др Александар Миленковић, Немања Момчиловић

МЕЂУПРЕДМЕТНО ПОВЕЗИВАЊЕ НАСТАВНИХ САДРЖАЈА У РАДУ СА УЧЕНИЦИМА СА ПОСЕБНИМ СПОСОБНОСТИМА ЗА МАТЕМАТИКУ[1]

Увод

Данашњи начин учења у највећој мери се заснива на усвајању знања искључиво у контексту садржаја наставног предмета, а не као део општег знања ученика. Тако усвојено знање најчешће је непотпуно, неспојиво са ширим, системским знањима ученика те не остаје трајно запамћено. Мноштво информација, које се ученицима свакодневно преносе, најчешће не остају трајно запамћене, већ су научене у циљу тренутног савладавања градива, тј. постизања добре оцене.

Временом се међу наставним предметима створила значајнија одвојеност и диференцираност, што је последично довело до удаљавања од холистичког погледа на свет код ученика. Како би се код њих развијао и подстицао такав поглед на свет, треба више инсистирати на међупредметном повезивању. Међупредметно повезивање чини учење једноставнијим, подстиче код ученика креативност, развија логичке способности те унапређује цео процес наставе која на тај начин постаје практична и смисленија. Ученици током тако конципиране наставе лакше повезују и конструишу нова знања и развијају вештине. Међупредметно повезивање омогућује изградњу знања знатно ширих од знања које настаје ограничено на појединачне школске предмете. Оно доприноси дубљем, свеобухватнијем разумевању појава, процеса, појмова и проблема зато што ученик има прилику да их упознаје и разматра из различитих перспектива. Сложенији и разноврснији контекст учења активира бројније и сложеније сазнајне процесе и механизме, од класификовања до успостављања логичких односа и критичког промишљања.

Примена диференцијалног рачуна у физици

Знајући све горенаведено, дошли смо на идеју да са ученицима са посебним способностима за математику најпре осмислимо и испланирамо, а потом и реализујемо час на тему „Примена диференцијалног рачуна у физици“. Како нисмо могли свој план да спроведемо у дело за један школски час, одлучили смо да то

[1]Чланак је заснован на излагању одржаном на XIII симпозијуму Математика и примене на Математичком факултету у Београди децембра 2023. године.

буде двочас. Штавише, одлучили смо да реализујемо угледни час и да позовемо заинтересоване колеге да присуствују. Двочас је одржан 30. октобра 2023. године у одељењу са ученицима четвртог разреда са посебним способностима за математику Прве крагујевачке гимназије.

Часовима је присуствовало 14 ученика тог одељења, 15 колега наставника Прве крагујевачке гимназије, као и стручни сарадници Прве крагујевачке гимназије.

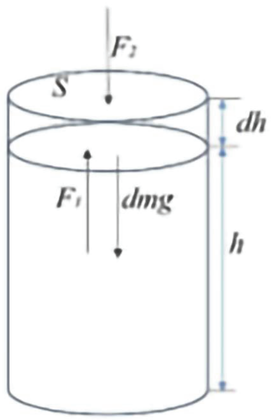
У уводном делу часа обновили смо са ученицима појам извода, геометријску и механичку интерпретација извода, особине извода и правила диференцирања. У централном делу часа, ученици су решавали конкретне задатке који су илустровали примену диференцијалног рачуна на решавање проблема из физике. Када је реч о облику рада, одлучили смо се за индивидуализован приступ настави (ученици су решавали различите задатке).

Сада ћемо приказати два задатка које су ученици решавали на датом двочасу.

1. Познато је да се притисак p, апсолутна температура T и густина ρ ваздуха мењају са надморском висином. Ако су на малим висинама изнад површине Земље притисак и густина ваздуха везани релацијом $\dfrac{p}{\rho^n} = \text{const}$ (где је и $n = \text{const}$), одредити градијент температуре $\dfrac{dT}{dh}$, тј. промену температуре ваздуха са висином. Моларна маса ваздуха је M, универзална гасна константа је R, а интензитет гравитационог убрзања је $g = \text{const}$. Ваздух сматрати идеалним гасом и занемарити ваздушна кретања у атмосфери.

