НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ
LXIX, 3-4 (2024), 76–87

Младен Зекић

ТОПОЛОГИЈА ДАНТЕОВОГ УНИВЕРЗУМА

Апстракт. Циљ овог рада је да покаже да је модел универзума који Данте описује у ***Комедији*** тополошки еквивалентан 3-сфери. На ову чињеницу су указали многи аутори, а најстарији запис о томе налазимо у књизи Павла Флоренског ***Имагинарне величине у геометрији*** из 1922. године. С друге стране, 3-сфера се појављује у савременој космологији као модел универзума предвиђен Ајнштајновом општом теоријом релативности. У раду ћемо прво представити неколико начина да се 3-сфера визуализује, а затим ћемо описати конструкцију Дантеовог универзума и показати да та конструкција одговара 3-сфери.

1. Увод

Данте Алигијери (1265–1321) је 1308. године почео да пише поему под називом *Комедија*, која се сматра једним од најутицајнијих и најважнијих дјела свјетске књижевности. Подијељена је на три дијела: *Пакао*, *Чистилиште* и *Рај*. Данте је на *Комедији* радио све до смрти (*Рај* је објављен постхумно). У двадесет деветом издању *Комедије*, 1516. године, скоро два вијека послије Дантеове смрти, поеми је додат епитет "divina" (божанствена), који је по мишљењу многих познавалаца Дантеовог дјела изобличио његову идеју.

Данте је у *Комедији* описао модел универзума који се у литератури често назива *Дантеов универзум*. У овом раду ћемо показати да је Дантеов универзум заправо 3-сфера. Изненађујуће је што се 3-сфера, као затворени универзум (компактан, без границе), такође појављује као космолошко рјешење Ајнштајнових једначина у општој теорији релативности.

Многи аутори су, независно један од другог, примијетили да је Дантеов универзум 3-сфера. Први који је указао на ту чињеницу је руски православни теолог, свештеник, математичар, филозоф и новомученик Павле Флоренски. Он је 1922. године у својој књизи *Имагинарне величине у геометрији*[1] ([10], за енглески

Аутор је финансиран од стране Фонда за науку Републике Србије кроз пројекат ИДЕЈЕ, Grant No. 7749891, Graphical Languages - GWORDS.

[1]Највећи дио ове књиге је посвећен геометријској интерпретацији комплексних бројева. Између осталог, ту се наводи да је геометрија имагинарних бројева, предвиђена теоријом релативности за тијело које се креће брже од свјетлости, геометрија Царства божијег. Флоренски је због ове књиге 1933. године осуђен на десет година у логору за принудни рад „за објављивање агитационих материјала против совјетског система“, али је четири године касније осуђен на смрт од стране НКВД-а и погубљен.

превод в. [11]), окарактерисао Дантеов универзум као „елиптички простор“. С обзиром да је тродимензионална елиптичка геометрија изведена из геометрије коју 3-сфера наслијеђује као потпростор еуклидског простора $\mathbb{R}^4$ (в. [15], стр. 196), то заправо значи да је Дантеов универзум тополошки 3-сфера. Флоренски ([11], стр. 58) каже:

> Изгледа да је Дантеов универзум веома сличан елиптичком простору. Ова чињеница баца неочекивано свјетло на средњовјековни поглед на коначну природу свијета. Ови општи геометријски појмови имају, међутим, недавно пронађену конкретну интерпретацију унутар принципа релативности, и у складу с модерном физиком, простор мора бити представљен управо као елиптички простор и препознат као коначан, баш као што је и вријеме коначно и затворено у себе.

Поменимо овдје и књигу *Класични комади математике* из 1925. године коју је написао швајцарски математичар Андреас Шпајзер [28]. Ова књига се у литератури често (погрешно) наводи као најстарија референца у којој се Дантеов универзум интерпретира као 3-сфера. Прецизније, Шпајзер Дантеов универзум карактерише као Риманову многострукост (в. [28], стр. 54):

> Модерно речено, простор је Риманова многострукост с тачкастим извором силе који на њему индукује метрику. На супротном полу у односу на извор, наиме у центру Земље, изопачену материју прождире Сатана. Ово нам очигледно ствара аристотеловску слику простора, према којој је простор сфера коначног полупречника.

