Амар Сарић

ПОЈЕДНОСТАВЉЕНИ ДОКАЗ ТЕОРЕМЕ О МАЈОРИЗОВАНОЈ КОНВЕРГЕНЦИЈИ ЗА РИМАНОВЕ ИНТЕГРАЛЕ

Апстракт. Представљен је доказ Арцелине теореме о мајоризованој конвергенцији низа интеграла у два корака: прво се успоставља лема за степенасте функције, а потом и резултат за Риманове интеграле.

Увод

Мајоризована конвергенција интеграла – видети Луксембургов рад [7] на тему Арцелине теореме [1], као и радове Сарића [8], односно Горпејда и Лимаје [3] – обично се не налази у уџбеницима математичке анализе у контексту Риманове теорије, нити се уопште користи ни помиње све док на крају не постане обични королар Лебегове теорије. Следећи доказ се ослања на класичну Хаусдорфову методу [4], али само примењену на скупове (Луин [6]), као и на идеје Кестлмана [5] и де Силве [2]. Стога је изненађујуће једноставан, поготово ако се узме у обзир историјиски развој и колико су компликовани били први докази Арцеле и Хаусдорфа. Де Силва такође даје добар опис разлика у приступу између коришћења Лебегове мере и онога што је потребно да се њена употреба избегне, али његов доказ је претежак за студенте. Међутим, до основног Арцелиног облика теореме се може доста лако доћи и без употребе својстава Лебегове мере, односно Лебеговог или Данијеловог интеграла, и то много лакше него ако се следе приступи Луина или де Силве понаособ. Видећемо да није потребно ништа више од основа анализе, што теорему чини прикладном за предавања на првој години факултета упркос њеном досадашњем третману, не само на нашим универзитетима већ уопште.

Редукција проблема и доказ теореме

Главни део доказа се састоји од леме за специјални случај низа ненегатвиних степенастих функција које конвергирају ка нули.

Дефиниција. Ограничен скуп који је унија, пресек или комплемент коначно много интервала зваћемо *прости скуп.* За такав скуп A и његову карактеристичну функцију $\chi_A(x)$, дакле функцију која је једнака 1 за свако $x \in A$ и 0 за $x \notin A$, користићемо $m(A)$ да означимо $\int \chi_A(x)\,dx$, тј. $m(A)$ је сума дужина дисјунктних интервала који сачињавају скуп A, при чему коначно много тачака можемо третирати као засебне интервале за које је m једнако нули.

Лема. *Нека је* $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *низ ненегативних степенастих функција дефинисаних на ограниченом интервалу* $[a,b]$*. Ако постоји константа* $M>0$ *таква да је* $f_k(x) \leqslant M$ *за свако* $x \in [a,b]$ *и свако* k*, и ако* $f_k(x) \to 0$ *када* $k \to \infty$*, појединачно за свако* $x \in [a,b]$*, онда је*

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k(x)\, dx = 0.$$

Доказ. Нека је ε било који позитиван реалан број. Свака степенаста функција је дефинисана на коначно много дисјунктних интервала.

Претпоставимо сада да за неко $\eta > 0$ постоји бесконачно много индекса k, таквих да за оне интервале на којима је $f_k(x) \geqslant \varepsilon$, које ћемо означити са $I_{k,1}, \dots I_{k,i}, \dots I_{k,n_k}$, важи

$$\sum_{i=1}^{n_k} |I_{k,i}| \geqslant \eta.$$

То значи да сви скупови

$$G_k := \{x : x \in [a,b],\ \sup_{j \geqslant k} f_j(x) \geqslant \varepsilon\},$$

за свако k, садрже неки прости скуп A_k са $m(A_k) \geqslant \eta$. Даље, нека је

$$\sigma_k := \sup\{m(A) : A \text{ је прости скуп и } A \subseteq G_k\},$$

што је, због $\sigma_k \geqslant \eta > 0$, стриктно позитивна вредност за свако k. Обзиром да су G_k садржани у $[a,b]$, вредности σ_k су такође ограничене. Даље, увек је наравно могуће било који интервал произвољно тачно апроксимирати изнутра помоћу затворених интервала, тако да, без губитка оштости, можемо претпоставити да је скуп A у горњој дефиницији затворен. То нам омогућава да у доказу користимо компактност. Такође, приметимо да је

$$G_1 \supseteq \cdots \supseteq G_k \supseteq G_{k+1} \supseteq \cdots .$$

Интуиција нам говори да укупна дужина интервала од којих се састоје скупови A_k не може тежити нули, упркос контракцији скупова G_k. Другим речима, важи $\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k \neq \emptyset$, што ћемо сада и ригорозно доказати. За свако G_k, постоји неки *затворени* прости скуп $S_k \subseteq G_k$ за који важи

$$m(S_k) > \sigma_k - \frac{\eta}{2^{k+1}}.$$

Стога, m било којег простог скупа $S \subseteq G_k$ може само за толико бити веће у односу на S_k, односно имамо

$$\sigma_k \geqslant m(S) = m(S_k \cup (S \setminus S_k)) = m(S_k) + m(S \setminus S_k) > \sigma_k - \frac{\eta}{2^{k+1}} + m(S \setminus S_k),$$
$$m(S \setminus S_k) < \frac{\eta}{2^{k+1}}.$$