Решење. Означимо са V запремину и са m масу гаса. Из једначине стања идеалног гаса $pV = \dfrac{m}{M}RT$, знајући да се густина гаса рачуна по формули $\rho = \dfrac{m}{V}$, добијамо $p = \dfrac{\rho RT}{M}$. Из $\dfrac{p}{\rho^n} = C = \text{const}$, добијамо $p = C\rho^n$, одакле је $\rho = \rho(T) = \left(\dfrac{RT}{CM}\right)^{\frac{1}{n-1}}$. Одавде се изводи $\dfrac{dp}{d\rho} = nC\rho^{n-1}$ и $\dfrac{d\rho}{dT} = \dfrac{R}{(n-1)CM\rho^{n-2}}$.

Даље, посматрајмо елементарни слој атмосфере облика диска површине S и дебљине dh на висини h изнад површине земље (слика 1). Његова маса је $dm = \rho\, dV = \rho S\, dh$ (сматрамо да се дуж елементарно мале дебљине dh густина ваздуха не мења, а запремина овог слоја је $dV = S\, dh$).



Слика 1

Нека су притисци ваздуха непосредно испод и непосредно изнад овог слоја $p(h)$ и $p(h+dh)$. Услов равнотеже овог слоја је $F_1 = F_2 + dm\, g$, где су $F_1 = p(h)\cdot S$ и $F_2 = p(h+dh)\cdot S$ силе притиска околног ваздуха на овај слој непосредно испод и изнад њега, док је $dm\, g$ гравитациона сила која делује на тај слој. Како је елементарна промена притиска са висином на растојању једнаком дебљини слоја $dp(h) = p(h+dh) - p(h)$, добијамо $\rho g S\,dh = -S\,dp(h)$, одакле је $\dfrac{dp}{dh} = -\rho g$.

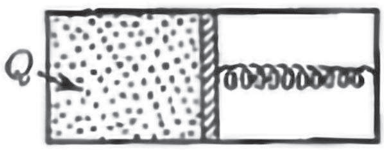
Како је $\dfrac{dp}{dh} = \dfrac{dp}{d\rho}\cdot\dfrac{d\rho}{dT}\cdot\dfrac{dT}{dh}$, односно

$$-\rho g = nC\rho^{n-1}\cdot\frac{R}{(n-1)CM\rho^{n-2}}\cdot\frac{dT}{dh},$$

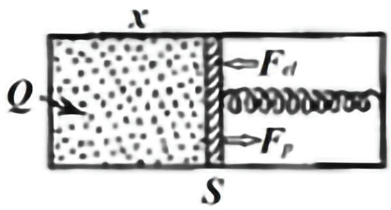
добијамо да је тражени градијент температуре $\dfrac{dT}{dh} = -\dfrac{(n-1)Mg}{nR}$. Како је вредност $-\dfrac{(n-1)Mg}{nR}$ константна, следи да температура ваздуха линеарно опада са порастом висине, под условима датим у задатку.

Напомена. Ученици су добили домаћи задатак који се односио на овај пример. Требало је да покажу да је $\dfrac{d\rho}{dT} = \dfrac{R}{(n-1)CM\rho^{n-2}} = \left(\dfrac{dT}{d\rho}\right)^{-1}$ и истраже како се реално мења температура ваздуха са висином, а затим да упореде добијене резултате и да изведу релевантне закључке.

2. Дат је непокретни суд у коме се налази клип који је са десним зидом суда везан лаком хоризонталном еластичном опругом. Када је суд празан, клип је приљубљен уз леви зид суда и у том положају опруга је недеформисана. Затим се у леви део суда унесе n_m молова идеалног гаса, чији је моларни изохорски топлотни капацитет C_V, док је у десном делу и даље вакуум, слика 2. Гас се затим лагано загрева грејачем убаченим кроз леви зид. Ако зидови суда и клип не проводе топлоту, а трење је занемарљиво, доказати да је моларни топлотни капацитет гаса C у овом процесу загревања константан.



