Др Владимир Мићић

ДИРИХЛЕОВ ПРИНЦИП[1]

Нека су k, n, p природни бројеви. Ако $kn+p$ куглица треба распоредити у n кутија, онда насигурно постоји кутија у коју ће бити смештена бар $k+1$ куглица.

Ово тврђење, које се може доказати (а интуитивно је оно очигледно), познато је у математици као *Дирихлеов принцип*[2]. Он се често исказује и у шаљивој форми као „проблем седам зечева“ и у тој форми гласи: Ако седам зечева треба сместити у три кавеза, онда мора постојати кавез у који ће бар три зеца бити смештена.

Овај се принцип веома успешно примењује у разним проблемима. Начин закључивања, који лежи у основи Дирихлеовог принципа, може се применити и у ситуацијама које, бар наизглед, немају никакве сличности са кутијама и зечевима. Надамо се да ће низ задатака који следи илустровати снагу тог принципа и да ће читалац, који успешно реши те задатке, самостално (што је свакако боље) или уз помоћ приложених решења, бити оспособљен да Дирихлеов принцип користи у даљем раду.

1. Доказати да се од произвољних $n+1$ целих бројева могу изабрати два броја чија је разлика дељива са n.

При дељењу са n цели бројеви могу давати остатке 0, 1, 2, ... , $n-1$. Због тога, при дељењу са n, посматраних $n+1$ бројева дају $n+1$ остатака, који могу узимати вредности 0, 1, 2, ... , $n-1$. Пошто има укупно n различитих могућих остатака, а $n+1$ остатак, на основу Дирихлеовог принципа закључујемо да морају постојати бар два једнака броја међу остацима. Но, ако два цела броја при дељењу са n дају једнаке остатке, онда је разлика тих бројева дељива са n. Заиста, ако је $a = pn + r$, $b = qn + r$, онда је

$$a - b = (p-q)n = kn,$$

што је и требало доказати.

[1] Ово је репринт чланка објављеног 1976. године у оквиру свеске 8 едиције Материјали за младе математичаре Друштва математичара, физичара и астронома Србије, прве од како је Владимир Мићић постао њен уредник. Целу свеску је професор Мићић сам откуцао на обичној писаћој машини, а математичке формуле уписао руком (на крају овог чланка је скенирана прва страница оригинала) [прим. уред.].

[2] P. L. Dirchlet (1805–1859), познати француско-немачки математичар

2. Доказати да у произвољном скупу људи постоје бар два човека који међу члановима тог скупа имају исти број познаника.

Нека у посматраном скупу има n људи. Ако међу њима постоји човек који нема ниједног познаника у том скупу, онда у скупу не постоји човек који међу члановима скупа има $n-1$ познаника. Дакле, у том случају чланови тог скупа могу имати $0, 1, 2, \dots, n-2$ познаника, што значи да све чланове скупа можемо, с обзиром на број познаника, поделити на $n-1$ класу, стављајући у исту класу чланове скупа који имају исти број познаника. То значи да n људи треба поделити на $n-1$ класу. На основу Дирихлеовог принципа закључујуемо да онда постоји класа у којој ће се наћи бар два члана скупа. Они међу члановима скупа имају исти број познаника.

Ако међу члановима нашег скупа не постоји човек који међу члановима скупа нема ниједног познаника, онда чланови скупа могу имати $1, 2, \dots, n-1$ познаника. Добијамо опет $n-1$ класу у коју треба распоредити n људи, па закључујемо да и у овом случају постоје бар два члана скупа који међу члановима тог скупа имају исти број познаника.

3. Доказати да за сваки природан број n постоји најмање један број облика $111\dots11000\dots00$, написан помоћу извесног броја јединица а затим извесног броја нула (у декадном запису), који је дељив са n.

Посматрајмо $n+1$ број $1, 11, 111, \dots, \underbrace{111\dots1}_{n+1}$. Међу њима постоје бар два броја чија је разлика дељива са n (види 1. задатак). Разлике ових бројева су бројеви који се у декадном систему записују у облику $111\dots11000\dots00$, чиме је тврђење задатка доказано.

4. Доказати да постоји природан број који је дељив са 1975 а првих десет цифара су му 1234567890.

Посматрајмо 1976 бројева

$$\begin{aligned} x_1 &= 1234567890, \\ x_2 &= 12345678901234567890, \\ &\dots \\ x_{1976} &= 12345678901234567890\dots1234567890 \qquad \text{(1976 пута)}. \end{aligned}$$

Међу њима постоје два броја чија је разлика дељива са 1975. Та разлика је број чијих је првих десет цифара 1234567890.

