Др Ђорђе Баралић, мр Никола Радојичић

НЕКОЛИКО ИДЕЈА ЗА КРЕАТИВНИЈУ НАСТАВУ МАТЕМАТИКЕ

Рад припреман за ово издање часописа Настава математике настао је као плод радионица реализованих од стране аутора у претходном периоду, а доминантно захваљујући петочасовној радионици на овогодишњем Државном семинару о настави математике и информатике у организацији Друштва математичара Србије. Позитивни утисци са ове радионице су нас мотивисали да и на овај начин популаризујемо учење математике кроз игру, квизове и свима доступна наставна средства.

1. Увод

Учинити наставу математике креативнијом је озбиљан изазов. Стандардан начин учења који подразумијева вјежбу и утврђивања градива кроз рјешавање типских задатака, мора остати фундаментална основа усвајања математичких знања, али свјесни изазова да нове генерације имају све мање стрпљења за посвећивање времена вјежби, јавља се потреба да се часови и настава математике на неки начин растерете. Како то урадити, а да се не изгуби есенција математичког концепта, питање је које стоји пред свим образовним системима свијета. Но суштински помаци долазе од индивидуалног ангажмана и жеље предавача. У овом раду желимо да дамо неке од идеја како можемо ученицима понудити игру, налажење стратегије или квиз, кроз које могу да повежу, надграђују своја знања и унапређују комбинаторно мишљење и визуелизацију. У свијету у којем је притисак бирократије и оцјена, и на предавачима и на дјеци све већи, реално је препознати моменте када наше часове и рад треба да учинимо веселијим, неформалнијим и лакшим за све.

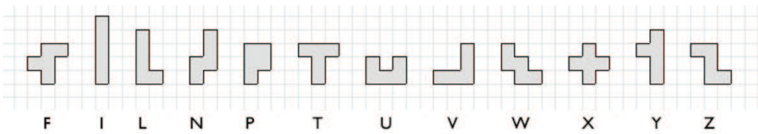
2. Дисекција и поплочавање

Први дио у поменутим радионицама даје идеје како на једноставан начин направити наставни материјал од папира. Оно што је најбитније јесте да су ресурси потребни за овакав вид наставе јако мали или трошка скоро да нема. Игре које су примјењиве уз редовно градиво и које можемо понудити ученицима, знајући да су рјешиве за вријеме трајања једног наставног часа су танграми, полиомино облици, разне врсте матрица, и др. Оне могу послужити за визуелни доказ Питагорине теореме, за изучавање површина, за појашњење симетрија у равни, дјељивости, разломака, ... Оно што аутори уочавају је да се посебно креативност на радионицама подстакне код ученика који нису међу најбољима када је редовна настава у питању. Наиме, жеља је да кроз игру ученици усвоје нека суштинска знања, али и визуализују научено. Примјери из праксе оправдавају полазна размишљања и као резултат се добија укљученост већег броја ученика, квалитетније разумијевање и учење на лакши начин. Тако, уз већ познате и лакше рјешиве тромино и тетромино, ученицима је пентомино озбиљан изазов у конкретним проблемима. Често до истог рјешења долазе на различите начине, што је у математици јако битно. Већина ових игара је доступна онлајн, али нажалост није превише заступљена међу ученицима, па овакав вид наставе представља прилику да се ученици упознају са играма, на прави начин усвоје правила и упутства за игру, али и логику рјешавања проблема. Акценат је и на разним активностима примјењивим у настави, које укључују резање, лијепљење, али што је још важније, понудити другачији тип задатака и проблема, подстаћи ученике да раде прстима и размишљају у ситуацији гдје су измјештени из шаблона. Конкретно, користе се материјали који садрже танграм шему, као и свих 12 пентомино облика.

