Петар Свирчевић

РЕШАВАЊЕ ЛИНЕАРНЕ ДИОФАНТСКЕ ЈЕДНАЧИНЕ СА n НЕПОЗНАТИХ ПОМОЋУ МАТРИЦА

У овом прилогу је дат алгоритам за решавање линеарне диофантске једначине са n непознатих помоћу матрица и детерминанти другог реда, тако да ову методу могу примењивати они ученици који су у средњој школи упознати с тим појмовима. Постоје и други методи за решавање оваквих једначина, на пример, коришћењем инвертовања матрица вишег реда које се могу раставити на блокове, али то је сложенија метода којом се овде нећемо бавити.

Подсетимо се најпре основне чињенице о линеарним диофантским једначинама с две непознате. У даљем ћемо, кадгод кажемо „број“, подразумевати да се ради о целом броју. За бројеве a и b, њихов највећи заједнички делилац ћемо означавати са $M(a,b)$.

Теорема 1. *Линеарна диофантска једначина с две непознате $a_1x+a_2y=b$ нема решења ако $M(a_1,a_2)\nmid b$, а има бесконачно много решења ако $M(a_1,a_2)\mid b$. У последњем случају сва њена решења се могу представити у облику*

$$x=x_0+\frac{a_2}{M(a_1,a_2)}\,t,\quad y=y_0-\frac{a_1}{M(a_1,a_2)}\,t,$$

где је (x_0,y_0) једно решење једначине, а $t\in\mathbf{Z}$ произвољан.

Специјално, *хомогена* једначина $a_1x+a_2y=0$ увек има бесконачно много решења облика $x=\dfrac{a_2}{M(a_1,a_2)}\,t$, $y=\dfrac{a_1}{M(a_1,a_2)}\,t$, $t\in\mathbf{Z}$.

У даљем ћемо разматрати диофантске једначине са n непознатих облика

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b, \tag{1}$$

где су $a_1,a_2,\dots,a_n\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}$, $b\in\mathbf{Z}$ и $n=3,4,\dots$, при чему ћемо највећи заједнички делилац бројева $a_1,a_2,\dots,a_n$ означавати са $M(a_1,a_2,\dots,a_n)$.

Аналогно случају $n=2$, важи следећа

Теорема 2. *Једначина* (1) *нема решења ако $M(a_1,a_2,\dots,a_n)\nmid b$, а има бесконачно много решења ако $M(a_1,a_2,\dots,a_n)\mid b$.*

Доказ наведеног тврђења може се наћи, на пример, у књигама [3] и [5].

Специјално, ако је $M(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$ (а тада је и $M(a_1, a_2, \dots, a_n, b) = 1$), за дату једначину казаћемо да је *сређена* – јасно је да, не ограничавајући општост разматрања, увек можемо сматрати да је овај услов испуњен (иначе, или једначина нема решења или се може скратити са $M(a_1, a_2, \dots, a_n)$).

У наставку најпре показујемо један метод експлицитног одређивања општег решења сређене једначине (1) у специјалном случају када међу коефицијентима уз непознате постоје два која су узајамно проста. Прво ћемо решити један конкретан пример који ће нам бити идеја водиља за разматрање општег случаја.

Пример 1. Решити диофантску једначину

$$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 7 \tag{2}$$

коришћењем матрица и детерминаната другог реда.

Решење. Приметимо најпре да је овде $M(2, -3, 4, -5) = 1$, те је услов за постојање решења испуњен, као и да је $M(4, -5) = 1$. Дату једначину ћемо преписати у облику

$$2x_1 + 1 \cdot (-3x_2 + 4x_3 - 5x_4 - 7) = 0, \tag{3}$$

тако да смо добили хомогену диофантску једначину с две непознате – x_1 и $(-3x_2 + 4x_3 - 5x_4 - 7)$. Она јасно задовољава услов за постојање решења. Увешћемо сад параметар t_1, тако што ћемо заједно с једначином (3) посматрати једначину

$$1 \cdot x_1 + 1 \cdot (-3x_2 + 4x_3 - 5x_4 - 7) = -t_1. \tag{4}$$

Једначине (3) и (4) чине систем од две линеарне једначине с две непознате који можемо записати у матричном облику

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ -3x_2 + 4x_3 - 5x_4 - 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -t_1 \end{bmatrix}.$$

Детерминанта $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ матрице овог система има вредност 1, те ће та матрица имати инверзну чији су чланови целобројни. Заиста, $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, па добијамо да важи