При томе $m(S \setminus S_k)$ сме бити 0, што ће и бити случај ако је $S \subseteq S_k$. Затим, дефинисаћемо скуп $H_k := \bigcap_{i=1}^{k} S_i$, за који је јасно да је такође прости скуп. Како је $S \subseteq G_k \subseteq G_i$ за све $i \leqslant k$, следи да је

$$m(S \setminus H_k) = m(S \setminus \bigcap_{i=1}^{k} S_i) = m(\bigcup_{i=1}^{k}(S \setminus S_i)) \leqslant \sum_{i=1}^{k} m(S \setminus S_i) < \sum_{i=1}^{k} \frac{\eta}{2^{i+1}} < \frac{\eta}{2},$$

одакле добијамо да мора да важи неједнакост

$$m(S) = m(H_k \cup (S \setminus H_k)) = m(H_k) + m(S \setminus H_k) < m(H_k) + \frac{\eta}{2}.$$

Из случаја када је $S = A_k$ видимо да $m(H_k)$ мора бити стриктно позитивна вредност, и то за свако k, јер је $m(A_k) \geqslant \eta$. Дакле, ниједан од скупова H_k не може бити празан. Осим тога, скупови H_k су конструисани тако да су затворени и ограничени, и уметнути један у други: $H_1 \supseteq \cdots \supseteq H_k \supseteq H_{k+1} \cdots$. Нека је x_k било која тачка из H_k; онда низ $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, због компактности, поседује подниз који конвергира ка некој тачки $x_0 \in [a, b]$. Међутим, сваки скуп H_k мора садржавати све чланове тог конвергентног подниза почевши од неког фиксног индекса па надаље. Како су скупови H_k компактни, закључујемо да је $x_0 \in H_k \subseteq G_k$ за свако k. Дакле, заиста је $x_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$ и $\sup_{i \geqslant k} f_i(x_0) \geqslant \varepsilon$ за свако k, тако да $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ не може конвергирати ка 0 на комплетом интервалу $[a, b]$, у директној контрадикцији са условима леме.

Сходно томе, морамо одбацити нашу првобитну претпоставку, што значи да за дато $\eta > 0$ постоји само коначно много индекса k са $\sum_{i=1}^{n_k} |I_{k,i}| \geqslant \eta$. У ствари, за свако $\eta > 0$, увек постоји неки индекс k_0 такав да, када је $k \geqslant k_0$, имамо

$$\sum_{i=1}^{n_k} |I_{k,i}| < \eta.$$

Другим речима, онај део интеравла $[a, b]$ где је $f_k(x) \geqslant \varepsilon$ постаје све мањи када k расте. На основу тога закључујемо да је

$$0 \leqslant \int_a^b f_k(x)\, dx < \varepsilon\,(b-a) + M\eta$$

за $k \geqslant k_0$, при чему су ε и η произвољне позитивне вредности. ■

Теорема (Arzelà, 1885). *За низ функција $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, $f_k : [a, b] \to \mathbb{R}$ и $a, b \in \mathbb{R}$, таквих да је $|f_k(x)| \leqslant M$ за свако k и свако $x \in [a, b]$, где је доминанта M неки реални број, које су уз то све интеграбилне у Римановом смислу и које конвергирају ка $f(x)$ када $k \to \infty$ за свако $x \in [a, b]$ и где је унапред познато да је гранична функција $f(x)$ такође интеграбилна по Риману на интервалу $[a, b]$, увек се сме заменити редослед интеграције и лимеса. Дакле, у овом случају, из $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ следи да је*

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Доказ. За произвољан позитиван реални број ε, поћи ћемо од неједнакости

$$\left|\int_a^b f_k(x)\ dx - \int_a^b f(x)\ dx\right| \leqslant \int_a^b |f_k(x) - f(x)|\, dx,$$

где су $|f_k(x) - f(x)|$ очигледно ненегативне, ограничене функције са мајорантом $2M$. Осим тога, оне су и интеграбилне у Римановом смислу, и конвергирају у свакој тачки ка 0 када $k \to \infty$. За свако k постоји степенаста функција $s_k(x)$ таква да је $|f_k(x) - f(x)| \geqslant s_k(x) \geqslant 0$, па имамо

$$\int_a^b |f_k(x) - f(x)|\ dx - \int_a^b s_k(x)\ dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