2.1. Пентомино

Проблем поплочавања или паркетирања један је од проблема којим су се бавиле још древне цивилизације. Проблем поплочавања је широк и разноврстан, како због типа полигона који је потребно поплочати тако и због избора самих плочица којим радимо поплочавање. Средином 20. вијека Соломон Голомб је на основу искуства из дугогодишње традиције овог проблема осмислио полиомино и објавио у својој књизи. Он дефинише мономино, као први полиомино од ког настају сви остали. Мономино је јединични квадрат, док се остали домино, тромино, тетромино, пентомино, итд. добијају повезивањем јединичних квадрата, тако да имају заједничку страницу. Домино, тромино и популарни тетромино (доступан свим генерацијама кроз популарну игру „Тетрис“), ученицима су јасни и познати, док се пентомино намеће као много захтјевнији изазов.

Постоји 12 разичитих пентомино облика састављених од пет јединичних квадрата (слика 1). Ти облици познати су као пентомино алфабет, гдје све пентомино облике можемо поистовјетити са скупом {F, I, L, N, P, T, U, V, W, X, Y, Z}. Од 12 облика можемо симетријом дати 18 облика, док ротацијом добијамо 63 различита облика.



Слика 1. 12 пентомино облика

Конкретно, пентомино облици су погодни за разумијевање особине конвексности фигура, класификацију многоуглова према броју страна, чињенице да обим и површина нису величине које јединствено одређују полигон, симетрији итд. Са сетом од 12 пентомино плочица можемо понудити сљедеће игре и задатке:

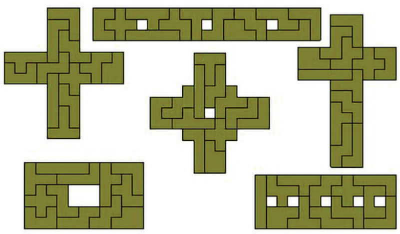
Примјер 1.1. Класификовати пентомино облике према броју њихових страна.

Примјер 1.2. Одредити који пентомино облици имају осу симетрије.

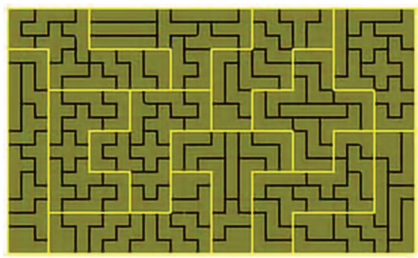
Примјер 1.3. Који пентомино облик има најмањи обим?

Игра 1. Ученици играју у паровима сљедећу игру. Наизменично бирају један од 12 пентомино облика и спајају с претходном фигуром тако да укупан број страна фигуре на столу не буде више од шест. Губи онај играч који први прекрши ово правило.

Када је у питању полигон који поплочавамо, он може бити димензија $m\times n$, за $m \in \{3,4,5,6,8\}$, а $n \in \{3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,15,20\}$ тако да буде прекривен цијели полигон. Постоје полигони који имају по 3 или 4 шупљине или „острва“. Користећи та „острва“ и њиховим адекватним позиционирањем, уз пентомино облике, може се прекрити пуна површина (слика 2).



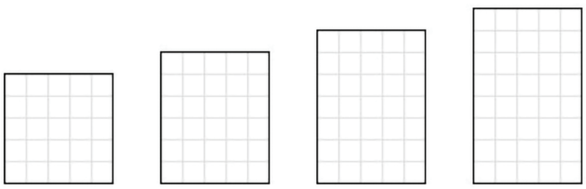
Слика 2. Поплочавање са острвима



Слика 3. Троструко увећање пентомино облика

Уз помоћ пентомино облика могуће је креирати неке од облика троструко увећане (слика 3), а постоји мноштво различитих облика које је могуће креирати, животиње, предмети, итд.

Дакле, овдје разматрамо четири „класичне“ правоугаоне пентомино загнетке, неке варијације слагалице 8×8 и бројне „дегенерисане“ случајеве, односно слагалице које су премале да садрже свих 12 пентомина, као што је 5×5 слагалица (слика 4).



Слика 4. „Дегенерисане“ пентомино табле

Циљ је пронаћи сваки начин да испуните слагалицу са максималним бројем пентомина. Број рјешења варира, од два (за слагалицу 3×20) до 6951 (за слагалицу 5×10).