Осим ове двије књиге наведимо и референце [3–5, 8, 13, 16–27, 29, 31] у којима се такође говори о геометрији Дантеовог универзума. Примијетимо да се Шпајзерова књига [28] помиње у [4, 5, 16, 19, 20, 22, 24, 26] (у [4] и [20] се експлицитно каже да је то најстарија референца у којој се наводи да је Дантеов универзум 3-сфера). С друге стране, Флоренски се (иако је његова књига три године старија од Шпајзерове), цитира само у [3, 6, 23, 24]. Ово се можда може приписати томе што је поменута књига Флоренског први пут преведена с руског 2016. године (преведена је на француски, а предговор је написао познати француски математичар Седрик Вилани). На енглески је преведена тек 2021. године.

Напоменимо на крају да Флоренски поштено откива да су три аутора прије њега примијетили да је Данте „предвидио нееуклидску геометрију“ ([11], стр. 56). Он наводи да су то Халстед (1905), Вебер (1905) и Симон (1912).[2] Претпостављамо да Флоренски мисли на Халстедов рад [14], гдје се наводи цитат из 13. пјевања *Раја* у коме Данте помиње троугао уписан у полукруг који нема прав угао. Међутим, у [14] се не говори ништа о геометрији Дантеовог универзума. Текстове Вебера и Симона које је Флоренски имао на уму нисмо успјели да пронађемо.

[2]George Bruce Halsted (1853–1922), амерички математичар; Heinrich Martin Weber (1842–1913), њемачки математичар и Maximilian Simon (1844-1918), њемачки историчар математике

2. 3-сфера

У овом одјељку ћемо дефинисати 3-сферу и представити неколико начина да се она конструише од једноставнијих објеката. Међутим, прије него што то урадимо, навешћемо један цитат Алберта Ајнштајна, у коме не само да се илуструје значај 3-сфере, него се признаје и изазов који чека оне који желе да разумију тај појам. Наиме, Ајнштајн у својој књизи *Идеје и мишљења* [9] каже:

> Из посљедњих резултата теорије релативности је вјероватно да је наш тродимензионални простор такође приближно сферни, то јест, да закони кретања чврстих тијела у њему нису дати еуклидском геометријом, него приближно сферном геометријом, само ако узмемо у обзир дијелове простора који су довољно велики. Ово је сада мјесто гдје машта читаоца бива запрепаштена. „Нико не може замислити ту ствар“, вришти он огорчено. „То се може рећи, али се не може замислити. Могу замислити сферну површ довољно добро, али ништа слично томе у три димензије.“ Морамо покушати да савладамо ову препреку у уму, а стрпљив читалац ће видјети да је то без сумње посебно тежак задатак.

По аналогији с класичном, 2-димензионалном сфером, *3-сферу* можемо дефинисати као скуп тачака у 4-димензионалном Еуклидском простору подједнако удаљених од неке фиксне тачке. На примјер, 3-сфера са центром у координатном почетку полупречника 1 (јединична 3-сфера) је скуп свих тачака $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ које задовољавају једначину

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1.$$

Уобичајена ознака за 3-сферу је S^3. Често је згодно да сферу S^3 замислимо као сљедећу у низу сфера мањих димензија, које називамо 0-сфера, 1-сфера и 2-сфера, и означавамо са S^0, S^1 и S^2. Тако имамо да су јединичне сфере мањих димензија дате сљедећим једначинама:

$$\begin{aligned} S^0 &: \quad x^2 = 1 \\ S^1 &: \quad x^2 + y^2 = 1 \\ S^2 &: \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{aligned}$$

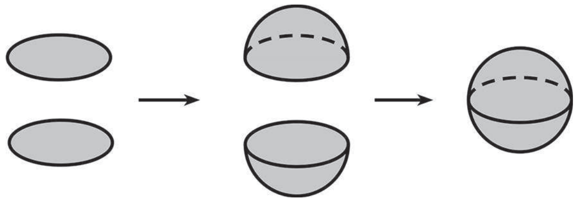
Примијетимо да сферу S^0 чине само двије тачке (1 и -1), док је сфера S^1 заправо кружница. Пошто је 3-сфера смјештена у 4-димензионални простор, немогуће је да је директно „видимо“. Међутим, ипак постоје начини да се 3-сфера визуализује. У наставку ћемо представити неке од тих начина.