и $s_k(x) \to 0$ када $k \to \infty$. Претходна лема нам гарантује да постоји k_0 такво да је $\int_a^b s_k(x)\ dx < \varepsilon/2$ за свако $k \geqslant k_0$, због чега добијамо

$$\int_a^b |f_k(x) - f(x)|\ dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \int_a^b s_k(x)\ dx < \varepsilon$$

за $k \geqslant k_0$, чиме је доказ завршен. ∎

Није тешко показати да тврђење важи и ако се доминанта M замени произвољном позитивном Риман-интеграбилном функцијом, под условом да је она апсолутно интеграбилна, а што се чак може проширити и на случај када је та функција бесконачна у некој тачки уколико само постоји несвојствени интеграл. Такође, можемо рутински игнорисати и пребројиво много тачака у којима функције могу и да не конвергирају, под условом да су ограничене. Међутим, општу формулацију теореме боље је оставити за Лебегову или пак Данијелову теорију интеграције.

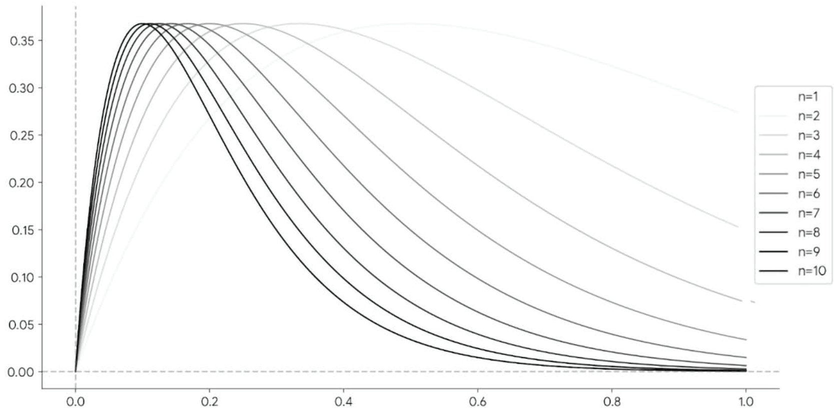
Примери примене теореме

Функције $f_n(x) := nxe^{-nx}$, приказане на слици 1, конвергирају у свакој тачки интервала $[0,1]$ ка 0 за $n \to \infty$, али та конвергенција није униформна. Ипак, можемо заменити редослед интеграције и лимеса јер су услови Арцелине теореме задовољени. Сходно томе имамо $\int_0^1 nxe^{-nx}dx \to 0$, што је лако и директно проверити.

Међутим, ако функције дефинишемо као $g_n(x) := n^2xe^{-nx}$, видимо да оне још увек свугде у интервалу $[0,1]$ конвергирају ка 0 када $n \to \infty$, али да више нису униформно ограничене на $[0,1]$, тј. да не постоји доминанта какву захтева Арцелина теорема. У овом случају је $\int_0^1 n^2xe^{-nx}dx = 1 - e^{-n} - ne^{-n} \to 1$, $n \to \infty$, што показује да се услов да су функције униформно ограничене не може изоставити из теореме.

Замена редоследа интеграције и лимеса може бити врло корисна при одређивању вредности интеграла. Као пример ћемо израчунати интеграл

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$$



Слика 1

који је од значаја у Фуријеовој теорији. У тачки $x = 0$ интегранд је дефинисан тако да је једнак 1 како би функција била непрекидна. Да бисмо проверили да интеграл постоји, поћи ћемо од неједнакости

$$\left|\int_r^s \frac{\sin x}{x}\,dx\right| = \left|\frac{\cos r}{r} - \frac{\cos s}{s} - \int_r^s \frac{\cos x}{x^2}\,dx\right| \leqslant \frac{1}{r} + \frac{1}{s} + \left|\int_r^s \frac{\cos x}{x^2}\,dx\right|,$$

при чему је, за $1 < r < s$,

$$\left|\int_r^s \frac{\cos x}{x^2}\,dx\right| \leqslant \int_r^s \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| dx \leqslant \int_r^s \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{r} - \frac{1}{s}.$$

Такође је и, за $1 < r < s$,

$$\left|\int_r^s e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx\right| \leqslant \int_r^s e^{-tx}\,dx = \left.\frac{e^{-tx}}{-t}\right|_r^s = \frac{e^{-tr}}{t} - \frac{e^{-ts}}{t},$$

што је произвољно мала вредност за довољно велико r под условом да је $t > 0$. На основу Кошијевог критеријума закључујемо да интеграл

$$I(t) = \int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx, \quad t \geqslant 0,$$

