} \cdot \overrightarrow{MQ} = 0 = MP \cdot MQ$. И то је у сагласности с (1).

Следећи израз за потенцију тачке у односу на кружницу погодан је за различита испитивања

Теорема 2. *За потенцију тачке M у односу на кружницу $k(O;r)$ важи да је*

$$p_k(M) = d^2 - r^2, \tag{2}$$

где је $d = MO$ (централно растојање тачке M).

Доказ. Нека је $MO \cap k = \{A, B\}$. Размотрићемо сва три случаја из теореме 1.

(a) $M \in \operatorname{ext} k$ (сл. 1). Тада је $d > r$ и имамо да је

$$p_k(M) = MA \cdot MB = (d - r)(d + r) = d^2 - r^2.$$

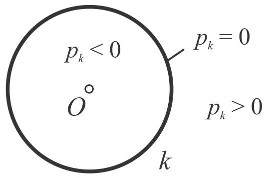
(b) $M \in k$ (сл. 2). Тада је $d = r$ и

$$p_k(M) = MA \cdot MB = 0 \cdot 2r = 0 = (d - r)(d + r) = d^2 - r^2.$$

(c) $M \in \operatorname{int} k$ (сл. 3). Тада је $d < r$ и имамо да је

$$p_k(M) = -MA \cdot MB = -(r - d)(d + r) = d^2 - r^2. \quad \blacksquare$$

Напомена. Ако је $k(O;r)$ утврђена кружница и M промењлива тачка, тада је $p_k(M) > 0$ ако и само је $d > r$, тј. ако $M \in \operatorname{ext} k$ (сл. 4). Слично, $p_k(M) = 0$ ако и само је $d = r$, тј. $M \in k$, док је $p_k(M) < 0$ ако и само је $d < r$, тј. $M \in \operatorname{int} k$.

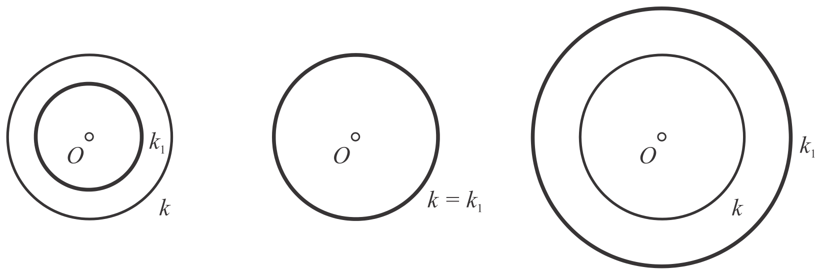


Сл. 4

Потенција $p_k(M)$ тачке M у односу на кружницу $k(O;r)$ је квадратна функција растојања $d = MO$. С обзиром да $d \in [0, +\infty)$, следи $p_k(M) \in [-r^2, +\infty)$. Притом је $\min p_k(M) = p_k(O) = -r^2$. С друге стране, $\max p_k(M)$ не постоји јер $p_k(M) \to +\infty$ кад $d \to +\infty$.

Ево неколико примера везаних за потенцију тачке.

Пример 1. Дати су кружница $k(O;r)$ и реалан број α. Одредити све тачке X у равни кружнице такве да је $p_k(X) = \alpha$.



(a) (b) (c)

Сл. 5

Решење. Нека је S скуп тражених тачака X, тј. $S = \{X \mid p_k(X) = \alpha\}$. У зависности од α, размотрићемо више случајева.

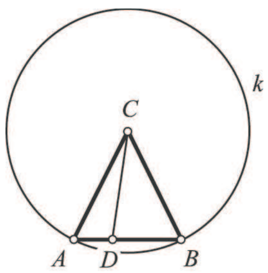
1° $\alpha \in (-\infty, -r^2)$. Како је $\min p_k(X) = -r^2$ (види претходну напомену), таквих тачака X нема, тј. $S = \varnothing$.

2° $\alpha = -r^2$. Тада из (2) следи да је $d = 0$, па је $S = \{O\}$.

3° $\alpha \in (-r^2, +\infty)$. Тада, поново из (2), следи $d^2 = \alpha + r^2 > 0$, па су тражене тачке X на растојању $d = \sqrt{\alpha + r^2}$ од центра кружнице k. То значи да је $S = k_1(O; d)$, тј. S је кружница концентрична са k. На сликама 5(a), (b), (c) приказане су кружнице k_1 за $\alpha \in (-r^2, 0)$, $\alpha = 0$, $\alpha \in (0, +\infty)$, редом. $\triangle$

Пример 2. Ако је D произвољна тачка основице AB једнакокраког троугла ABC, доказати да је $DA \cdot DB = AC^2 - DC^2$.

Решење. Представићемо две варијанте решења. Једну с применом потенције тачке и другу, елементарну, помоћу Питагорине теореме.



Сл. 6

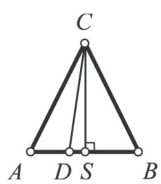
1. *варијанта.* Уочимо кружницу $k(C; CA = CB)$ (сл. 6). Сходно (1) је

$$p_k(D) = -DA \cdot DB,$$

а из теореме 2 је

$$p_k(D) = DC^2 - AC^2.$$

Из последње две једнакости следи $DA \cdot DB = AC^2 - DC^2$.



Сл. 7

2. *варијанта.* Нека је S средиште основице AB (сл. 7). Тада је $SC \perp AB$. Можемо узети да D припада дужи AS. За $D \equiv A$, тражена једнакост тривијално важи јер је $DA \cdot DB = AC^2 - DC^2 = 0$. Ако је $D \equiv S$, тада је

$$DA \cdot DB = AS^2 = AC^2 - SC^2 = AC^2 - DC^2.$$

Нека је $A - D - S$. Тада је

$$\begin{aligned} DA \cdot DB &= (AS - DS)(BS + DS) = (AS - MS)(AS + DS) = AS^2 - DS^2 \\ &= (AC^2 - SC^2) - (DC^2 - SC^2) = AC^2 - DC^2. \quad \triangle \end{aligned}$$

Ортоцентар троугла поседује особину која унеколико подсећа на особину тежишта. Разлика је у томе што се код тежишта ради о односу дужи, а код ортоцентра о њиховом производу.