Први начин је да замислимо пресјек 3-сфере и хиперравни $t = t_0$. То је скуп тачака (x, y, z) које задовољавају једначину

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 - t_0^2, \tag{1}$$

што је за $t_0 \in (-1, 1)$ у ствари 2-сфера. Када t_0 расте од -1 до 1, добијамо фамилију 2-сфера чији полупречник расте од 0 до 1, а затим се опет „скупља“ у 0. Дакле, 3-сферу можемо замислити као фамилију 2-сфера датих једначином (1), за $t_0 \in (-1, 1)$. Примијетимо да на потпуно исти начин 2-сферу можемо

„исјећи" равнима на 1-сфере (кружнице), док 1-сферу можемо „исјећи" правим на 0-сфере.



Сл. 1. Лијепљење два диска D^2 по граници

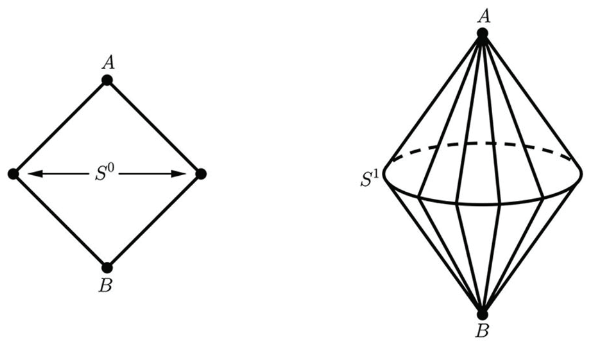
Да бисмо описали други начин да визуализујемо 3-сферу, прво ћемо дефинисати *3-диск*. Наиме, (јединични) 3-диск D^3 (пуна лопта) је скуп тачака $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ за које важи

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1.$$

Сада 3-сферу можемо тополошки конструисати лијепљењем два диска D^3 по њиховој граници (што је сфера S^2). Примијетимо да је и ова конструкција аналогна конструкцији у мањим димензијама. С обзиром да су 1-диск D^1 и 2-диск D^2 дати неједначинама

$$D^1: \quad x^2 \leqslant 1,$$
$$D^2: \quad x^2 + y^2 \leqslant 1,$$

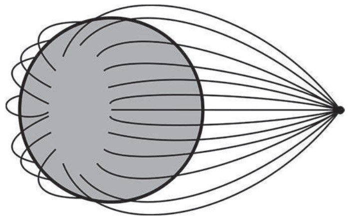
имамо да се сфера S^2 добија лијепљењем два диска D^2 по њиховој граници S^1 (в. слику 1), док се сфера S^1 добија лијепљењем два диска D^1 (двије дужи) по њиховој граници S^0.



Сл. 2. Суспензије сфера S^0 и S^1

Трећи опис 3-сфере који ћемо представити има везе с једном конструкцијом у топологији која се назива суспензија. Неформално, да бисмо добили суспензију неког простора X, прво додамо двије нове тачке (рецимо A и B), а затим сваку тачку простора X спојимо с тим тачкама. На тај начин добијамо нови простор који називамо *суспензија* простора X и означавамо га са SX. Сликовито говорећи, простор SX „виси" између тачака A и B (ријеч суспензија потиче од латинске ријечи *suspendere*, што значи *висити*). На примјер, суспензије сфера S^0 и S^1 су дате на слици 2. Видимо да је суспензија сфере S^0 сфера S^1, док је суспензија сфере S^1 сфера S^2 (тополошки).

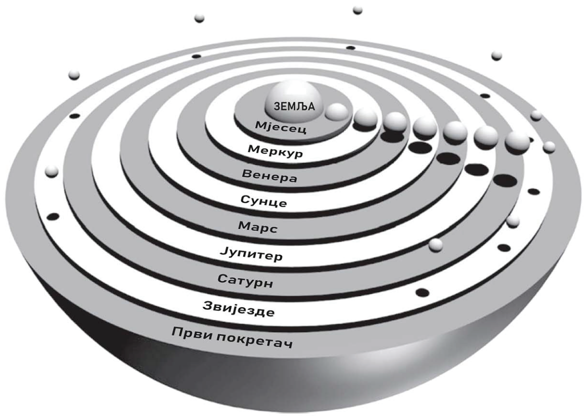
По аналогији с претходним, сферу S^3 можемо добити као суспензију сфере S^2. Ако желимо да визуализујемо ову конструкцију, треба да изаберемо гдје ћемо, у односу на сферу S^2, ставити двије нове тачке. Да бисмо избјегли тачке самопресјека, можемо замислити да се једна од те двије тачке налази у унутрашњости сфере S^2, док се друга налази споља (в. слику 3).