конвергира и дефинишемо

$$I_s(t) := \int_0^s e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx,$$

односно, конкретно за $t = 0$,

$$I_s(0) := \int_0^s \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Диференцирање под знаком интеграла по t, што се сме учинити јер је функција $e^{-tx}\sin x$ непрекидна, те двострука примена парцијалне интеграције дају

$$I_s'(t) = \int_0^s -e^{-tx}\sin x\,dx = \frac{e^{-ts}\,(t\sin s + \cos s)}{1+t^2} - \frac{1}{1+t^2},$$

одакле добијамо

$$I_s(t)-I_s(0)=\int_0^t \frac{e^{-su}\,(u\sin s+\cos s)}{1+u^2}\,du-\int_0^t \frac{1}{1+u^2}\,du.$$

Приметимо да као доминанту можемо користити

$$\left|\frac{e^{-su}\,(u\sin s+\cos s)}{1+u^2}\right|\leqslant \frac{(u+1)}{1+u^2}\leqslant 2,$$

јер је $u\geqslant 0$, а да граничну вредност можемо израчунати дуж било којег низа бројева $s_n\to\infty$. Сходно томе Арцелина теорема даје

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx-\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx &= \lim_{s\to\infty}\left(I_s(t)-I_s(0)\right)\\ &=\int_0^t \lim_{s\to\infty}\left(\frac{e^{-su}\,(u\sin s+\cos s)}{1+u^2}\right)du-\int_0^t \frac{1}{1+u^2}\,du\\ &=-\operatorname{arctg}(t)\,,\end{aligned}$$

под условом да гранична вредност постоји на читавом интервалу $[a,b]$ и да је функција добијена граничним прелазом интеграбилна по Риману. То је заиста случај свугде на интервалу $(0,t]$, али не и у тачки $u=0$. Међутим, обзиром да и интеграбилност функција, као и вредности интеграла, остају непромењене ако функције изменимо у само једној тачки, можемо без губитка општости претпоставити да су све функције једнаке 0 за $u=0$ и да је гранична вредност једнака 0 на целом интервалу $[0,t]$. Из тог разлога можемо применити Арцелину теорему.

Без теореме о мајоризованој конвергенцији не бисмо могли тек тако израчунати лимес пре интеграла, већ бисмо то морали да образложимо на тежи начин (нпр. помоћу униформне конвергенције или слично). На крају имамо

$$\left|\int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx\right|\leqslant \int_0^\infty e^{-tx}\,dx=\left.\frac{e^{-tx}}{-t}\right|_0^\infty=\frac{1}{t}\to 0,$$

за $t\to\infty$, и на основу тога

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx=\lim_{t\to\infty}\operatorname{arctg}(t)=\frac{\pi}{2}.$$

Треба још поменути и да се опште правило за диференцирање под знаком интеграла обично доказује управо помоћу теореме о мајоризованој конвергенцији, као и да се инверзна Фуријеова трансформација у случају део-по-део непрекидних, апсолутно интеграбилних функција може добити на основу Арцелине варијанте, односно ако то желимо без употребе Лебегове теореме о доминантној конвергенцији, што је од значаја за наставу на прве две године на техничким факултетима.

Напомена. Желео бих се захвалити Универзитету Северне Каролине у Шарлоти за сву подршку с њихове стране док сам био на постдипломском студију рачунарства и информатике.

ЛИТЕРАТУРА

[1] C. Arzelà, *Sulla integrazione per serie*, Atti della Reale Accademia dei Lincei. Rendiconti, **4** (1885), 532–537, 596–599.

[2] N. de Silva, *A concise elementary proof of Arzelà's Bounded Convergence Theorem*, The American Mathematical Monthly, **117**, 10 (2010), 918–920.

[3] S. R. Ghorpade, B. V. Limaye, *A Course in Calculus and Real Analysis*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 2006.

[4] F. Hausdorff, *Beweis eines Satzes von Arzelà*, Mathematische Zeitschrift, **26** (1927), 135–137.

[5] H. Kestelman, *Riemann integration of limit functions*, The American Mathematical Monthly, **77**, 2 (1970), 182–187.

[6] J. W. Lewin, *A truly elementary approach to the Bounded Convergence Theorem*, The American Mathematical Monthly, **93**, 5 (1986), 395–397.

[7] W. A. J. Luxemburg, *Arzelà's Dominated Convergence Theorem for the Riemann integral*, The American Mathematical Monthly, **78**, 9 (1971), 970–979.

[8] A. Sarić, *Arzelà's Bounded Convergence Theorem*, Analysis (De Gruyter) **44**, 2 (2024), 115–119.

E-mail: `asaric@gmail.com`