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ -3x_2 + 4x_3 - 5x_4 - 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -t_1 \end{bmatrix}.$$

Одавде следи да је

$$\boxed{x_1 = t_1},$$
$$-3x_2 + 4x_3 - 5x_4 - 7 = -2t_1.$$

Сада настављамо поступак на сличан начин – најпре последњу добијену једначину преписујемо у хомогеном облику

$$-3x_2 + 1 \cdot (4x_3 - 5x_4 - 7 + 2t_1) = 0, \tag{5}$$

па уводимо нови параметар t_2 посматрајући једначину

$$-4x_2 + 1 \cdot (4x_3 - 5x_4 - 7 + 2t_1) = -t_2. \tag{6}$$

И добијени систем (5), (6) може да се напише у матричном облику с матрицом система која има детерминанту једнаку 1; заиста, $\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 1$ и

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Тако је

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ 4x_3 - 5x_4 - 7 + 2t_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -t_2 \end{bmatrix}.$$

одакле

$$\boxed{x_2 = t_2},$$
$$4x_3 - 5x_4 - 7 + 2t_1 = 3t_2.$$

Коначно, последњу једначину преписујемо у облику

$$4x_3 - 5x_4 = -2t_1 + 3t_2 + 7, \tag{7}$$

а последњи параметар t_3 уводимо помоћу

$$\beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 = -t_3, \tag{8}$$

при чему коефицијенте β_3 и β_4 бирамо тако да матрица система (7), (8) има детерминанту једнаку 1. Дакле, желимо да буде $\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ \beta_3 & \beta_4 \end{vmatrix} = 1$, тј. $5\beta_3 + 4\beta_4 = 1$. Како је $M(4,5) = 1$, ова диофантска једначина има решења – једно партикуларно је $(\beta_3, \beta_4) = (1, -1)$, и налазимо $\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$. Тако је

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2t_1 + 3t_2 + 7 \\ -t_3 \end{bmatrix}$$

а одатле

$$\boxed{x_3 = 2t_1 - 3t_2 - 5t_3 - 7},$$
$$\boxed{x_4 = 2t_1 - 3t_2 - 4t_3 - 7}.$$

Сада нам четири уоквирене релације дају опште решење полазне диофантске једначине у облику

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (t_1,\ t_2,\ 2t_1 - 3t_2 - 5t_3 - 7,\ 2t_1 - 3t_2 - 4t_3 - 7), \quad t_1, t_2, t_3 \in \mathbf{Z}.$$

Бирајући произвољне вредности параметара, добијамо партикуларна решења, на пример, за $t_1 = t_2 = t_3 = 1$ се добија решење $(1, 1, -13, -12)$. Заменом се лако проверава да су ово заиста решења (опште, односно посебно) дате једначине. $\triangle$

Пређимо сада на разматрање случаја опште једначине (1), уз услов $M(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$. Осим тога претпоставимо да међу коефицијентима a_1, a_2, ... , a_n постоје два узајамно проста. Нека, на пример, важи $M(a_{n-1}, a_n) = 1$ (иначе бисмо могли да пренумеришемо непознате). Препишимо једначину (1) у облику

$$a_1x_1 + 1 \cdot (a_2x_2 + \cdots + a_nx_n - b) = 0, \tag{9}$$

и уведимо параметар t_1 условом

$$(a_1 - 1)x_1 + 1 \cdot (a_2x_2 + \cdots + a_nx_n - b) = -t_1. \tag{10}$$

Систем једначина (9), (10) има матрицу с детерминантом $\begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_1 - 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ и инверзну матрицу $\begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ a_1 - 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -a_1 + 1 & a_1 \end{bmatrix}$, па је

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ a_2x_2 + \cdots + a_nx_n - b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -a_1 + 1 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -t_1 \end{bmatrix},$$

одакле добијамо

$$\boxed{x_1 = t_1},$$
$$a_2x_2 + \cdots + a_nx_n - b = -a_1t_1.$$

Аналогно првом кораку добијамо систем једначина

$$\begin{aligned} a_2x_2 + 1 \cdot (a_3x_3 + \cdots + a_nx_n - b + a_1t_1) &= 0 \\ (a_2 - 1)x_2 + 1 \cdot (a_3x_3 + \cdots + a_nx_n - b + a_1t_1) &= -t_2, \end{aligned}$$

чије решење у матричном облику гласи

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ a_3x_3 + \cdots + a_nx_n - b + a_1t_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -a_2 + 1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -t_2 \end{bmatrix},$$