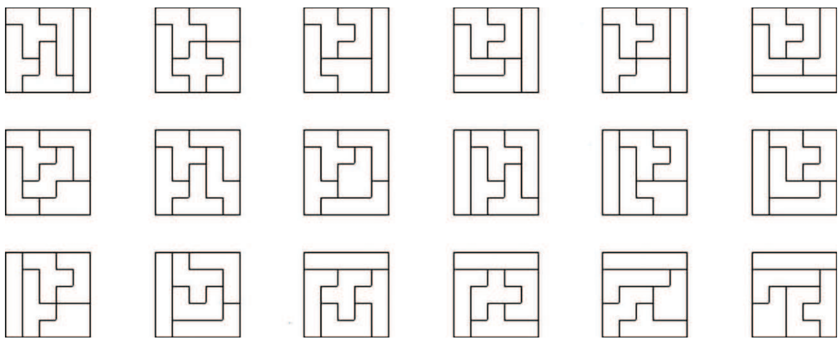
Препорука је да пентомино заступимо у настави тако што би кроз отворени дио редовног плана, додатну наставу или математичку секцију, ученицима сходно узрасту и компетенцијама, уводили различите проблемске задатке који би код њих поспјешили боље математичко и логичко расуђивање, оријентацију и рад са многоугловима.

С обзиром на доступност онлајн апликација у којима се може користити пентомино дјецу можемо мотивисати да крену са слагањем тако што би им понудили једноставније примјере.

Примјер 2.1. Користећи неке од пентомино облика попунити таблу 3×5.

Примјер 2.2. Користећи неке од пентомино облика попунити таблу 5×5 (слика 5).

Примјер 2.3. Користећи неке од пентомино облика попунити таблу 6×5.



Слика 5. Нека од рјешења табле 5×5

Након почетног успјеха и упознавања са самом игром ученицима је добро понудити да ријеше неке од класичних табли у којима ће користити све облике.

Примјер 2.4. Користећи пентомино облике попунити таблу 6×10.

Примјер 2.5. Користећи пентомино облике попунити таблу 3×20.

Примјер 2.6. Користећи пентомино облике попунити таблу 5×12.

На крају их можемо упознати с неким изведеним примјерима из класичних проблема поплочавања, гдје се користе сви пентомино облици, али ипак не прекривамо цијелу таблу или површ. Такви су примјери:

Примјер 2.7. Користећи пентомино облике попунити шаховску таблу 8×8. Шта закључујеш?

Игра 2. Ученици играју у паровима сљедећу игру. Наизменично бирају један од 12 пентомино облика и постављају га на шаховску таблу 8×8. Губи онај играч који не може да направи овакав потез.

Примјер 2.8. Користећи пентомино облике попунити шаховску таблу 3×21. Шта закључујеш?

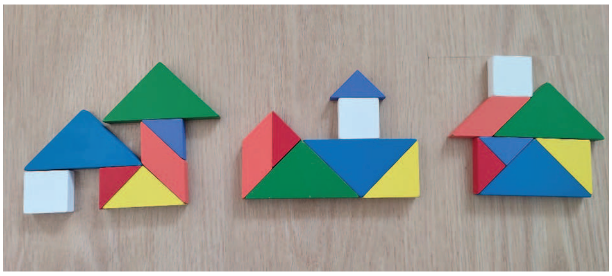
Овдје је потребно упознати дјецу и навести на размишљање о броју јединичних квадрата, како табле тако и пентомино облика. Просто множећи врсте и колоне добијамо да ће у посљедња два примјера број јединичних квадрата бити 64 и 63, редом. Како 12 пентомино облика има укупно 60 јединичних квадрата, закључујемо да је немогуће поплочати таблу, а да нам не остану празна поља или „острва“.

Још један важан аспект оваквих игара је што се на њима може добро објаснити принцип рада вјештачке интелигенције која постаје све присутнија у нашим животима. Овдје је врло битно нагласити ученицима да су математика и математички начин мишљења у основи и овако напредних алгоритама. С друге стране, наша улога као наставника математике је и да оваквим примјерима укажемо на важност очувања фонда часова и давања мјеста математици које мора имати у образовном систему 21. вијека.