5. Доказати да се међу $n+1$ различитих природних бројева мањих од $2n$ могу изабрати три таква броја да један од њих буде једнак збиру остала два.

Нека су то бројеви

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n < a_{n+1}.$$

Посматрајмо бројеве $a_2 - a_1,\ a_3 - a_1,\ \dots,\ a_{n+1} - a_1$ (има их n) и бројеве a_1, a_2, … , a_n (њих је такође n). На тај начин смо добили $2n$ природних бројева мањих од $2n$. Међу њима ће постојати два једнака броја. Та два броја припадају различитим групама. Нека су то бројеви $a_k - a_1$ и a_m. Онда је $a_k = a_1 + a_m$, чиме је тврђење доказано.

6. Дато је 20 различитих природних бројева мањих од 70. Доказати да међу свим могућим разликама тих бројева постоје бар четири једнаке.

Нека су то бројеви

$$m_1 < m_2 < m_3 < \cdots < m_{18} < m_{19} < m_{20}.$$

Посматтајмо низ разлика бројева m_2, m_3, … , m_{20} и бројева који има претходе. Добијамо бројеве

$$m_2 - m_1,\ m_3 - m_2,\ m_{19} - m_{18},\ \dots,\ m_{20} - m_{19}.$$

Ако међу свим могућим разликама нема бар четири једнаке, онда ни међу сада добијених 19 разлика не може бити четири једнаке. Због тога међу ових 19 бројева има највише три јединице, највише три двојке, тројке, четворке, петице, шестице и бар једна од њих није мања од седам. Добијамо да је

$$\begin{aligned} m_{20} - m_1 &= (m_{20} - m_{19}) + (m_{19} - m_{18}) + \cdots + (m_3 - m_2) + (m_2 - m_1) \\ &\geqslant 3(1 + 2 + \cdots + 6) + 7 = 70. \end{aligned}$$

Ово је немогућно, јер су m_1 и m_{20} природни бројеви мањи од 70 па њихова разлика мора бити мања од 70.

7. Ако k природних бројева поређамо на произвољан начин у низ, онда постоји известан број узастопних чланова тог низа чији је збир дељив са k.

Нека су то бројеви n_1, n_2, … , n_k. Посматрајмо збирове

$$\begin{aligned} S_1 &= n_1, \\ S_2 &= n_1 + n_2, \\ S_3 &= n_1 + n_2 + n_3, \\ &\dots \\ S_k &= n_1 + n_2 + \cdots + n_k. \end{aligned}$$

Ако је један од ових збирова дељив са k, тврђење је доказано. Ако то није случај, онда при дељењу ових k збирова са k добијамо највише $k-1$ различитих остатака (0 се не добија као остатак), дакле, морају међу остацима постојати два једнака броја. Онда је разлика одговарајући збирова дељива са k. Нека су то збирови S_i и S_j $(i > j)$. Њихова разлика је

$$S_i - S_j = n_{j+1} + n_{j+2} + \cdots + n_i.$$

Видимо да је ова разлика збир узастопних чланова нашег низа, чије је постојање требало доказати.

8. Ученик у току године решава задатке из математике. Он сваког дана реши бар један задатак али, да се не би преморио, у току једне седмице реши највише дванаест задатака. Доказати да постоји неколико узастопних дана у години у току којих ће ученик решити тачно двадесет задатака.

Претпоставимо да је у току првог дана ученик решио a_1 задатака, у току прва два дана a_2 задатака, ... , у току првих 77 дана a_{77} задатака. Посматрајмо бројеве

$$\begin{array}{lllll} a_1, & a_2, & a_3, & \ldots, & a_{77}, \\ a_1+20, & a_2+20, & a_3+20, & \ldots, & a_{77}+20. \end{array}$$

Овде имамо укупно 154 природна броја. Пошто је a_{77} број задатака које је ученик решио у току првих 11 седмица, имамо да је $a_{77} \leqslant 132$. Но, онда бројеви који су написани не могу бити већи од $132 + 20 = 152$, а пошто их је 154, међу њима сигурно постоје бар два једнака броја. Бројеви у првој врсти морају бити различити (због тога што је ученик сваког дана решио бар један задатак) па су и бројеви у другој врсти сви различити. Онда преостаје само могућност да је неки од бројева из прве врсте једнак неком од бројева из друге врсте, дакле да је за неке k и l испуњено

$$a_k = a_l + 20, \quad l < k \leqslant 77,$$

одакле следи $a_k - a_l = 20$, што значи да је ученик у току $(l+1)$-ог, $(l+2)$-ог, ... , k-тог дана решио тачно двадесет задатака, што је и требало доказати.