Пример 3. Ако су AA', BB' и CC' висине, а H ортоцентар троугла ABC, доказати да је $HA \cdot HA' = HB \cdot HB' = HC \cdot HC'$.

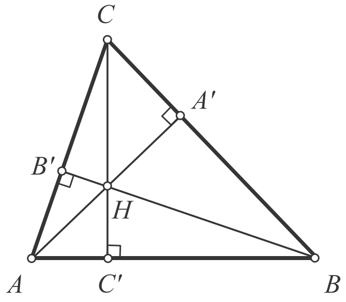
Решење. У вези с врстом троугла, размотрићемо три случаја.

(a) $\triangle ABC$ је оштроугли (сл. 8).

1. *варијанта* – помоћу потенције тачке. Означимо са k_1 и k_2 кружнице с пречницима AB и AC, редом, и са $p_1(X)$ и $p_2(X)$ потенције тачке X у односу на k_1 и k_2, редом. Како је $\measuredangle BA'A = \measuredangle BB'A = 90^\circ$, тачке A' и B' припадају кружници k_1. Слично, $A', C' \in k_2$. На основу (1), имамо да је

$$p_1(H) = HA \cdot HA' = HB \cdot HB',$$
$$p_2(H) = HB \cdot HB' = HC \cdot HC'.$$

Из ове две једнакости следи $p_1(H) = p_2(H) = HA \cdot HA' = HB \cdot HB' = HC \cdot HC'$.



Сл. 8

2. *варијанта* – елементарно. Лако се види да је $\triangle HAB' \sim \triangle HBA'$, што повлачи $HA : HB = HB' : HA'$, односно

$$HA \cdot HA' = HB \cdot HB'.$$

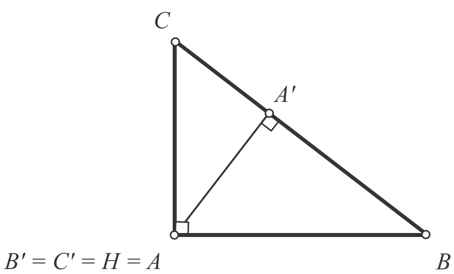
Слично, из $\triangle HAC' \sim \triangle HCA'$ следи

$$HA \cdot HA' = HC \cdot HC'.$$

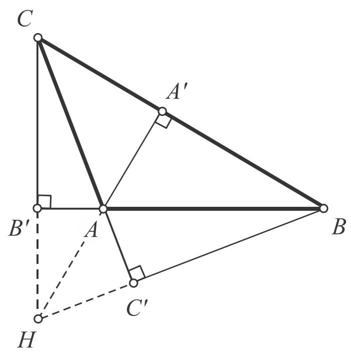
Из ових једнакости, очигледно је $HA \cdot HA' = HB \cdot HB' = HC \cdot HC'$.

(b) $\triangle ABC$ је правоугли, $\measuredangle A = 90^\circ$ (сл. 9). Тада се теме A поклапа с подножјима висина B' и C' и с ортоцентром H. Отуда је

$$HA \cdot HA' = HB \cdot HB' = HC \cdot HC' = 0 \cdot 0 = HB \cdot 0 = HC \cdot 0 = 0.$$



Сл. 9



Сл. 10

(c) $\triangle ABC$ је тупоугли, $\measuredangle A > 90^\circ$ (сл. 10). Решење је слично као под (а). $\triangle$

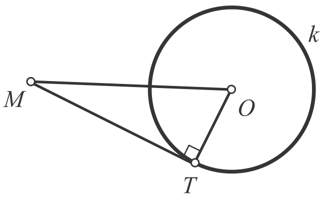
Ако тачка M припада спољашњости кружнице k, тада за $p_k(M)$ имамо још један згодан израз.

Теорема 3. *Ако тачка M припада спољашњости кружнице k и ако је MT тангентна дуж из M на k, тада је*

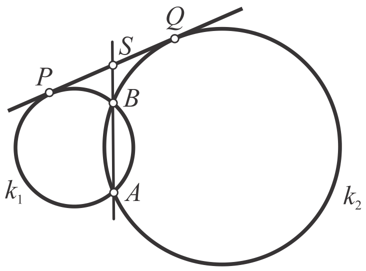
$$p_k(M) = MT^2. \tag{3}$$

Доказ. Нека је k кружница с центром O и полупречником r. Тада је, према познатој теореми, $MT \perp OT$ (сл. 11), па је $MO^2 - OT^2 = MO^2 - r^2 = MT^2$.

С друге стране, на основу теореме 2 је $p_k(M) = MO^2 - r^2$. С обзиром на претходну једнакост, то даје $p_k(M) = MT^2$. ■



Сл. 11



Сл. 12

У следећем примеру управо се користи тврђење ове теореме.

Пример 4. Две кружнице, k_1 и k_2 секу се у тачкама A и B. Ако је PQ, где $P \in k_1$ и $Q \in k_2$, њихова заједничка тангента, доказати да права AB садржи средиште дужи PQ.