односно, у компонентама,

$$\boxed{x_2 = t_2},$$
$$a_3x_3 + \cdots + a_nx_n - b + a_1t_1 = -a_2t_2.$$

Јасно је да овај поступак можемо наставити док не дођемо до матричне једнакости

$$\begin{bmatrix} x_{n-2} \\ a_{n-1}x_{n-1} + a_nx_n - b + a_1t_1 + \cdots + a_{n-3}t_{n-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -a_{n-2} + 1 & a_{n-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -t_{n-2} \end{bmatrix},$$

односно

$$\boxed{x_{n-2} = t_{n-2}},$$
$$a_{n-1}x_{n-1} + a_nx_n - b + a_1t_1 + \cdots + a_{n-3}t_{n-3} = -a_{n-2}t_{n-2}.$$

У последњем кораку формирамо матричну једначину

$$\begin{bmatrix} a_{n-1} & a_n \\ \beta_{n-1} & \beta_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1t_1 - \cdots - a_{n-2}t_{n-2} + b \\ -t_{n-1} \end{bmatrix}, \tag{11}$$

при чему коефицијенте β_{n-1} и β_n бирамо тако да важи $\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n \\ \beta_{n-1} & \beta_n \end{vmatrix} = 1$, тј. да је (β_{n-1}, β_n) партикуларно решење помоћне диофантске једначине $a_{n-1}\beta_n - a_n\beta_{n-1} = 1$. То решење постоји због учињене претпоставке $M(a_{n-1}, a_n) = 1$. При таквом избору коефицијената систем (11) има решење

$$\begin{bmatrix} x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_n & -a_n \\ -\beta_{n-1} & a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a_1t_1 - \cdots - a_{n-2}t_{n-2} + b \\ -t_{n-1} \end{bmatrix},$$

односно

$$\boxed{x_{n-1} = -\beta_n(a_1t_1 + \cdots + a_{n-2}t_{n-2} - b) + a_nt_{n-1}},$$

$$\boxed{x_n = \beta_{n-1}(a_1t_1 + \cdots + a_{n-2}t_{n-2} - b) - a_nt_{n-1}}.$$

Последње две једнакости можемо записати и у облику

$$x_{n-1} = \begin{vmatrix} (a_1t_1 + \cdots + a_{n-2}t_{n-2} - b) & -a_n \\ t_{n-1} & -\beta_n \end{vmatrix},$$

$$x_n = \begin{vmatrix} (a_1t_1 + \cdots + a_{n-2}t_{n-2} - b) & a_{n-1} \\ t_{n-1} & \beta_{n-1} \end{vmatrix}.$$

На овај начин смо доказали следеће тврђење.

Теорема 3. *Линеарна диофантска једначина*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b, \tag{1}$$

уз услове $M(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$ *и* $M(a_{n-1}, a_n) = 1$, *има опште решење облика*

$$\left(t_1, \ldots, t_{n-2}, \begin{vmatrix} (a_1t_1 + \cdots + a_{n-2}t_{n-2} - b) & -a_n \\ t_{n-1} & -\beta_n \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} (a_1t_1 + \cdots + a_{n-2}t_{n-2} - b) & a_{n-1} \\ t_{n-1} & \beta_{n-1} \end{vmatrix}\right), \tag{12}$$

где су $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1} \in \mathbf{Z}$ *произвољни, а* (β_{n-1}, β_n) *је произвољно партикуларно решење помоћне диофантске једначине* $\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n \\ \beta_{n-1} & \beta_n \end{vmatrix} = 1$. ■

Решење (12) можемо записати и помоћу компонената:

$$x_1 = t_1,\ x_2 = t_2,\ \ldots,\ x_{n-2} = t_{n-2},$$

$$x_{n-1} = \begin{vmatrix} (a_1t_1 + \cdots + a_{n-2}t_{n-2} - b) & -a_n \\ t_{n-1} & -\beta_n \end{vmatrix},$$

$$x_n = \begin{vmatrix} (a_1t_1 + \cdots + a_{n-2}t_{n-2} - b) & a_{n-1} \\ t_{n-1} & \beta_{n-1} \end{vmatrix},$$

где $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1} \in \mathbf{Z}$.

Наводимо још два примера једначина које се могу решити приказаним методом.