9. Дата је $2k + 1$ карта које су нумерисане узастопним природним бројевима од 1 до $2k + 1$. Колико се највише карата може изабрати тако да ниједан од бројева написаних на извученим картама не буде једнак збиру других двају бројева написаних на извученим картама?

Тражену особину имају карте на којима су написани бројеви $k+1$, $k+2$, ... , $2k + 1$. Докажимо да се већи број карата с траженом особином не може извући. Претпоставимо супротно да смо изабрали $k + r$ карата, $r > 1$, које задовољавају услове задатка. Нека је n највећи број написан на тим картама. Посматрајмо разлике између броја n и преосталих бројева записаних на изабраним картама. Тих је разлика $k+r-1$ а написане су на преостале $2k+1-(k+r)$ карте. Према томе, мора бити $k + r - 1 \leqslant 2k + 1 - k - r = k - r + 1$, одакле следи $r \leqslant 1$, што је немогуће због $r > 1$.

10. Посматрајмо низ четвороцифрених бројева који представљају последње четири цифре бројева 6, 6^2, 6^3, ... То је низ 0006, 0036, 0216, 1296, 7776, 6656, ... Доказати да почев од неког члана овај низ постаје периодичан.

Пошто постоји само 10^4 могућности за последње четири цифре у низу, међу њима насигурно постоје два броја који имају једнаке последње четири цифре. Нека су то бројеви 6^k и 6^{k+m} $(k, m \in \mathbf{N})$. Онда је њихова разлика дељива са 10^4, $6^{k+m} - 6^k = 10^k \cdot n$. Но, онда ће и бројеви 6^{k+p} и 6^{k+m+p} имати једнаке последње четири цифре јер је

$$6^{k+m+p} - 6^{k+p} = 6^p(6^{k+m} - 6^k) = 6^p \cdot 10^4 \cdot n$$

за свако $p \in \mathbf{N}$, односно, за свако $q \geqslant k$ је

$$6^{q+m} - 6^q = 6^{q-k} \cdot n \cdot 10^4.$$

Тиме је доказано да је посматрани низ последњих цифара бројева из нашег низа периодичан.

11. Доказати да постоји степен броја 3 чија се репрезентација у декадном систему завршава цифрама 0001.

Расуђујући као у претходном задатку закључујемо да постоје два природна броја k и m, при чему је $k > m$, таква да је

$$3^k - 3^m = 10^4 \cdot n, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Пошто је лева страна дељива са 3^m а бројеви 10^4 и 3^m су узајамно прости, број n је дељив са 3^m. Онда је

$$3^{k-m} - 1 = 10^4 \cdot s, \quad s \in \mathbf{N}.$$

Дакле, постоји број $q \in \mathbf{N}$, $q = k - m$, такав да је $3^q = 10^4 \cdot s + 1$, а декадни запис овог броја се завршава цифрама 0001.

12. Природни бројеви од 1 до $2n$ написани су у произвољном поретку а затим је испод сваког од њих написан његов редни број у том низу. Сваки је број потом сабран са својим редним бројем. Доказати да међу тако добијеним збировима постоје два броја чија је разлика дељива са $2n$.

Обележимо добијене збирове са s_1, s_2, … , s_{2n}. Претпоставимо да они при дељењу са $2n$ дају различите остатке. На тај начин бисмо онда добили $2n$ остатака 0, 1, 2, … , $2n-2$, $2n-1$. Збир тих остатака једнак је

$$\frac{2n(2n-1)}{2} = n(2n-1) = S.$$

С друге стране имамо да је

$$s_1 + s_2 + \cdots + s_{2n} = 2 \cdot \frac{2n(2n+1)}{2} = 2n(2n+1) = T$$

јер то, у ствари, представља двоструки збир бројева 1, 2, 3, … , $2n$. Разлика сваког броја s_k и остатка који се добија кад се он дели са $2n$ дељива је са $2n$. Због тога је и разлика $T-S$ дељива са $2n$. Међутим, непосредним израчунавањем добијамо

$$T - S = 2n(2n+1) - n(2n-1) = n(2n+3),$$

дакле, број који није дељив са $2n$, што је немогућно. Према томе, не могу сви остаци бити различити.