Решење. Нека права AB сече дуж PQ у тачки S (сл. 12). Означимо са p_i $(i = 1, 2)$ потенцију у односу на кружницу k_i. Тада је, сходно (1) и (3)

$$p_1(S) = SA \cdot SB = SP^2.$$

Слично је

$$p_2(S) = SA \cdot SB = SQ^2.$$

Из ових једнакости очигледно је $SP^2 = SQ^2$, односно $SP = SQ$, па је S средште дужи PQ. △

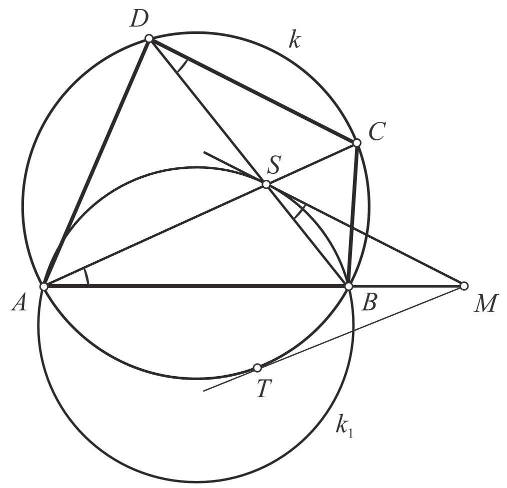
Пример 5. Дат је тетивни четвороугао $ABCD$ чије се дијагонале секу у тачки S. Права која пролази кроз S и паралелна је с правом CD сече праву AB у тачки M. Доказати да је тангентна дуж из тачке M на кружницу k, описану око четвороугла $ABCD$, једнака дужи MS.

Решење. Из $MS \parallel CD$ следи $\measuredangle BSM = \measuredangle BDC$ (сагласни углови) (сл. 13). С друге стране, четвороугао $ABCD$ је тетивни, па су $\measuredangle BDC$ и $\measuredangle BAC$ периферијски углови над луком BC описане кружнице k. Стога је $\measuredangle BDC = \measuredangle BAC$. Из последње две једнакости следи

$$\measuredangle BSM = \measuredangle BAC. \tag{4}$$

Означимо са k_1 кружницу описану око троугла ABS. На основу познате теореме о углу између тангенте и тетиве, из (4) следи да је права MS тангента кружнице k_1. Тада је, сходно (1) и (3),

$$MS^2 = MA \cdot MB = p_1(M), \tag{5}$$



Сл. 13

где је $p_1(M)$ потенција тачке M у односу на кружницу k.

Нека је MT, где $T \in k$, тангента кружнице k. Као горе, на основу (1) и (3) имамо да је

$$MT^2 = MA \cdot MB = p_k(M). \tag{6}$$

Из (5) и (6) следи $MS^2 = MT^2$ и $MS = MT$, што је требало да се докаже. △

Једнакост (a) из следећег примера приписује се Ојлеру. Њена директна последица је неједнакост (b) за полупречнике описане и уписане кружнице троугла.

Пример 6. Нека су $K(O; R)$ и $k(S; r)$ редом описана и уписана кружница троугла ABC. Доказати да је:

(a) $OS = \sqrt{R(R-2r)}$;   (b) $R \geqslant 2r$.

Решење. (a) Уколико се центри описане и уписане кружнице троугла поклапају, $O \equiv S$, није тешко показати да је троугао једнакостраничан.[2] Тада је $OS = 0$, а како је $R = 2r$, из формуле такође следи $OS = \sqrt{R(R-R)} = 0$.

Стога, узмимо да је $O \neq S$(сл. 14).

Посматрајмо потенцију центра S уписане кружнице k у односу на описану кружницу K. По теореми 2 је

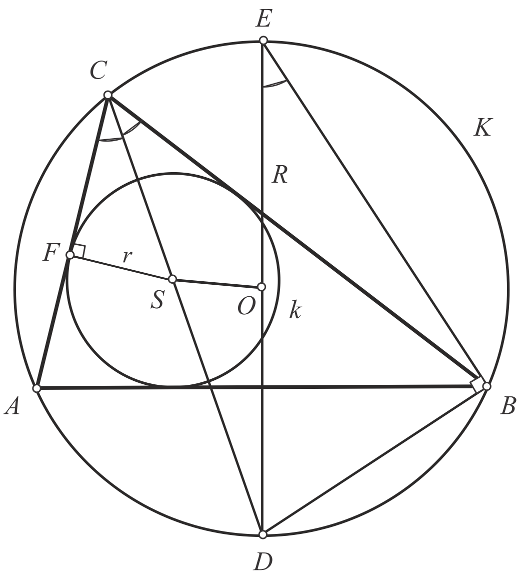
$$p_K(S) = OS^2 - R^2. \tag{7}$$

С друге стране, из (1) имамо да је

$$p_K(S) = -SC \cdot SD. \tag{8}$$

Нека полуправа CS сече кружницу K, по други пут, у тачки D и нека полуправа DO сече кружницу K, по други пут, у тачки E. Најзад, нека кружница k додирује

[2]Важи и општије тврђење: „Ако се било које две од четири значајне тачке троугла, ортоцентар, тежиште, центар описане и центар уписане кружнице, поклапају, тада се поклапају све четири тачке и троугао је једнакостраниан.“



Сл. 14

страницу AC у тачки F. Тада је $\measuredangle DBE = \measuredangle CFS = 90^\circ$ (први је периферијски угао над пречником DE кружнице K, док је други угао између тангенте и одговарајућег полупречника кружнице k). Према томе, троуглови DBE и SFC су правоугли. Осим тога, углови BED и BCD су периферијски над луком DB кружнице K, па су стога једнаки,

$$\measuredangle BED = \measuredangle BCD.$$

Полуправа CD је симетрала угла BCA, те је

$$\measuredangle DCA = \measuredangle BCD.$$

Из последње две једнакости следи $\measuredangle BED = \measuredangle DCA \equiv \measuredangle SCF$. С обзиром да су троуглови DBE и SFC правоугли, то повлачи да су слични, $\triangle DBE \sim \triangle SFC$. Следи $DB : SF = DE : SC$, односно $DB \cdot SC = DE \cdot SF = 2Rr$. Како је, према познатој теореми, $DB = SD$, добијамо да је $SD \cdot SC = 2Rr$. Замењујући то у (8), добијамо

$$p_K(S) = -2Rr. \tag{9}$$

Коначно, из (7) и (9) је $OS^2 - R^2 = -2Rr$, одакле је $OS = \sqrt{R(R-2r)}$.