Сл. 3. Суспензија сфере S^2

3. Дантеов универзум

У овом одјељку ћемо дати детаљан опис Дантеовог универзума и показати да се он може интерпретирати као 3-сфера. Дантеов универзум чине двије „компоненте" – *Аристотелов универзум* и *Емпиреј*. Стога, да бисмо разумјели како Данте конструише свој универзум, прво ћемо се упознати са овим појмовима.



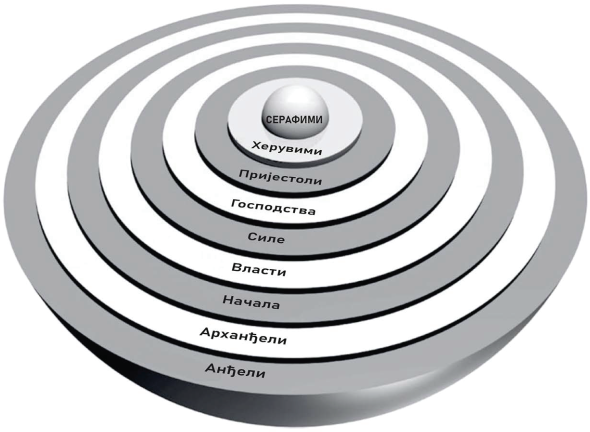
Сл. 4. Аристотелов универзум

Аристотеловим универзумом називамо модел универзума који је био доминантан у античкој Грчкој. Грци су вјеровали да универзум треба да осликава геометријско савршенство кругова и сфера и замислили су простор организован као систем сфера. Земља је непокретна и налази се у самој унутрашњости, окружена с девет концентричних „небеских" сфера које носе позната небеска тијела (в. слику 4).

Крајња (девета) концентрична сфера је *Primum Mobile* (*Први покретач* или *Прво покретно небо*). Она се окреће од истока према западу око Земље, што доводи до тога да се сва небеска тијела окрећу око Земље. Дакле, кретање Сунца, Мјесеца, планета и звијезда се приписује кретању сфера које их носе, а Први покретач их све контролише.

С друге стране, према [30], Емпиреј (грч. $\varepsilon\mu\pi\upsilon\rho o\varsigma$ – у пламену) је „најузвишенији део неба, испуњен светлошћу и ватром, боравиште богова (по грчком) или светитеља (по хришћанском веровању)“. Данте даје Емпиреју врло детаљну и прецизну геометријску структуру, коју описује у 28. пјевању *Раја*.

Ова структура је повезана с хијерархијом анђела, која потиче од Псеудо-Дионисија Ареопагита, теолога из 5. вијека чији идентитет још увијек није до краја утврђен[3], али који је писао на грчком језику. Његова књига *О небеској јерархији* представља темељ хришћанског учења о духовним небеским бићима. Он је анђеле подијелио у три чина, а сваки чин у три реда. Серафими, Херувими и Пријестоли су анђели првог чина, другог чина су Господства, Силе и Власти, а трећег чина су Начала, Арханђели и Анђели. У 28. пјевању, Данте описује Емпиреј као сферу у чијем центру се налази Бог, окружен с девет концентричних (анђеоских) сфера које представљају анђеоске редове (в. слику 5).