Слика 2



Слика 3

Решење. Нека је након уношења гаса у неком тренутку током лаганог (квазистатичког) загревања дужина дела цилиндра у коме се налази гас једнака x. За ту вредност је управо сабијена опруга, а запремина гаса је $V = Sx$, где је S површина клипа (и попречног пресека суда). Нека је тада притисак гаса једнак p. Услов равнотеже клипа је једнакост интензитета силе притиска гаса $F_p = pS$ и еластичне силе опруге $F_{el} = kx$ (то су једине силе које делују дуж хоризонталног правца), где је k константа еластичности опруге, а x њена деформација, односно $F_p = F_{el}$, одакле је $pS = kx$, слика 3. Како је $x = \dfrac{V}{S}$, за притисак гаса се добија $p = \dfrac{kV}{S^2}$. Знајући да је једначина стања идеалног гаса $pV = n_m RT$, где је p притисак гаса, V његова запремина, n_m количина гаса (број молова), $R = 8{,}314\,\mathrm{J/mol\,K}$ универзална гасна константа и T апсолутна температура гаса, имамо да је $pV = \dfrac{kV^2}{S^2} = n_m RT$, одакле је $V^2 = \dfrac{n_m RS^2}{k} T$ $(= \mathrm{const} \cdot T)$. Диференцирањем последњег израза добијамо да је $2V\,dV = \dfrac{n_m RS^2}{k}\,dT$, одакле се за промену запремине гаса са температуром добија $\dfrac{dV}{dT} = \dfrac{n_m RS^2}{2kV} = \dfrac{n_m R}{2p}$.

Сада треба искористити Први принцип термодинамике: $dQ = dA + dU$, где је dQ елементарна количина топлоте предата гасу, $dA = p\,dV$ је елементарни рад гаса при промени запремине за dV, а $dU = n_m C_V\,dT$ је елементарна промена унутрашње енергије гаса при промени температуре за dT. Добијамо $\dfrac{dQ}{dT} = p\,\dfrac{dV}{dT} + n_m C_V$. Како је моларни топлотни капацитет неког система по дефиницији $C = \dfrac{1}{n_m}\dfrac{dQ}{dT}$, лако се добија $C = \dfrac{1}{n_m}\Big(p\,\dfrac{n_m R}{2p} + n_m C_V\Big) = C_V + \dfrac{R}{2}$. Уочавамо да је у овом процесу моларни топлотни капацитет гаса константан. Такви процеси се називају политропским.

Напомена. Ученици су добили домаћи задатак који се односио и на овај задатак. Требало је да изведу овај резултат користећи само чињеницу да је у овом процесу притисак директно сразмеран запремини, $p = \mathrm{const} \cdot V$, цртајући одговарајући pV дијаграм и одређујући рад гаса графички.

Учесталост унутарпредметног и међупредметног повезивања наставних садржаја у раду са ученицима са посебним способностима

По одржаним угледним часовима, желели смо да утврдимо колико учестало колеге које предају предмете из области математике, информатике и природних наука ученицима са посебним способностима за математику, информатику и биологију и хемију практикују унутарпредметно, односно међупредметно повезивање наставних садржаја тих предмета. У ту сврху, креирали смо Гугл упитник и проследили га у заједничку Вибер групу наставника Прве крагујевачке гимназије. Колегама смо том приликом напоменули да је упитник анониман и да ће се резултати користити у научно-истраживачке сврхе. На свако питање из упитника, одговор је био обавезан. Упитник је попунило 18 колега, од тога шесторо наставника физике, петоро наставника математике, три наставника информатике и по два наставника биологије и хемије.

Када је реч о унутарпредметном повезивању наставних садржаја, половина колега је тврдила да унутарпредметно повезивање наставних садржаја у раду са ученицима надареним за математику, информатику или биологију и хемију практикује једном или више пута недељно. Трећина испитаника је изјавила да унутарпредметно повезивање наставних садржаја остварује једном или више пута месечно, док шестина тврди да повезује наставне садржаје из истог предмета само једном или више пута током читаве школске године. Очекивано, ниједан од анкетираних наставника није изјавио да уопште не спроводи унутарпредметно повезивање наставних садржаја у свом раду.