2.2. Танграм

У математичким круговима танграм је добро позната и коришћена математичка игра. Међутим, недовољно заступљена у настави математике. Често се деси на радионицама да се ученици или колеге први пут срећу са њом. Ова древна кинеска игра осим за разбибригу, како је од њеног ширења на Европу и Сјеверну Америку у 19. вијеку посматрана, крије много математичких законитости, примјењив је дидактички материјал у настави. Уз то је добар стимуланс за размишљање, логично закључивање и визуализацију.

Поријекло није познато али се везује за легенду о слузи, цару и драгоцјеном квадрату, из ког је након неспретности слуге настао танграм. Више него интересантан начин да представимо откуд 7 геометријских фигура (танова) и то 5 правоуглих троуглова, два велика, један средњи и два мала, квадрат и паралелограм. Ови елементи послужили су креаторима за формирање преко 6500 смислених облика (слика 6), од настанка па до данас. Успјешност слагача танграма или тежина слагања неког танграм облика може се мјерити процентом разумљивости и визуелизацијом, брзином перцепције којом се долази до рјешења.

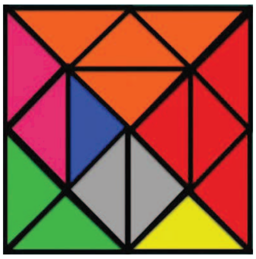


Слика 6. Танграм облици

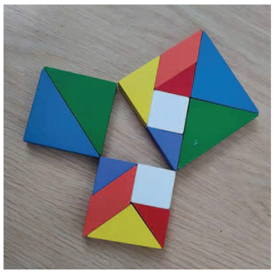
Имплементација у учионици или употреба танграма на радионицама захтјева пар корака како би се дошло до адекватног успјеха и разумјевања. Након општег упознавања као прикладна активност која ученике приближава танграму је самостално осмишљавање танграм облика. Након ових нематематичких метода можемо ученике упутити на већ позната им мјерења и међусобне односе страница и углова. Сви ови закључци које будемо износили у раду имају математичку позадину и јасне доказе до којих није тешко доћи.

Прве математичке области на које их треба упозорити јесу подударност и сличност троуглова. Простим упоређивањем троуглова можемо уочити да су они сви једнакокраки и правоугли и да им углови износе 45°, 45° и 90°. Подсјетимо да се наспрам једнаких страница налазе једнаки углови. Ако по угловима упоредимо мали троугао и паралелограм видимо да су му два оштра угла такође 45°, док су тупи 135°. Такође, хипотенузе мањих чине катете средњих троуглова, док је хипотенуза троугла средње величине заправо катета великог троугла. То нам указује на односе дужина страница из чега произлази однос површина.

Како знамо да је однос површина сличних фигура једнак квадрату коефицијента сличности тих фигура, то можемо овдје и експериментом да провјеримо. Ако је површина малог троугла P, тада је површина средњег $2P$, док је површина великог троугла $4P$. Упоредимо ли мали троугао са четвороугловима, уочавамо да су површине квадрата и паралелограма заправо $2P$ (слика 7). Сада закључујемо да је збир свих површина танова заправо $16P$, али и да је површина танграма једнака површини 16 најмањих танова.



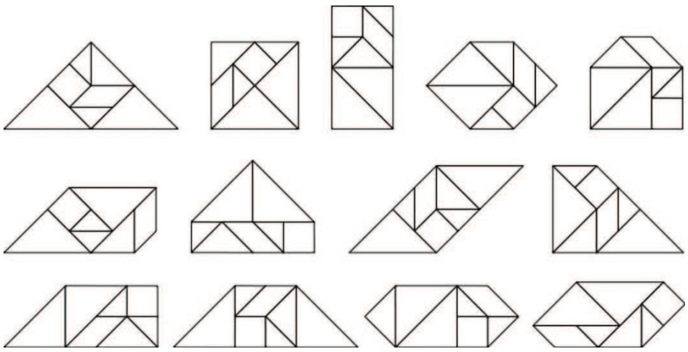
Слика 7. 16 јединичних танова



Слика 8. Танграм Питагорина теорема

Након овог закључка можемо их упутити на Питагорину теорему и формулазију да је збир површина квадрата над катетама једнак површини квадрата над хипотенузом правоуглог троугла. Заиста, на врло једноставан начин користећи два танграма доказујемо ову теорему за једнакокраки правоугли троугао, гдје један танграм чини квадрат над хипотенузом, а половине другог танграма квадрате над катетама (слика 8).