(b) С обзиром да је $OS \geqslant 0$, из (a) следи $R(R-2r) \geqslant 0$. А како је $R > 0$, то повлачи $R \geqslant 2r$. ■

Потенцијална (радикална) оса

Ако су $k_1(O_1; r_1)$ и $k_2(O_2; r_2)$ две кружнице које леже у истој равни, тада за сваку тачку X те равни постоји потенција $p_1(X)$ у односу на прву кружницу и потенција $p_2(X)$ у односу на другу кружницу. Природно се намећу питања:

- Да ли постоје тачке X такве да је $p_1(X) = p_2(X)$?
- Ако такве тачке постоје, како изгледа скуп којем припадају све такве тачке?

У даљем тексту даћемо одговоре на оба питања. Нека је P тражени скуп тачака, тј. $P = \{X \mid p_1(X) = p_2(X)\}$. Прво ћемо размотрити случај концентричних кружница. За њих важи следеће тврђење.

Теорема 4. *Нека су $k_1(O; r_1)$ и $k_2(O; r_2)$ концентричне кружнице са заједничким центром O. Тада је:*
(a) $P = \varnothing$ *за* $r_1 \neq r_2$; (b) $P =$ *читава раван (кружница k_1 и k_2) за* $r_1 = r_2$.

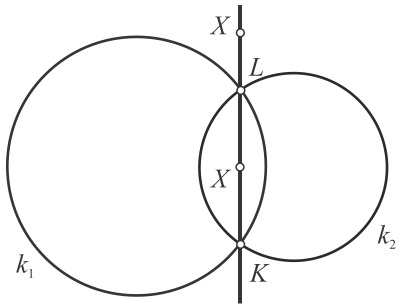
Доказ. (a) Нека је X произвољна тачка равни. Тада је $p_1(X) = XO^2 - r_1^2$, док је $p_2(X) = XO^2 - r_2^2$. Како је $r_1 \neq r_2$, очигледно је $p_1(X) \neq p_2(X)$, те је $P = \varnothing$.

(b) Нека је X поново произвољна тачка равни и нека је $r_1 = r_2$. Тада је $p_1(X) = p_2(X) = XO^2 - r^2$, па је $P =$ читава раван. ∎

Тако остаје случај кружница $k_1(O_1; r_1)$ и $k_2(O_2; r_2)$, таквих да је $O_1 \neq O_2$. У зависности од међусобног положаја кружница, размотрићемо три подслучаја.

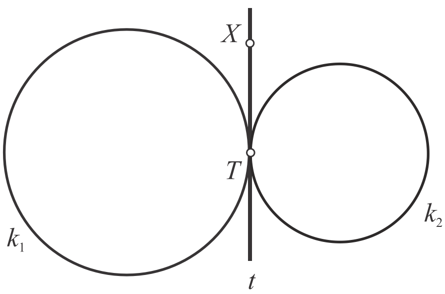
Лема 1. *Ако се кружнице k_1 и k_2 секу у тачкама K и L, тада за сваку тачку X праве KL важи $p_1(X) = p_2(X)$, тј. $KL \subset P$.*

Доказ. Приметимо да је $p_1(K) = p_2(K) = p_1(L) = p_2(L) = 0$, па $K, L \in P$. Нека је X произвољна тачка праве KL (сл. 15). Ако је X ван дужи KL, тада је, на основу (1), $p_1(X) = p_2(X) = XK \cdot XL$, а ако је на дужи KL, тада је $p_1(X) = p_2(X) = -XK \cdot XL$. У сваком случају је $p_1(X) = p_2(X)$. ∎



Сл. 15

Лема 2. *Нека се кружнице k_1 и k_2 додирују у тачки T и нека је tихова заједничка тангента у T. Тада за сваку тачку X праве t важи $p_1(X) = p_2(X)$, тј. $t \subset P$.*



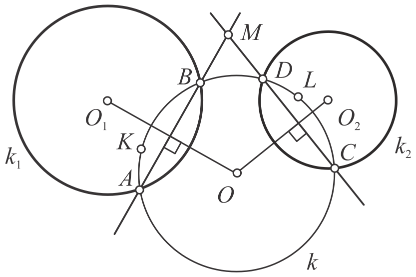
Сл. 16

Доказ. Очигледно је $p_1(T) = p_2(T) = 0$. Нека $X \in t$, $X \neq T$ (сл. 16). Тада је, према теореми 3, $p_1(X) = p_2(X) = XT^2$, те $t \subset P$. Доказ је исти уколико се кружнице k_1 и k_2 додирују изнутра. ∎

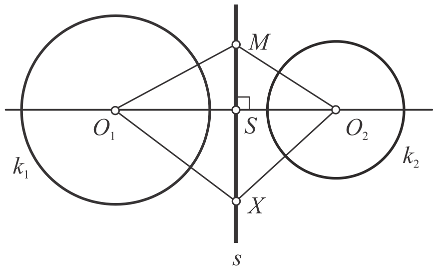
Тврђење слично онима из лема 1 и 2 важи и за две неконцентричне кружнице које немају заједничких тачака. Међутим, доказ у том случају је знатно сложенији.

Лема 3. *Нека су $k_1(O_1; r_1)$ и $k_2(O_2; r_2)$ неконцентричне кружнице једне равни које немају заједничких тачака. Тада постоји тачка M таква да је $p_1(M) = p_2(M)$. Штавише, за сваку тачку X праве s, која садржи тачку M и нормална је на праву O_1O_2, важи $p_1(X) = p_2(X)$.*

Доказ. Прво ћемо показати да таква тачка M постоји. Нека су поменуте кружнице такве да се свака налази у спољашњости друге (сл. 17). (Уколико је једна од кружница у унутрашњости друге, доказ је готово исти.)