Пример 2. Решити линеарну диофантску једначину

$$7x_1 - 5x_2 + 11x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 4.$$

Резултат. Компоненте решења су:

$$x_1 = t_1; \quad x_2 = t_2; \quad x_3 = t_3; \quad x_4 = -7t_1 + 5t_2 - 11t_3 - 2t_4 + 4$$
$$x_5 = -7t_1 + 5t_2 - 11t_3 - 3t_4 + 4; \qquad t_1, t_2, t_3, t_4 \in \mathbf{Z}.$$

Пример 3. Решити линеарну диофантску једначину

$$3x_1 - 2x_2 + x_3 - 5x_4 + 4x_5 + x_6 = 1.$$

Резултат. Компоненте решења су:

$$x_1 = t_1; \quad x_2 = t_2; \quad x_3 = t_3; \quad x_4 = t_4; \quad x_5 = 2t_1 - t_2 + 3t_3 - t_4 + t_5 - 1;$$
$$x_6 = -11t_1 + 6t_2 - 13t_3 + 9t_4 - 4t_5 + 5; \qquad t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 \in \mathbf{Z}.$$

Поставља се питање решавања једначина облика (1) код којих није испуњен услов да постоји пар узајамно простих коефицијената. Показаћемо то на једном примеру.

Пример 4. Решити линеарну диофантску једначину

$$6x_1 + 10x_2 + 15x_3 = 31.$$

Решење. Овде је услов $M(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$ испуњен (дакле, једначина је сређена), али не постоји пар узајамно простих коефицијената (заиста, важи $M(6, 10, 15) = 1$, али $M(6, 10) = 2$, $M(6, 15) = 3$, $M(10, 15) = 5$), тако да се не може непосредно применити поступак описан у доказу теореме 3. Међутим, јасно је да једначина има решења (једно очигледно партикуларно решење је тројка $(1, 1, 1)$, а онда свакако има и бесконачно много решења).

Дату једначину ћемо написати у облику

$$6x_1 + 5(2x_2 + 3x_3) = 31 \tag{13}$$

и приметимо да је $M(6, 5) = M(2, 3) = 1$, што ћемо искористити за налажење њених решења. Најпре, једначини (13) придружимо једначину

$$\alpha x_1 + \beta(2x_2 + 3x_3) = t_1, \tag{14}$$

где ћемо вредности коефицијената α и β изабрати тако да важи $\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = -5\alpha + 6\beta = 1$ – то је могуће захваљујући услову $M(6, 5) = 1$. Одмах се види да је једна могућност $\alpha = \beta = 1$. Тада инверзна матрица матрице система (13), (14) има целобројне чланове:

$$\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Зато се решење поменутог система може представити у облику

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_2 + 3x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 31 \\ t_1 \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Одавде се види да мора бити

$$\boxed{x_1 = -5t_1 + 31}.$$

Другој једнакости која следи из (15),

$$2x_2 + 3x_3 = 6t_1 - 31 \tag{16}$$

придружимо једначину

$$\gamma x_2 + \delta x_3 = t_2, \tag{17}$$

при чему коефицијенте γ и δ бирамо тако да матрица система (16), (17) има детерминанту једнаку 1. То је могуће захваљујући услову $M(2,3) = 1$ и испуњено је, рецимо, за $\gamma = 1$, $\delta = 2$. Тада је

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

а решење система (16), (17) се представља помоћу

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6t_1 - 31 \\ t_2 \end{bmatrix},$$

односно

$$\boxed{x_2 = 12t_1 - 3t_2 - 62}, \quad \boxed{x_3 = -6t_1 + 2t_2 + 31}, \quad t_1, t_2 \in \mathbf{Z}.$$

Три добијене уоквирене релације одређују опште решење дате диофантске једначине:

$$(-5t_1 + 31,\ 12t_1 - 3t_2 - 62,\ -6t_1 + 2t_2 + 31), \quad t_1, t_2 \in \mathbf{Z}.$$

Специјално, за $t_1 = 6$, $t_2 = 3$ добија се напред поменуто партикуларно решење $(1, 1, 1)$. $\triangle$

ЛИТЕРАТУРА

[1] F. Ayres, Jr., *Matrices*, Shaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1962.

[2] D. Blanuša, *Viša matematika, I dio*, Zagreb, 1970.

[3] A. Dujella, *Uvod u teoriju brojeva*, PMF, Matematički odjel, Zagreb, 2003.

[4] D. Mitrinović, *Matrice i determinante*, Naučna knjiga, Beograd, 1972.

[5] В. Мићић, З. Каделбург, Д. Ђукић, *Увод у теорију бројева*, 5. изд., Друштво математичара Србије, Београд, 2021.

Tehnička škola, Zagreb

E-mail: petar.svircevic@zg.t-com.hr