Још једна од ствари која се може понудити даровитијим ученицима је конвексност танграм фигура. Интересантно је да се може формирати само 13 конвексних фигура и да то не може бити фигура која има више од 8 страница (слика 9).



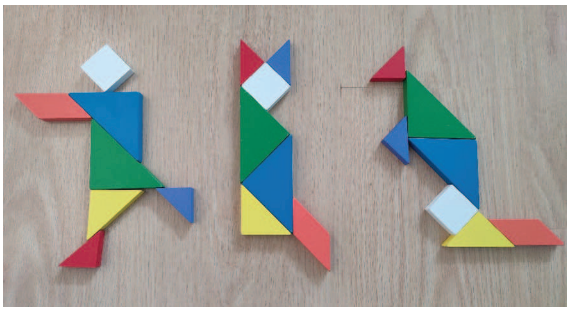
Слика 9. Неконвексне фигуре

Лема 2.1. Ако 16 подударних једнакокраких правоуглих троуглова образују конвексан многоугао, тада број страница тог многоугла не може бити већи од 8.

Овдје се као идеја користи збир углова у многоуглу, односно могућа понављања углова од 45°, 90° и 135°, као и њихових збирова. Добијају се различита рјешења, укупно њих 48, али неки нису конвексни, други не користе све танове, па тако долазимо до већ поменутог броја 13. Оно што произлази из ове леме јесте да произвољно слагање ових 16 поменутих троуглова неће увијек дати конвексан многоугао. Ако на страницу многоугла чија је дужина рационалан број додамо страницу неког другог многоугла чија је дужина ирационалан број, наш многоугао био би неконвексан. Да бисмо добили конвексан многоугао потребно је странице чија је дужина рационалан број једног многоугла слагати на странице другог многоугла чија је дужина такође рационалан број, односно странице чија је дужина ирационалан број на страницу исте дужине.

Уз ове законитости постоји још низ области у којима су примјењиве слагалице овог типа. Нешто је лако извести из реченог, док се до других долази активнијим бављењем и проучавањем поменутих модела. Наравно, уз пентомино и танграм ту су и стомахион, јапанска верзија танграма, танграм јаје, итд.

Такође, занимљивост је да танграм можемо понудити и најмлађим ученицима везујући их за слова, животиње или спорт (слика 10). На овај начин имамо и одређени степен међупредметне корелације с познавањем природе и друштва.



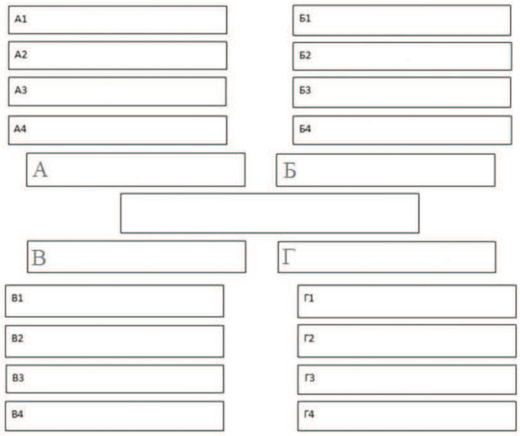
Слика 10. Облици танграма

2.3. Асоцијације

Асоцијације су углавном добро познате дјеци старијих разреда и некако дјелује да је то већ потрошен ресурс у старијим разредима. Међутим, готово увијек се испостави другачије и управо на овој игри ученици буду јако активни и покажу логику, креативности познавање математике.