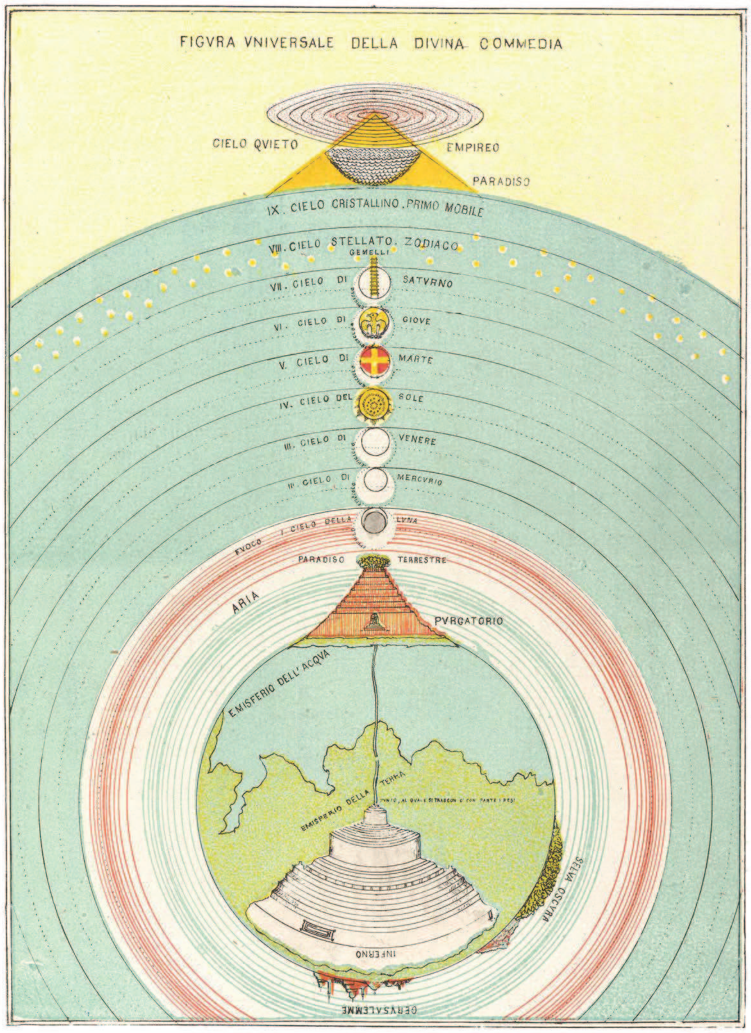


Сл. 5. Емпиреј

Да бисмо објаснили како Данте конструише свој универзум помоћу Аристотеловог универзума и Емпиреја, потребно је да се осврнемо на његово путовање описано у *Комедији* (в. слику 6). Наиме, Данте и његов водич Вергилије крећу на путовање из „мрачне шуме“ (негдје у Фиренци), одакле започињу спуштање низ литице Пакла. Пакао је описан као провалија у облику лијевка (на слици 6 „мрачна шума“ се налази на десној страни тог лијевка).

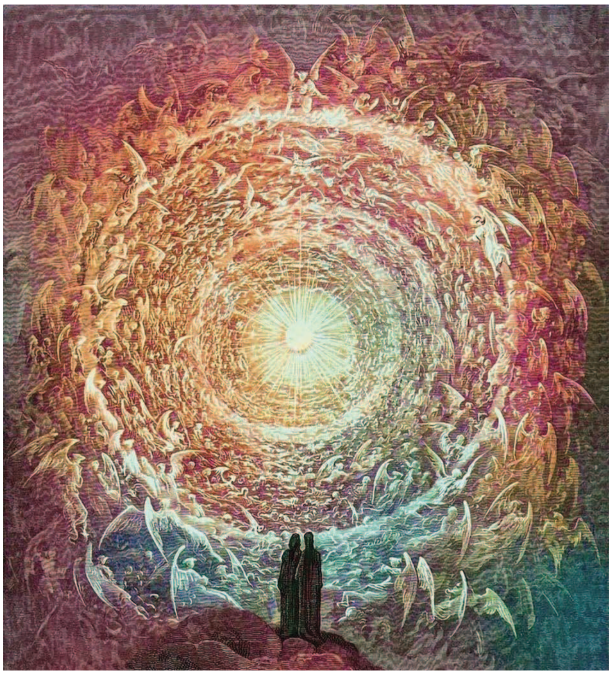
Лијевак се завршава у центру Земље, гдје се у најужем кругу Пакла налази Луцифер. Након што прођу кроз центар Земље, Данте и Вергилије настављају да се крећу кроз ходник који води ка површини Земље. Тако долазе до планине чистилишта која се налази на јужној хемисфери, дијаметрално супротно од Јерусалима. Затим се успињу на врх планине чистилишта, гдје почиње први круг Раја. Ту се Данте опрашта од Вергилија, јер он као паганин не може да уђе у Рај. Умјесто Вергилија, Дантеа дочекује Беатриче која га води кроз девет кругова Раја. Они прво пролазе кроз све „небеске“ сфере Аристотеловог универзума, а затим долазе до Првог покретног неба са кога посматрају Емпиреј (в. илустрацију Гистава Дореа на слици 7).

[3]Према неким истраживањима ради се о Петру Иверском, грузијском принцу и епископу Мајума код Газе.