13. Доказати да међу произвољних девет узаатопних природних бројева постоји бар један број који је узајамно прост са сваким од преосталих осам бројева.

Разлика произвољна два од девет узатопних бројева је највише једнака 8. Ако је q заједнички делилац бројева a и b, онда је и разлика $a - b$ дељива са q, одатле закључујемо да међу простим заједничким делиоцима наших бројева могу бити само бројеви 2, 3, 5, 7. Међу девет узастопних природних бројева може бити или четири парна или пет парних бројева. Пошто је од два узастопна цела броја дељива са 3, 5 или 7, један паран, закључујемо да међу посматраним бројевима има највише два непарна броја дељива са 3 и највише по један непаран број дељив са 5 или са 7.

Ако међу посматраним бројевима има четири парна, а међу њима, као што смо видели, може бити само два непарна броја дељива са 3 и по један непаран број дељив са 5 или са 7, закључујемо да насигурно постоји међу нашим бројевима непаран број који није дељив ни са 3 ни са 5 ни са 7, дакле узајамно је прост са осталих осам бројева.

Ако је међу непарним бројевима само један дељив са 3, онда на исти начин закључујемо да постоји број који је узајамно прост са преосталих осам бројева.

Ако међу посматраних девет бројева има пет парних а међу непарним бројевима су два дељива са 3 (онда парни бројеви морају бити први, трећи, пети, седми и девети а са 3 су дељиви непарни бројеви на другом и осмом месту), тада четврти или шести број није дељив са 5. Он није дељив ни са 2 ни са 3, а разликује се од осталих посматраних бројева највише за 5, па не може ни са једним имати заједнички делилац 7. Дакле, у том је случају ово тражени број.

14. Дат је скуп који се састоји од произвољних 10 различитих двоцифрених природних бројева. Доказати да постоје два непразна дисјунктна подскупа тог скупа, таква да је збир елемената у једном од тих подскупова једнак збиру елемената у другом од њих,

Дати скуп од 10 елемената има $2^{10} - 1 = 1023$ непразна подскупа. Највећа могућа вредност збира елемената у неком од тих подскупова једнака је

$$99 + 98 + \cdots + 91 + 90 = 945,$$

док је најмања могућа вредност тог збира једнака 10. Према томе, постоји укупно 936 могућих збирова. Пошто је $936 < 1023$, на основу Дирихлеовог принципа закључујемо да морају постојати два различита подскупа који имају једнак збир елемената. Али, ти подксупови могу имати непразан пресек. У таквом случају одбацићемо из оба од њих заједничке елементе. Тиме ће се збир елемената у оба подскупа умањити за исту вредност, па ће збирови у добијеним, дисјунктним подскуповима датог скупа бити једнаки, чиме је тврђење задатка доказано.

15. У квадрат странице 1 на произвољан начин је смештена 51 тачка. Доказати да постоје три тачке међу њима које се могу прекрити кругом полупречника $\frac{1}{7}$.

Поделимо квадрат на 25 једнаких квадрата странице $\frac{1}{5}$. На основу Дирихлеовог принципа закључујемо да међу њима мора постојати такав квадрат у коме се, или на његовим страницама, налази бар три од смештене 51 тачке. Пошто је

$$\frac{2}{7} > \frac{1}{5}\sqrt{2},$$

тај се квадрат може прекрити кругом полупречника $\frac{1}{7}$, што је и требало доказати.

16. Шума има облик квадрата површине $1\,\mathrm{km}^2$. У њој расте 4500 борових стабала пречника $50\,\mathrm{cm}$. Доказати да у тој шуми постоји правоугаона површина димензија $10\,\mathrm{m} \times 20\,\mathrm{m}$ на којој нема ниједног стабла.

Дати квадрат можемо поделити на 4560 правоугаоника димензија $10\,\mathrm{m}\times 20\,\mathrm{m}$ тако да између њих остану траке ширине веће од $50\,\mathrm{cm}$. Ма како да су распоређена стабла у шуми, преостаће бар 60 оваквих правоугаоника у којима неће бити ниједно стабло.