Сл. 17



Сл. 18

Уочимо тачку K у унутрашњости кружнице k_1 и тачку L у унутрашњости кружнице k_2. Уочимо, потом, кружницу k која садржи K и L и чији центар O лежи ван праве O_1O_2. Тада k сече k_1 у тачкама, рецимо A и B, и k_2 у тачкама, рецимо C и D. Како је $AB \perp OO_1$ и $CD \perp OO_2$ и како су тачке O, O_1 и O_2 неколинеарне, праве AB и CD нису паралелне, те се секу у некој тачки M.

Означимо са p, p_1 и p_2 потенције тачака у односу на кружнице k, k_1 и k_2, редом. На основу (1), тада је

$$p_1(M) = p(M) = MA \cdot MB, \quad p_2(M) = p(M) = MC \cdot MD,$$

одакле $p_1(M) = p_2(M)$.

Нека је s права кроз M која је нормална на праву O_1O_2 и сече је у тачки S (сл. 18). Покажимо да је $p_1(S) = p_2(S)$. Користећи теорему 2 и Питагорину теорему, добијамо

$$\begin{aligned}
p_1(S) &= SO_1^2 - r_1^2 = (MO_1^2 - MS^2) - r_1^2 = (MO_1^2 - r_1^2) - MS^2 \\
&= p_1(M) - MS^2, \\
p_2(S) &= SO_2^2 - r_2^2 = (MO_2^2 - MS^2) - r_2^2 = (MO_2^2 - r_2^2) - MS^2 \\
&= p_2(M) - MS^2.
\end{aligned}$$

Како је $p_1(M) = p_2(M)$, следи

$$p_1(S) = p_2(S). \tag{10}$$

Нека је X произвољна тачка праве s. Тада је

$$\begin{aligned}
p_1(X) &= XO_1^2 - r_1^2 = (SO_1^2 + XS^2) - r_1^2 = (SO_1^2 - r_1^2) + XS^2 \\
&= p_1(S) + XS^2,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
p_2(X) &= XO_2^2 - r_2^2 = (SO_2^2 + XS^2) - r_2^2 = (SO_2^2 - r_2^2) + XS^2 \\
&= p_2(S) + XS^2.
\end{aligned}
$$

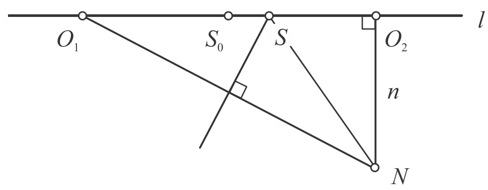
С обзиром на (10), из последње две једнакости следи $p_1(X) = p_2(X)$. Отуда је $s \subset P$. ■

Из ове три леме следи да за сваке две неконцентричне кружнице k_1 и k_2 постоји права чије све тачке имају једнаке потенције у односу на обе кружнице. Поставља се питање: „Да ли су то све тачке у равни кружница које имају једнаке потенције у односу на обе кружнице?“ Тренутно није јасно, али испоставиће се да је одговор потврдан.

Ако су $k_1(O_1; r_1)$ и $k_2(O_2; r_2)$ две неконцентричне кружнице, праву $l = O_1O_2$ зваћемо *линијом центара.*

Лема 4. *Нека су $k_1(O_1; r_1)$ и $k_2(O_2; r_2)$ неконцентричне кружнице. Тада на линији центара $l = O_1O_2$ постоји једна и само једна тачка S таква да је $p_1(S) = p_2(S)$.*

Доказ. Узмимо да је $r_1 \geqslant r_2$. Нека је S тачка праве l таква да је $p_1(S) = p_2(S)$. Тада је $p_1(S) = SO_1^2 - r_1^2$ и $p_2(S) = SO_2^2 - r_2^2$. Како је $r_1 \geqslant r_2$, то је $SO_1^2 \geqslant SO_2^2$, односно $SO_1 \geqslant SO_2$. То значи да S припада полуправој S_0O_2, где је S_0 средиште дужи O_1O_2 (сл. 19).



Сл. 19

Из $p_1(S) = p_2(S)$ следи $SO_1^2 - r_1^2 = SO_2^2 - r_2^2$ и $SO_1^2 = SO_2^2 + r_1^2 - r_2^2$. На нормали у тачки O_2 на праву l уочимо тачку N, такву да је $O_2N = n = \sqrt{r_1^2 - r_2^2}$. Тада је $SN^2 = SO_2^2 + n^2 = SO_2^2 + r_1^2 - r_2^2 = SO_1^2$, па је $SN = SO_1$. Отуда тачка S припада симетрали дужи O_1N.

Дакле, ако је $p_1(S) = p_2(S)$, где $S \in l$, S је пресечна тачка симетрале дужи O_1N и праве l. Како су тачке O_1 и N и права l утврђене, тачка S је јединствена. ■

Сад смо у прилици да формулишемо главно тврђење.

Теорема 5. *Све тачке које имају једнаке потенције у односу на две неконцентричне кружнице припадају једној правој која је нормална на линију центара тих кружница. Свака тачка те праве има једнаке потенције у односу на обе кружнице.*

Доказ. Нека је $l = O_1O_2$ линија центара неконцентричних кружница $k_1(O_1)$ и $k_2(O_2)$. На основу лема 1, 2 и 3, увек постоји тачка M таква да је $p_1(M) = p_2(M)$. Из истих лема следи да свака тачка нормале s из M на l има једнаке потенције у односу на k_1 и k_2.

Нека је $s \cap l = \{S\}$ и нека је X тачка ван праве s. Тврдимо да је тада $p_1(X) \neq p_2(X)$.