Задатак може бити да се за одређени временски период састави што више различитих шаблона користећи само понуђени шаблон (слика 11). Ове игре, уз свима добро познате пузле, дођу као нека врста разбибриге за ученике, а да често и нису свјесни да тиме раде на својој пажњи, креативности, логичком закључивању и финој моторици.

Оно што се издваја када су матричне игре у питању уз судоку, „икс окс“ су и асоцијације. Али овог пута не само као „конзументи“, већ и у улози креатора. Наиме, циљ је направити јасну и недвосмислену асоцијацију на дати појам, али под условом да је што захтјевнија и да од играча тражи проницљивост, логички и ментални напор уз познавање редовног градива које се подразумијева.



Слика 11. Стандардни шаблон за асоцијације

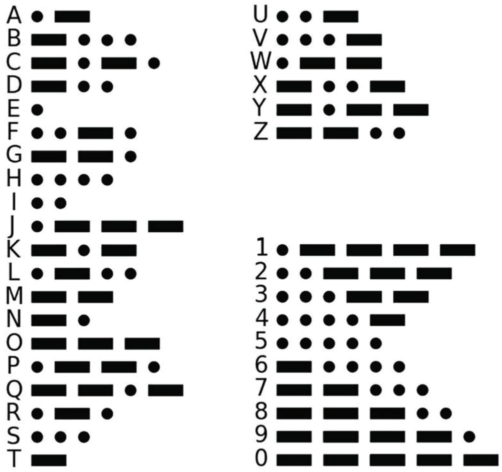
Примјер асоцијације која би испунила поменуте захтјеве настала је на једној од радионица (слика 12).

Слика 12. Асоцијације (примјер са радионице)

Аутори радионице су креатори више врста математичких квизова које су рјешавали ученици на школском и општинском нивоу када је Црна Гора у питању, али и на квизовима у Србији чији организатор је Удружење „Млади математичар“.

3. Игре шифровања

Човјек је готово од свог настанка, а упоредо са развијањем говора, развијао способност да нешто што је тајанствено, вриједно и битно, пренесе или изговори шифровано. Шифровање је процес претварања информација у код како би се заштитиле од неовлашћеног приступа. Користи се у дигиталној комуникацији, банкарству и другим областима где је повјерљивост података кључна. Основни принцип шифровања је да само овлашћене особе са одговарајућим кључем могу дешифровати поруку и приступити оригиналним подацима. Постоје различите методе шифровања, од симетричних алгоритама који користе исти кључ за шифровање и дешифровање, до асиметричних метода гдје се користе различити кључеви. Савремена технологија шифровања је кључна за безбједност у дигиталном свијету. Тиме се још једном ефектно може поентирати и ка ученицима и ка креаторима политика на значај математике у савременом добу.



Слика 13. Морзеова азбука

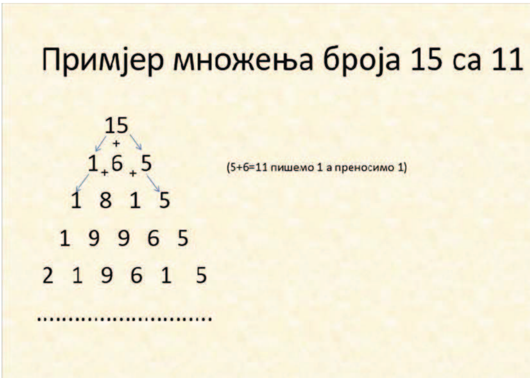
Морзеова азбука је систем комуникације који користи тачке и црте за представљање слова, бројева и знакова. Развијена је у 19. веку како би омогућила брзу и ефикасну телеграфску комуникацију на великим раздаљинама. Сваки симбол у Морзеовој азбуци представља се комбинацијом кратких и дугих звучних сигнала, свјетлосних трептаја или визуелних знакова. Данас се Морзеова азбука ријетко користи, али је и даље значајна у поморској комуникацији и као дио историје телекомуникација. Дакле, Морзеова азбука је примјер како се одређене поруке могу шифровати, а сада је на нама како осмислити задатак да се дјеци на један примамљив начин приближи криптографија или да се упознају с њом. Задатак има за циљ да поспјеши тимски рад екипе ако игра није понуђена за индивидуално рјешавање. У основи, циљ је дешифровати ријеч, реченицу или неки појам који би могао довести до рјешења. Варијације на ову тему доносе мноштво интересантних и дјеци примамљивих задатака, који од њих захтјевају тимски рад, прецизност, брзину и досјетљивост. Вријеме је итекако битан фактор, па се за различите групе надарености могу мијењати временска ограничења.