17. Неспретни ученик мастилом је забрљао лист хартије облика правоугаоника димензија $21\,\mathrm{cm} \times 30\,\mathrm{cm}$ тако да је укупна површина свих мрља једнака $314\,\mathrm{cm}^2$. Доказати да постоје две тачке у правоугаонику, симетричне према једној од симетрала правоугаоника, које се не налазе у избрљаном делу листа.

Претпоставимо да је ученик брзо реаговао и савио лист по једној од симетрала. Онда ће се мрља пресликати симетрично у односу на ту симетралу а површина избрљаног дела ће се повећати, и то највише удвостручити, па ће након тога површина избрљаног дела бити највише једнака $628\,\mathrm{cm}^2$. Површина правоугаоника је $630\,\mathrm{cm}^2$ па ће још још увек остати бар $2\,\mathrm{cm}^2$ неизбрљане површине. Она је распоређена симетрично према посматраној симетрали па, према томе, постоје две тачке, симетричне у односу на ту симетралу, које се не налазе у избрљаном делу листа.

18. На бесконачном листу хартије дато је произвољних n тачака $A_1, A_2, \dots, A_n$, таквих да је раздаљина између било које две тачке већа од $2\,\mathrm{cm}$ ($d(A_i, A_j) > 2$ за $i \neq j$, $i, j = 1 \dots, n$). Мастилом је избрљан део листа тако да је укупна површина свих мрља мања од $\pi\,\mathrm{cm}^2$. Доказати да постоји вектор $\vec{v}$ са интензитетом који није већи од 1 ($|\vec{v}| \leqslant 1$), такав да се после транслације датог система тачака за вектор $\vec{v}$ ниједна од тих тачака неће више налазити у избрљаном делу листа.

Опишимо око сваке од датих тачака круг с полупречником $1\,\mathrm{cm}$. Уочимо затим произвољну тачку из датог скупа и померимо транслаторно сваки од кругова, заједно с мрљама које се у њима налазе, тако да им се центри поклопе с уоченом тачком из скупа. Укупна површина забрљаних делова листа, која ће се при томе наћи у кругу с центром у уоченој тачки и полупречником $r = 1\,\mathrm{cm}$ није већа од укупне површине свих мрља, дакле, мања је од $\pi\,\mathrm{cm}^2$. Самим тим, у том ће кругу постојати тачка, која ће се још увек налазити у незабрљаном делу листа. Ако је то тачка M а уочена тачка из скупа A_k, онда је $\overrightarrow{A_kM}$ тражени вектор.

VLADIMIR MIĆIĆ

DIRIHLEOV PRINCIP

Neka su k, n, p prirodni brojevi. Ako $kn+p$ kuglica treba rasporediti u n kutija, onda nasigurno postoji kutija u koju će biti smeštena bar $k+1$ kuglica.

Ovo tvrđenje, koje se može dokazati (a intuitivno je ono očigledno), poznato je u matematici kao Dirihleov princip*. On se često iskazuje i u šaljivoj formi kao "problem sedam zečeva" i u toj formulaciji glasi: Ako sedam zečeva treba smestiti u tri kaveza, onda mora postojati kavez u koji će bar tri zeca biti smeštena.

Ovaj se princip veoma uspešno primenjuje u raznim problemima. Način zaključivanja, koji leži u osnovi Dirihleovog principa može se primeniti i u situacijama koje, bar naizgled, nemaju nikakve sličnosti sa kutijama i zečevima. Nadamo se da će niz zadataka koji sledi ilustrovati snagu tog principa i da će čitalac, koji uspešno reši te zadatke, samostalno (što je svakako bolje) ili uz pomoć priloženih rešenja, biti osposobljen da Dirihleov princip koristi u daljem radu.

1. Dokazati da se od proizvoljnih $n+1$ celih brojeva mogu izabrati dva broja čija je razlika deljiva sa n.

Pri deljenju sa n celi brojevi mogu davati ostatke 0, 1, 2, ..., $n-1$. Zbog toga, pri deljenju sa n, posmatranih $n+1$ celih brojeva daju $n+1$ ostataka, koji mogu uzimati samo vrednosti $0, 1, 2, \ldots, n-1$. Pošto ima ukupno n različitih mogućnih ostataka a $n+1$ ostatak, na osnovu Dirihleovog principa zaključujemo da mora postojati bar dva jednaka broja među ostacima. No, ako dva cela broja pri deljenju sa n daju jednake ostatke, onda je njihova razlika deljiva sa n. Zaista, ako je

* P.L.Dirichlet (1805. - 1859.) - poznati francusko nemački matematičar.