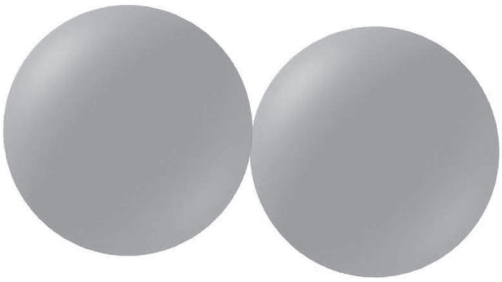
Сл. 6. Дантеово путовање

Нема назнака да се Данте и Беатриче док посматрају Емпиреј налазе на некој посебној тачки, него се по свој прилици поглед на Емпиреј пружа из било које тачке Првог покретног неба. Дакле, Емпиреј „окружује“ Аристотелов универзум, то јест, свакој тачки на граници Аристотеловог универзума одговара тачно једна тачка на граници Емпиреја, и обратно. Другим ријечима, Данте *лијепи* Аристотелов универзум (3-диск чија је граница Прво покретно небо) и Емпиреј (3-диск чија је граница прва анђеоска сфера) по њиховим границама. Јасно је да на овај начин, према конструкцији описаној у претходном одјељку добијамо 3-сферу. Примијетимо да на овај начин Данте добија универзум *без границе*, за разлику од Аристотеловог универзума који има границу. На слици 8



Сл. 7. Данте и Беатриче загледани у Емпиреј

видимо како изгледа лијепљење једне тачке на граници Аристотеловог универзума с једном тачком на граници Емпиреја. Тачка додира двије лопте на слици 8 је управо мјесто са кога Данте и Беатриче посматрају Емпиреј на слици 7.



Сл. 8. Лијепљење Аристотеловог универзума и Емпиреја

Примијетимо такође да Данте крећући из центра Земље пролази кроз сфере чији полупречници постају све већи и већи, док не дође до Првог покретног неба које је сфера највећег полупречика. Затим пролази кроз анђеоске сфере Емпиреја, чији полупречници постају све мањи и мањи, да би се на крају посљедња сфера „скупила“ у једну тачку. Видимо да ово одговара опису 3-сфере као фамилије 2-сфера из претходног одјељка.

Осврнимо се сада на запажање из рада [25] у коме аутор примјећује аналогију између конструкције Дантеовог универзума и суспензије као тополошке конструкције. Наиме, он се позива на сљедећи цитат из 28. пјевања *Раја* (в. [2], превод К. Мићевић):

> Моја тад дама, видевши ме чела
> брижног од сумње, каза: „Од те тачке
> зависи небо и природа цела.
> Гле круг што уз њу свија своје зрачке;
> и знај да кретња брза му је тако
> јер прима снагу љубави дугачке.“

Аутор уочава да су италијанска ријеч *depende* (у горњем цитату преведена са *зависи*, исто као и у преводу Д. Мраовића, в. [1]) и латинска ријеч *suspendere* (од које потиче термин *суспензија*) етимолошки скоро идентичне. Примијетимо да и у српском преводу имамо очигледну сличност између ријечи „висити“ и „зависити“.

Дакле, посматран као суспензија, Дантеов универзум је изванредна метафора: Земља (посматрана као S^2) „виси“ између Бога и Сатане (у центру Земље), при чему настаје универзум S^3. Примијетимо такође да је Дантеов универзум симетричан у односу на свој екватор (Прво покретно небо). На примјер, Бог и Сатана не само да се налазе на супротним половима, него су и њихове *околине* симетричне у односу на екватор универзума: девет анђеоских сфера се рефлексијом у односу на екватор пресликава у девет кругова пакла.

Примијетимо да у претходним разматрањима Дантеов универзум посматрамо само *тополошки*, дакле, занемарујући његове особине које се тичу растојања, углова итд. Имајући на уму Дантеово путовање, Шпајзер ([28], стр. 58) примјећује:

> Из његовог описа увијек знамо гдје се тачно налази и у ком правцу се тренутно креће, читава компликована просторна структура је потпуно јасна његовој визији; с друге стране, растојања су скоро увијек нејасна и информације у том погледу су контрадикторне.