Претпоставимо да је $p_1(X) = p_2(X)$ и уочимо нормалу s' из X на l. Нека је $s' \cap l = \{S'\}$. Како $X \notin s$ и како је $s' \parallel s$, следи да је $S' \neq S$. С друге стране, из лема 1, 2, 3, следи $p_1(S) = p_2(S)$. Тако на линији центара l постоје две различите тачке, S и S', које имају једнаке потенције у односу на k_1 и k_2. То је контрадикција с лемом 4 која обара претпоставку $p_1(S) = p_2(S)$. ■

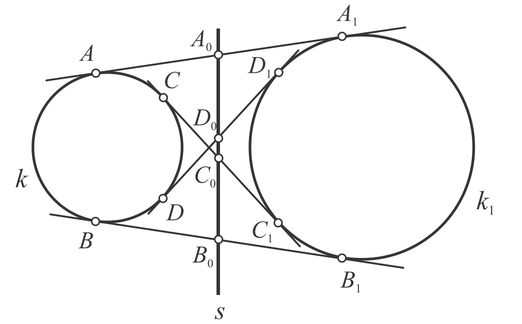
Права s из ове теореме, тј. скуп свих тачака у равни неконцентричних кружница k_1 и k_2 које имају једнаке потенције у односу на те кружнице, зове се *потенцијална* или *радикална оса* тих кружница.

Из доказа лема 1, 2, 3 види се како се конструише потенцијална оса за две дате кружнице.

У наредних неколико примера биће приказано како се потенцијалне осе могу згодно користити у доказима различитих планиметријских тврђења.

Пример 7. Дате су кружнице k и k_1 такве да свака од њих лежи у спољашњости друге. Ако су AA_1 и BB_1 њихове спољашње и CC_1 и DD_1 њихове унутрашње тангенте, где $A, B, C, D \in k$ и $A_1, B_1, C_1, D_1 \in k_1$, доказати да су средишта дужи AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 колинеарна.

Решење. Означимо са p и p_1 потенције тачака у односу на кружнице k и k_1, редом. Нека су A_0, B_0, C_0, D_0 редом средишта дужи AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 (сл. 20).



Сл. 20

Сходно теореми 3, тада је $p(A_0) = A_0A^2 = A_0A_1^2 = p_1(A_0)$, односно $p(A_0) = p_1(A_0)$. Слично је $p(B_0) = p_1(B_0)$, $p(C_0) = p_1(C_0)$ и $p(D_0) = p_1(D_0)$. Према томе, тачке A_0, B_0, C_0, D_0 припадају потенцијалној оси s кружница, те су стога колинеарне. △

Пример 8. Нека су AA', BB' и CC' висине разностраног оштроуглог троугла ABC (никоје две странице нису једнаке). Доказати да су три тачке у којима се секу праве $B'C'$ и BC, $C'A'$ и CA и $A'B'$ и AB – колинеарне.

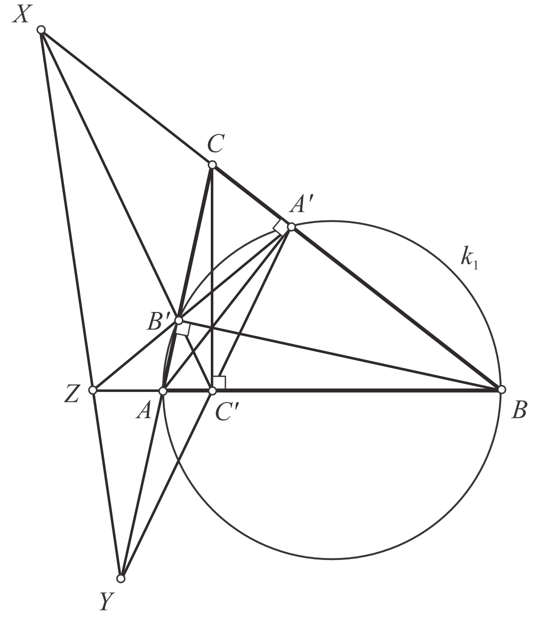
Решење. Нека је $B'C' \cap BC = \{X\}$, $C'A' \cap CA = \{Y\}$ и $A'B' \cap AB = \{Z\}$ (сл. 21). Како је $\measuredangle BA'A = \measuredangle BB'A = 90°$, тачке A, B, A' и B' припадају кружници k_1 чији је пречник страница AB. Нека су k и k' кружнице описане око троуглова ABC и $A'B'C'$, редом. (Нису представљене на сл. 20.) Означимо са p, p' и p_1

редом потенције тачака у односу на кружнице k, k' и k_1. Тада за тачку Z имамо:

$$p(Z) = ZA \cdot ZB, \quad p'(Z) = ZA' \cdot ZB', \quad p_1(Z) = ZA \cdot ZB = ZA' \cdot ZB'.$$

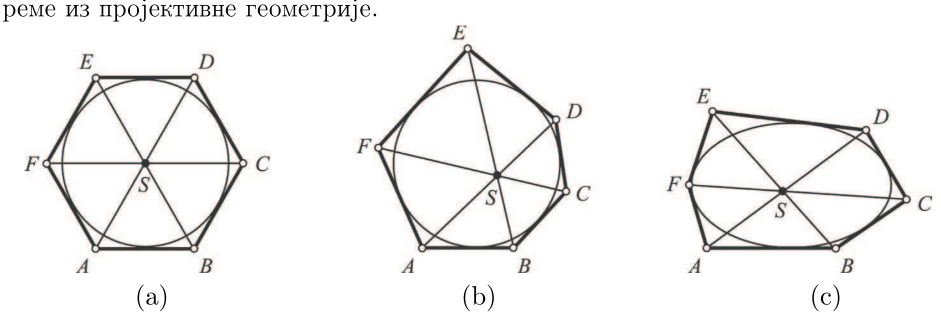
Из ових једнакости следи $p(Z) = p'(Z)$. То значи да тачка Z припада потенцијалној оси кружница k и k'.

На сличан начин показује се да је $p(X) = p'(X)$ и $p(Y) = p'(Y)$, па тачке X и Y такође припадају потенцијалној оси кружница k и k'. Отуда су тачке X, Y и Z колинеарне. $\triangle$



Сл. 21

Следећи пример односи се на специјалан случај познате Бријаншонове[3] теореме из пројективне геометрије.