Примјер 3.1. Морзеова азбука. Ученицима је задата латинска сентенција "Non scholae, sed vitae discimus". Ученици добију у коверти Морзеову азбуку (слика 13) и реченицу коју треба дешифровати за релативно кратко вријеме. Реченица је на латинском како не би ученици приликом рјешавања на основу пар симбола дешифровали цијелу ријеч. Како се већина такмичара до тада није сретала с Морзеовом азбуком, ако би лидер групе рјешавао сам изгубио би превише времена док би дешифровао свега пар ријечи. Дакле, такмичари унутар групе треба да сарађују, да се организују и свако рјешава по једну ријеч. Тиме се ученици уче лидерству, подјели посла и тимском раду, апсолутно незамјењљивим вјештинама у савременом пословању.

4. Ведска математика

Ведска математика је древни индијски математички систем који потиче из Веда, светих текстова хиндуизма. Овај систем математике развијен је како би олакшао рачунање помоћу једноставних, интуитивних метода. Ведска математика заснована је на 16 „сутри“ (правила) и 13 „субсутри“ (потправила), које омогућавају брзо и елегантно рјешавање широког спектра математичких проблема, укључујући аритметичке операције, алгебру, тригонометрију, па чак и рачунске проблеме. Главна предност Ведске математике је њена једноставност и ефикасност, што омогућава ученицима изузетно брзо множење и дијељење бројева, чак и великих бројева. Ове методе често захтијевају мање корака у поређењу с традиционалним западним приступима и корисне су у менталној математици. У посљедњих педесетак година Ведска математика привукла пажњу математичара и наставника широм свијета због својих примјена у образовању, јер додатно подстиче креативност и иновативност у приступу математици.

Увиђамо да Ведска математика доприноси како ученицима тако и наставницима. Неки кључни бенефити за ученике су брзина и ефикасност, повећање самопоуздања, развијање креативности, лакоћа учења, развијање концентрације и фокуса. Оно што можемо нагласити кад су наставници у питању, то је разноликост приступа, лакше објашњавање сложених концепата, мотивација ученика, примјена у свакодневном животу, инклузивност, итд.



Слика 14. Ведска математика (множење броја с 11)

Ведска математика се истиче као користан алат за унапређење математичког образовања, посебно због свог приступа који је усмерен ка интуитивном и брзом решавању проблема, а неке сутре дефинисаћемо као примјере.

Примјер 4.1. Сутра за множење с 11. Када множиш било који двоцифрен број са 11, збир цифара тог броја се поставља између те две цифре. Примјер примјене ове сутре дат је у наставку текста (слика 14).

Цифре се говоре од јединица ка десетицама, стотинама, хиљадама, итд. Ученик множи бројеве без записивања, дакле, потребно је у истом тренутку да памти распоред цифара у претходном реду, сабира цифре и брине о прелазима за збирове преко 9. Сигурно представља добар „тренинг“ мозга и идеална је у моментима када квалитет часа није на завидном нивоу и када је готово немогуће добити повратну реакцију од ученика.

Примјер 4.2. Сутра „Вертикално и дијагонално“. Ова техника користи сабирање и множење вертикалних и дијагоналних цифара бројева. На пример, за множење двоцифрених бројева, прво се помноже десне цифре (јединице), затим укрштене цифре (десетице са јединицама), и на крају леве цифре (десетице), а резултати се сабирају.