4. Ајнштајнов универзум

Као што смо напоменули у уводу, постоји неочекивана веза између Дантеовог универзума и савремене космологије. Ајнштајн је 1917. године предложио модел за простор-вријеме познат као *Ајнштајнов универзум* у коме је цјелокупност физичког простора коначна, закривљена и без границе. (Напоменимо да идеја коначног и закривљеног простора без границе заправо потиче од Римана[4]; Ајнштајн је ту идеју преузео и уградио у своје теорије, в. [20], Поглавље V.) Један

[4]Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866), њемачки математичар, један од највећих математичара у историји. Дао је фундаменталне доприносе у анализи, диференцијалној геометрији и аналитичкој теорији бројева. Познат је по својој хипотези о нулама зета-функције, која по мишљењу многих математичара представља најважнији отворени проблем математике.

од водећих физичара 20. вијека, Макс Борн, рекао је да је то „једна од највећих идеја о природи свијета која је икада смишљена", док Теодор Франкел у [12] каже: „Ништа у општој релативности није заинтригирало лаичку јавност више него Ајнштајнова могућност затвореног, коначног просторног универзума". У Ајнштајновом универзуму, простор може бити математички описан као 3-сфера фиксираног полупречника, док вријеме нема почетак: оно је бесконачно у оба смјера, тако да је универзум одувијек постојао и увијек ће постојати. Стога, Ајнштајнов универзум може бити представљен као Декартов производ $\mathbb{R} \times S^3$, гдје је $\mathbb{R}$ реална временска права (в. [7]).

Аутор у [25] запажа везу између Дантеовог и Ајнштајновог универзума:

> Вјеровање да Земља мора бити округла сеже бар до Аристотела. [. . .] Вјеровање да универзум у цјелини мора бити округао (или општије закривљен) много је новијег датума. Изгледа да је потребна математика 19. вијека (нееуклидска геометрија) чак и да се тај појам формулише. Стога је прилично изненађење пронаћи, при пажљивијем читању, да Дантеова космологија није тако геометријски једноставна као што се чини на први поглед, него заправо изгледа да је то такозвани „затворени" универзум, 3-сфера, универзум који се такође појављује као космолошко рјешење Ајнштајнових једначина у општој теорији релативности.

Сличо примјећује и Флоренски (в. његов цитат у уводу). Међутим, интересантно је да Флоренски иде даље од већине аутора који се баве овом темом; он не само да карактерише Дантеов универзум као елиптички простор, него анализира и *површ* по којој се Данте креће. Наиме, он каже ([11], стр. 58):

> Постаје очигледно да је ова површ: 1) *Риманова* површ, пошто садржи затворене праве линије; и 2) *једнострана*, јер се нормала крећући се дуж ње окреће наопако.[5] Ове двије чињенице су довољне да окарактеришемо Дантеов простор као простор који је *конструисан у складу са елиптичком геометријом.*

Дакле, Флоренски уочава да је површ по којој се Данте креће *неоријентабилна.* Наиме, подсјетимо се да се Данте прво *спушта* до центра Земље, а затим, када прође кроз ту тачку, почиње да се *успиње* ка површини. Док се спушта, његове ноге су усмјерене ка центру Земље, а када прође центар Земље и почне да се успиње, његове ноге су усмјерене ка површини Земље. Другим ријечима, он се у центру Земље „окренуо наопачке". У 34. пјевању *Пакла* Данте описује како он и Вергилије напуштајући Пакао виде Луцифера коме су ноге окренуте горе, а глава доле (в. слику 9).

Подсјетимо се такође да Данте завршава путовање у истој тачки из које је кренуо, при чему се дошавши у ту тачку налази у истом положају као на почетку (с ногама усмјереним ка центру Земље). Дакле, он се креће по затвореној кривој на којој је једном промијенио оријентацију и дошавши у почетну тачку налази се

[5] По своj прилици овдје се мисли на реалну пројективну раван $\mathbb{R}P^2$.

Сл. 9. Данте и Вергилије напуштају Пакао

у истом положају као на почетку путовања. То управо значи да је површ по којој се Данте креће неоријентабилна.

На крају, умјесто закључка, наведимо посљедњу реченицу Павла Флоренског из [11]: „Дакле, надилазећи вријеме, *Божанствена комедија* се неочекивано налази *испред*, а не иза савремене науке".

Захвалница

Хвала Милошу Миловановићу што ми је скренуо пажњу на ову интересантну тему, Милану Зекићу што ми је набавио књигу *Klassische Stücke der Mathematik* [28] и Ненаду Еркићу на помоћи око уређивања слика.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. Алигијери, *Божанствена комедија* (превео Д. Мраовић), Дерета, Београд, 2001.