Сл. 22

Ако је $ABCDEF$ правилан шестоугао, његове „велике“ дијагонале, AD, BE и CF секу се у једној тачки, центру уписане кружнице (сл. 22(a)).

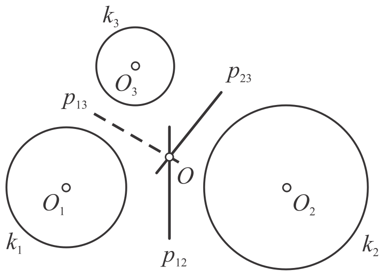
[3]C. J. Brianchon (1783-1864), француски математичар

Међутим, слично важи за сваки тангентни шестоугао, с тим што тачка пресека тих дијагонала не мора да буде центар уписане кружнице (сл. 22(b)). (То је управо садржај најављеног примера.) Коначно, важи и општије тврђење, Бријаншонова теорема, које каже да се велике дијагонале сваког шестоугла, описаног око криве другог реда, секу у једној тачки. На сл. 22(c) приказан је случај елипсе.

Наведимо најпре једно помоћно тврђење.

Пример 9. Нека су $k_1(O_1)$, $k_2(O_2)$ и $k_3(O_3)$ три кружнице чији су центри неколинеарне тачке. Доказати да се потенцијалне осе кружница k_1 и k_2, k_2 и k_3 и k_1 и k_3 секу у једној тачки.

Решење. Означимо са p_{ij} потенцијалну осу кружница k_i и k_j, где је $\{i,j\} \subset \{1,2,3\}$. Нека је $p_{12} \cap p_{23} = \{O\}$ (сл. 23).



Сл. 23

Тада је $p_1(O) = p_2(O)$ и $p_2(O) = p_3(O)$. Одатле је $p_1(O) = p_3(O)$, па $O \in p_{13}$. Тако се потенцијалне осе p_{12}, p_{23} и p_{13} секу у тачки O. $\triangle$

Тачка O из овог примера зове се *потенцијални центар* кружница k_1, k_2 и k_3.

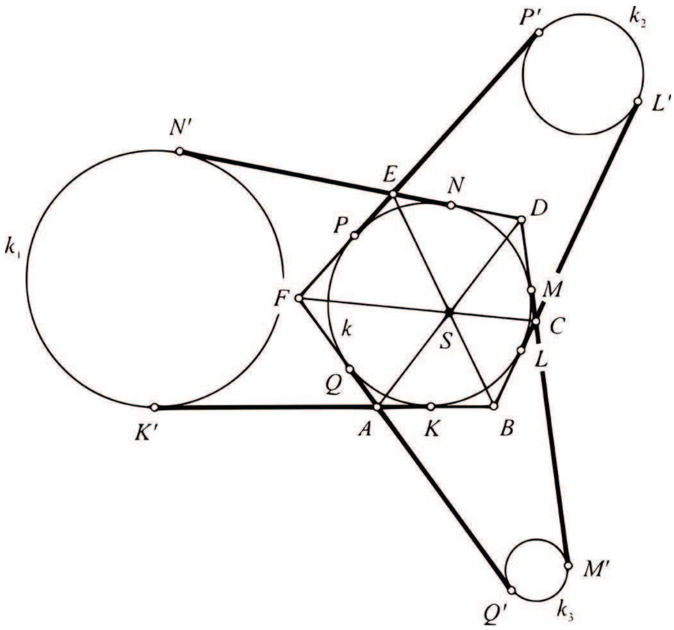
Пример 10. Нека је $ABCDEF$ тангентни шестоугао. Доказати да се дијагонале AD, BE и CF секу у једној тачки.

Решење. Нека је k кружница уписана у шестоугао $ABCDEF$ која додирује странице AB, BC, CD, DE, EF, FA редом у тачкама K, L, M, N, P, Q (сл. 24).

Нека је s позитиван реалан број већи од дужине сваке странице шестоугла $ABCDEF$. Уочимо на полуправим BA и DE редом тачке K' и N' такве да је $KK' = NN' = s$. Лако се види да тада постоји кружница k_1 која додирује праве KK' и NN' у тачкама K' и N', редом. Слично, на полуправим BC и FE уочимо редом тачке L' и P' такве да је $LL' = PP' = s$ и кружницу k_2 која додирује LL' и PP' у тачкама L' и P', редом. Најзад, на полуправим DC и FA уочимо редом тачке M' и Q' такве да је $MM' = QQ' = s$ и кружницу k_3 која додирује MM' и QQ' у тачкама M' и Q', редом. Означимо са p_i, $i = 1,2,3$, потенције тачака у односу на кружницу k_i.

С обзиром да је $BK = BL$ и $EN = EP$, тада је

$$\begin{aligned} p_1(B) &= BK'^2 = (BK + KK')^2 = (BK + s)^2 \\ &= (BL + LL')^2 = BL'^2 = p_2(B), \end{aligned}$$



Сл. 24

$$\begin{aligned} p_1(E) &= EN'^2 = (NN' - EN)^2 = (s - EN)^2 \\ &= (PP' - EP)^2 = EP'^2 = p_2(E). \end{aligned}$$

Из тога следи да је BE потенцијална оса за кружнице k_1 и k_2.