С друге стране, када је реч о међупредметном повезивању наставних садржаја, ту су одговори нешто другачији. Наиме, само петоро наставника редовно (једном или више пута недељно) остварује међупредметно повезивање наставних садржаја, по трећина наставника то практикује једном или више пута месечно, односно само једном или више пута годишње, док један наставник признаје да уопште не практикује међупредметно повезивање наставних садржаја.

Имајући у виду сложеност наставних садржаја из предмета који су, по програму наставе и учења знатно детаљнији, сложенији, па и апстрактнији за рад са ученицима са посебним способностима, желели смо још да утврдимо на који начин наставници који примењују међупредметно повезивање наставних садржаја то чине – самостално или тимским радом са колегом/колегиницом који предаје други наставни предмет. На наше изненађење, свега двоје наставника је означило да међупредметно повезивање наставних садржаја остварује кроз сарадњу са колегама, док већина колега, тачније њих 16 то чини самостално.

Иако, због обима узорка, нисмо у позицији да изводимо посебне закључке и импликације, сматрамо да се управо у овоме огледају приметне разлике у учесталости реализације унутарпредметног повезивања наставних садржаја с једне стране и међупредметног повезивања наставних садржаја с друге стране, у раду са ученицима са посебним способностима за математику, информатику и биологију и хемију.

Закључак

Овим чланком желели смо да скренемо пажњу на две ствари. Најпре, желели смо да, на неким конкретним примерима илуструјемо како се може реализовати међупредметно повезивање наставних садржаја из математике (конкретно Анализе са алгебром) и физике у раду са ученицима са посебним способностима за математику. Додатно, желели смо да укажемо на наша сазнања да наставници у већој мери практикују унутарпредметно повезивање од међупредметног повезивања наставних садржаја. Позадина ове разлике највероватније лежи у чињеници да наставници у највећој мери самостално анализирају програме наставе и учења других предмета, затим планирају и спроводе самостално часове, док у знатно мањој мери то чине са колегама који имају другачије иницијално образовање. Наравно, то би требало накнадно додатно испитати. Верујемо да би кроз интензивније разговоре, размене идеја с другим колегама који предају дате предмете, наставници, заједно са колегама, очигледније уочавали прилике за реализацију часова, на којима би примењивали међупредметно повезивање наставних садржаја и тиме указали ученицима на већу повезаност садржаја различитих дисциплина, што даље може позитивно утицати на интересовање ученика за дате предмете и њихову мотивацију за учењем.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Beckmann, *A conceptual framework for cross-curricular teaching*, The Mathematics Enthusiast, **6**, 4 (2009).

[2] J. Confrey, H. M. Doerr, *Changing the xurriculum to improve student understanding of function*, In: *Improving Teaching and Learning in Science and Mathematics*, Columbia University, USA, Teachers College, 1996, 162–171.

[3] I. E. Irodov, *Zadaci iz opšte fizike*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Podgorica, 2000.

[4] C. Michelsen, *Expanding context and domain:A cross-curricular activity in mathematics and physics*, ZDM Mathematics Education, **30** (1998), 100–106.

[5] А. Миленковић, Н. Момчиловић, *Међупредметно повезивање наставних садржаја из математике и физике у раду са ученицима са посебним способностима за математику*, XIII симпозијум Математика и примене, Математички факултет, Београд, 1-2. децембар 2023.

[6] A. Saeki, A. Ujiie, M. Tsukihashi, *A cross-curricular integrated learning experience in mathematics and physics*, Community College Journal of Research and Practice, **25** (2001), 417–424.

[7] J. Vrkić Dimić, S. Vidić, *Korelacija i timski rad u nastavi – holistički pristup učenju i poučavanju*, Acta Iadertina, **12** (2) (2015), 93–114.

А.М.: Институт за математику и информатику, Природно-математички факултет Универзитета у Крагујевцу и Прва крагујевачка гимназија

E-mail: aleksandar.milenkovic@pmf.kg.ac.rs

Н.М.: Прва крагујевачка гимназија

E-mail: nemanja.momcilovic@prvagimnazija.edu.rs