[2] Д. Алигијери, *Комедија* (превео К. Мићевић), Рад, Београд, 2007.

[3] D. A. Bayuk, C. E. Ford, *Dante's cosmology revisited*, Archives Internationales d'Histoire des Sciences **58** (2008), 69–88.

[4] M. Bersanelli, *From Dante's universe to contemporary cosmology*, Istituto Lombardo (Rendiconti di Scienze) **150** (2016), 147–165.

[5] J. J. Callahan, *The Curvature of Space in a Finite Universe*, Scientific American **235** (1976), 90–101.

[6] M. Chase, *Pavel Florensky on space and time*, Schole **9** (2015), 105–118.

[7] A. Daigneault, A. Sangalli, *Einstein's static universe: An idea whose time has come back?*, Notices of the American Mathematical Society **48** (2001), 9–16.

[8] W. Egginton, *On Dante, hyperspheres, and the curvature of the medieval cosmos*, Journal of the History of Ideas **60** (1999), 195–216.

[9] A. Einstein, *Ideas and Opinions*, Crown Publishers, New York, 1954.

[10] П. Флоренский, *Мнимости в геометрии*, Издательство Поморье, Москва, 1922.

[11] P. Florenskiĭ, *Imaginaries in Geometry*, Mimesis International, 2021.

[12] T. Frankel, *Gravitational Curvature: An Introduction to Einstein's Theory*, W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1979.

[13] É. Ghys, *A Singular Mathematical Promenade*, ENS Éditions, Lyon, 2017.

[14] G. B. Halsted, *Easy non-Euclid*, The Monist **19** (1909), 399–402.

[15] M. P. Hitchman, *Geometry with an Introduction to Cosmic Topology*, CreateSpace Independent Publishing Platform, 2018.

[16] S. L. Lipscomb, *Art Meets Mathematics in the Fourth Dimension*, Springer, 2014.

[17] G. Mazzotta, *Cosmology and the Kiss of Creation (Paradiso 27-29)*, Dante Studies, with the Annual Report of the Dante Society, No. 123, The Johns Hopkins University Press (2005), 1–21.

[18] C. McMullen, *The evolution of geometric structures on 3-manifolds*, Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society **48** (2011), 259–274.

[19] D. O'Shea, *The Poincare Conjecture: In Search of the Shape of the Universe*, Walker & Company, New York, 2007.

[20] R. Osserman, *Poetry of the Universe: A Mathematical Exploration of the Cosmos*, Anchor Books, New York, 1996.

[21] R. Osserman, *Curved Space and Poetry of the Universe*, The book of the cosmos: Imagining the universe from Heraclitus to Hawking (ed. D. R. Danielson), Perseus Publishing (2000), 350-355.

[22] I. Ozsváth, E. L. Schücking, *The world viewed from outside*, Journal of Geometry and Physics **24** (1998), 303–333.

[23] A. Papadopoulos, *Pavel Florensky and His World*, Handbook of the History and Philosophy of Mathematical Practice (ed. B. Sriraman), Springer (2023), 1–67.

[24] A. Papadopoulos, *Some footnotes on Thurston's Notes "The Geometry and Topology of 3-manifolds"*, In the Tradition of Thurston III (eds. K. Ohshika, A. Papadopoulos), Springer (2024), 423–447.

[25] M. A. Peterson, *Dante and the 3-sphere*, American Journal of Physics **47** (1979), 1031–1035.

[26] M. A. Peterson, *The geometry of Paradise*, The Mathematical Intelligencer, **30** (2008), 14–19.

[27] C. Rovelli, *Michelangelo's stone: an argument against platonism in mathematics*, European Journal for Philosophy of Science **7** (2017), 285–297.

[28] A. Speiser, *Klassische Stücke der Mathematik*, Orell Füssli, Zürich, 1925.

[29] T. Sunada, *From Euclid to Riemann and beyond: how to describe the shape of the universe*, Geometry in History (eds. S. G. Dani and A. Papadopoulos), Springer (2019), 213–304.

[30] M. Vujaklija, *Leksikon stranih reči i izraza*, Prosveta, Beograd, 1980.

[31] M. Wertheim, *The Pearly Gates of Cyberspace: A History of Space from Dante to the Internet*, W. W. Norton & Company, New York, 1999.

Математички институт Српске академије наука и уметности, Београд, Србија

mzekic@mi.sanu.ac.rs