5. Дигитализација наставе

Некада ни сами нисмо свјесни у коликој мјери је математика присутна око нас и гдје све можемо наћи инспирацију и добре примјере за другачију и забавнију наставу.

Настава је жив процес и неопходно је да се прилагођава промјенама у окружењу, да одговори савременим захтјевима, тако смо препознали да и садржаје које нуди интернет можемо адекватно користити и за наставу математике. Савремени облици наставе подразумијевају укључивање интернет технологија и дигиталних алата, а уз то неопходно је правити корелације с другим наставним предметима.

5.1. Геометријски изазов

Добар примјер је `YouTube`, што фактички значи да све може бити добар и користан дидактички материјал. Клипови су основа игре Геометријски изазов која је саставни дио квизова који су се у континуитету реализовали у Србији. Приказују се клипови који на први поглед не емитују никакав математички садржај, али који могу да послуже као добри, оригинални и креативни математички задаци (слика 15).

Посебно, јер на овај начин правимо корелацију са другим наставним предметима. Конкретно, у корелацији с географијом, користили смо клипове који приказују заставе држава неког континента или одређене географске области. Теме из математике које прате метеријале су разломци, осна и централна симетрија, пропорција, итд. Аутори у својим радионицама охрабрују колеге да не забораве да је математика опште примењива и да осим суштинских знања која морамо дјеци пренијети, на нама је да их мотивишемо, да забавимо и себе и њих, како би рад у учионици био изазован и усавршавајући из године у годину. Нешто што је рађено на општинским квизовима у Никшићу у Црној Гори, обиљежена је седмица глобалног образовања на тему „Мир за планету–планета мира“.

Примјер 5.1. Колико застава карипских држава је осносиметрично?

Примјер 5.2. Колико застава карипских држава је централносиметрично?

Примјер 5.3. Колико троуглова се може уочити на застави Гренаде?

Примјер 5.4. Колико троуглова се може уочити на застави Антигве и Барбуде?

Слика 15. Геометријски изазов

Примјер 5.5. Колико максимално страна има једнобојни многоугао који се може уочити на застави Јамајке?

Примјер 5.6. Колико застава карипских држава има у себи трапез који није правоугаоник?

Примјер 5.7. Колико застава карипских држава садржи једнобојан десетоугао?

Примјер 5.8. Колико четвороуглова (укључујући и обојене различитим бојама) се може уочити на застави Тринидада и Тобага?

6. Закључак

На крају, иако је у овом раду презентовано доста важних чињеница, аутори охрабрују колеге да изађу из шаблона, да пробају нешто ново у учионици, да провјере како дјеца реагују на промјену. Не би требало да се обесхрабре ако сам почетак и не буде онакав како замишљају. Ово су само неки од примјера „слободних“ активности реализованих у учионици или на секцијама. Таквих примјера има још много који нису поменути, као и идеја до којих се може доћи на различите начине, прије свега размјеном искустава у оквиру струковних удружења, интернета, семинара и радионица. Математици треба дати простор и ослободити је стега у које је често сами стављамо. Мишљења смо да ако ученик сазна и за занимљивије начине учења и усвајања градива можемо, заједно доприносити популаризацији математике, што би требао бити циљ сваког од нас.

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Андрић, *Развијање креативности у настави математике*, Друштво математичара Србије, Београд, 2016.

[2] S. Chapman, *Pentominos*, Isomerdesign, 2022. `https://isomerdesign.com/Pentomino/`

[3] Ђ. Баралић, *Полиомино поплочавања*, непубликована скрипта, 2016, `https://dms.rs/wp-content/uploads/2016/12/Poliomino.pdf`

[4] A. Kavajin, N. Baranović, *Tangram u nastavi matematike*, 1. dio, Matematika i škola, Split, 2019

[5] P. Kumar, *Vedska matematika: drevna tehnika računanja bez kalkulatora*, Harša, 2015.

Ђ.Б.: Математички институт САНУ, Београд, E-mail: djbaralic@mi.sanu.ac.rs

Н.Р.: ОШ „Милија Никчевић“, Никшић, E-mail: nikola.radojicic91@yahoo.com