На сличан начин показује се да су CF и AD потенцијалне осе за k_2 и k_3, односно за k_1 и k_3. На основу примера 9, праве AD, BE и CF, а истовремено и одговарајуће дужи, секу се у тачки S – потенцијалном центру кружница k_1, k_2 и k_3. $\triangle$

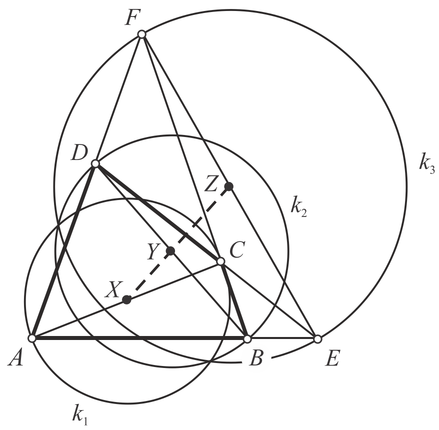
Пример 11. У конвексном четвороуглу $ABCD$ праве AB и CD секу се у тачки E, а праве AD и BC у тачки F. Доказати да су средишта дужи AC, BD и EF колинеарне тачке.

Решење. Нека су X, Y и Z редом средишта дужи AC, BD и EF (сл. 25).

Означимо са k_1, k_2 и k_3 кружнице с пречницима AC, BD и EF, редом. Њихови центри су управо тачке X, Y и Z. Показаћемо да кружнице k_1, k_2 и k_3 имају заједничку потенцијалну осу s, тј. да је s потенцијална оса за сваке две од њих.

Нека су AA', BB' и DD' висине троугла ABD и нека је H_1 његов ортоцентар (сл. 26). Како је $\measuredangle CA'A = 90^\circ$, следи да $A' \in k_1$. Слично, $D' \in k_2$ и $B' \in k_3$. Ако са p_i, $i = 1, 2, 3$, означимо потенције тачака у односу на кружницу k_i, имамо да је

$$p_1(H_1) = H_1A \cdot H_1A', \quad p_2(H_1) = H_1D \cdot H_1D', \quad p_3(H_1) = H_1B \cdot H_1B'.$$



Сл. 25

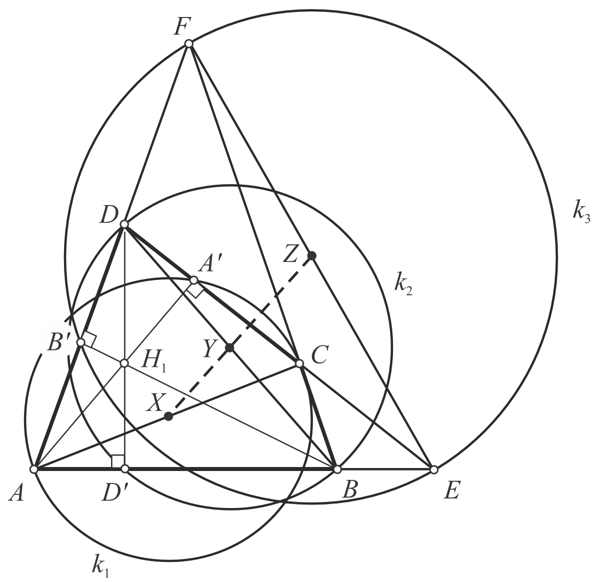
А како је, на основу примера 3, $H_1A \cdot H_1A' = H_1D \cdot H_1D' = H_1B \cdot H_1B'$, из претходне три једнакости следи

$$p_1(H_1) = p_2(H_1) = p_3(H_1). \tag{11}$$

Слично се показује да је

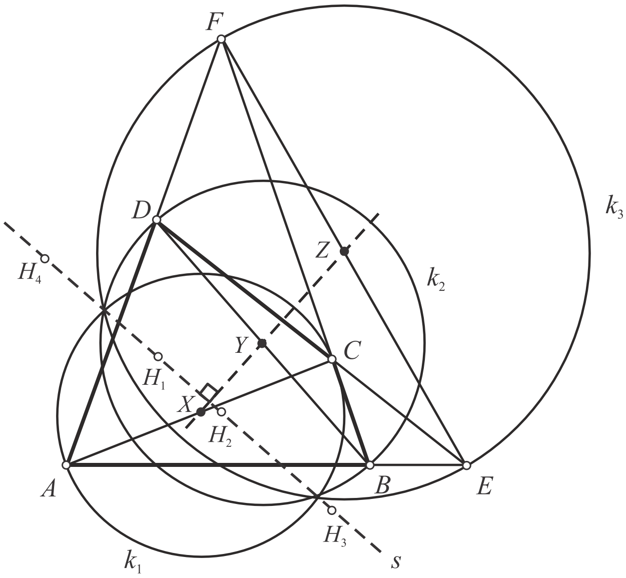
$$p_1(H_2) = p_2(H_2) = p_3(H_2), \tag{12}$$

где је H_2 ортоцентар троугла ABF.



Сл. 26

Из (11) и (12) следи да је права $s = H_1H_2$ потенцијална оса за сваке две од



Сл. 27

кружница k_1, k_2 и k_3. С обзиром на теорему 5, то повлачи $s \perp XY$ и $s \perp XZ$. Како је нормала из тачке на праву јединствена, тачке X, Y и Z су колинеарне. $\triangle$

Напомена. На сличан начин може се показати да је $p_1(H_3) = p_2(H_3) = p_3(H_3)$ и $p_1(H_4) = p_2(H_4) = p_3(H_4)$, где су H_3 и H_4 ортоцентри троуглова BEC и DCF, редом. То значи да и тачке H_3 и H_4 леже на заједничкој потенцијалној оси s. Тако су, осим тачака X, Y и Z, колинеарне и тачке H_1, H_2, H_3 и H_4. Притом је права XYZ нормална на праву $H_1H_2H_3H_4$ (сл. 27).

ЛИТЕРАТУРА

[1] M. Mitrović, S. Ognjanović, Lj. Petković, N. Lazarević, *Geometrija*, Krug, Beograd, 1996.

[2] В. Прасолов, *Задачи по планиметрии*, Наука, Москва, 1986.

[3] R. Tošić, V. Petrović, *Problemi iz geometrije – metodička zbirka*, Stilos, Novi Sad, 1995.

Департман за математику и информатику, ПМФ, Нови Сад

E-mail: vojpet@gmail.com