Емир Зогић, Диана Долићанин Ђекић, Един Глогић

ТЕОРИЈА ГРАФОВА И ЛОГИЧКО-КОМБИНАТОРНИ ЗАДАЦИ[1]

Апстракт. Логичко-комбинаторни задаци, који су чести на такмичењима ученика основних и средњих школа, одувек су привлачили пажњу ученика због своје једноставности у поставци и дубине математичког размишљања која је неопходна за њихово решавање. У решавању многих таквих задатака важну улогу имају појмови и резултати теорије графова. Графови се формално дефинишу као уређени парови (V, E), где је V скуп чворова, а E бинарна релација на скупу V. Они постају посебно занимљиви када се геометријски представе као скуп тачака (чворова) повезаних непрекидним линијама (гранама).

Овај рад се бави темама као што су степен чвора, Ојлерови и Хамилтонови графови као и усмерени графови. Фокус је стављен на анализу и примену наведених појмова теорије графова у решавању логичко-комбинаторних проблема у основној и средњој школи.

1. Увод

Граф се визуелно представља као скуп тачака у равни међу којима су неке повезане непрекидним кривим линијама. Прецизније, граф се може дефинисати преко појма бинарне релације.

Дефиниција 1.1. *Граф* G је уређени пар (V, E), где је V непразан скуп, а E бинарна релација дефинисана на скупу V. Елементи скупа V се зову *чворови*, а елементи скупа E су *гране* графа G.

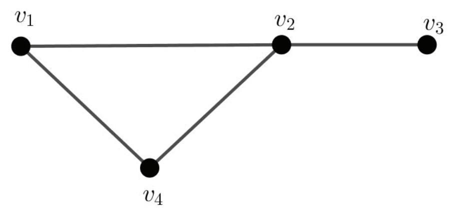
Појам графа добија свој пуни смисао када се скупови и релације на њима представљају управо геометријским фигурама. Примена теорије графова је присутна у теорији електричних кола, хемији, економским наукама, социологији, биологији, итд, о чему се више може наћи у књизи [2].

У овом раду изложићемо неке логичко-комбинаторне задатке из основне и средње школе који се могу решавати уз помоћ теорије графова. Теме које ћемо обрадити тичу се следећих области у теорији графова: степен чвора, Ојлерови и Хамилтонови графови и усмерени графови.

2. Степен чвора у графу

Дефиниција 2.1. За два чвора кажемо да су *суседна* ако су спојени граном. *Степен* чвора v графа G, у ознаци $d(v)$ (или d_v), јесте број његових суседних чворова.

[1]Чланак је заснован на предавању, одржаном на Државном семинару Друштва математичара Србије, 2024. године.



$d(v_1) = 2,\ d(v_2) = 3,\ d(v_3) = 1,\ d(v_4) = 2$

Слика 1

На слици 1 дат је пример графа G са степенима његових чворова.

Теорема 2.1. *За сваки граф $G = (V, E)$ важи*

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|,$$

где $|E|$ означава број елемената скупа E.

Последица 2.1. *У сваком графу број чворова непарног степена је паран.*

Доказ. Нека су V_1 и V_2, редом, скупови чворова непарног и парног степена, $V_1 \cup V_2 = V$. Тада је

$$\sum_{v \in V_1} d(v) + \sum_{v \in V_2} d(v) = \sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

Како је број $\sum_{v \in V_2} d(v)$ паран, следи да је и $\sum_{v \in V_1} d(v)$ паран број па је и $|V_1|$ паран број. ∎

Теорема 2.1 и последица 2.1 су лако разумљиве и њихови докази су једноставни, па су самим тим погодни за додатну наставу у основним и средњим школама.

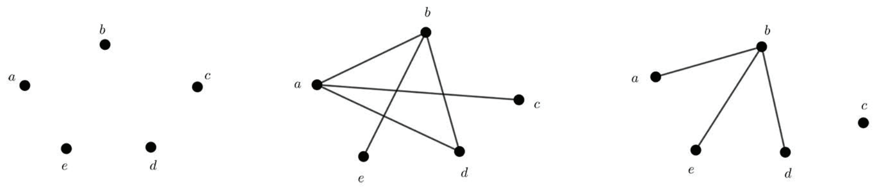
Задатак 2.1. (VI разред) Да ли је могуће да у групи од 5 људи постоји особа која има паран број пријатеља? Ако је особа a пријатељ са особом b, онда се сматра да је и особа b пријатељ са особом a.

Решење. Ако пријатеље означимо словима a, b, c, d, e као чворове графа, а пријатељство између две особе представимо граном, тада имамо граф са 5 чворова. На слици 2 дате су неке од могућности за разматрање проблема у задатку. Напоменимо да међу петоро људи не мора уопште постојати међусобних пријатеља и да је тада степен сваког чвора једнак 0, а 0 је паран број.

Претпоставимо да не постоји особа која има паран број пријатеља. Тада

$$d(a) + d(b) + d(c) + d(d) + d(e) = 2m, \quad \text{где је } m \text{ број грана},$$

што је немогуће јер на левој страни последње једнакости имамо непаран број као збир пет непарних бројева, а на десној је паран број. △



Слика 2. Задатак 2.1

Дефиниција 2.2. Графове код којих су сви степени чворова међусобно једнаки називамо *регуларним графовима*, при чему степен (сваког) чвора у графу зовемо *степеном регуларности* графа.

Задатак 2.2. (VII разред) Може ли на турниру у шаху учествовати 2023 учесника ако сваки од њих има тачно 5 пријатеља међу учесницима?

Решење. Задатак се може преформулисати и на следећи начин: Да ли постоји регуларан граф степена 5 са 2023 чвора? Ако би такав граф постојао, онда би важило

$$2m = \sum_{i=1}^{2023} d_i = 2023 \cdot 5,$$

што је немогуће. △

Задатак 2.3. (VI разред) У некој држави је 100 градова и сваки град је директним путевима повезан са тачно 4 града. Колико је укупно путева у овој држави?

Решење. Нека је G граф чији су чворови градови $v_1, v_2, \ldots, v_{100}$, а гране путеви. Означимо са m број грана. Тада је

$$d(v_1) + d(v_2) + \cdots + d(v_{100}) = 2m,$$

одакле је $100 \cdot 4 = 2m$, па број путева износи $m = 200$. △

Задатак 2.4. (I разред СШ) Цар жели да сагради дворац у којем ће бити 1990 соба у једном нивоу, тако да важе следећи услови:

1. број врата на свакој соби је 0, 1 или 2;
2. између сваке две собе су највише једна врата, а из сваке собе на улицу воде највише једна врата;
3. број врата према улици једнак је 19, а број соба са једним вратима је 90.

Да ли је могуће саградити такав дворац?

Решење. Нека је G граф код кога су чворови собе описаног дворца којих има 1990 и нека спољашњост дворца буде представљена једним чвором тако да граф G укупно има 1991 чвор. Гране графа G нека представљају врата.

Задатак се може преформулисати на следећи начин: Да ли постоји граф са 1991-ним чвором, при чему је један чвор степена 19 и деведесет чворова степена 1, а остали чворови су степена 0 или 2?

Означимо са k број чворова степена 0. Како је

$$\sum_{i=1}^{1991} d_i = 19 + 90 \cdot 1 + k \cdot 0 + (1900 - k) \cdot 2,$$

непаран број, а $\sum_{i=1}^{1991} d_i = 2m$, где је m број грана, паран број, закључујемо да је одговор на постављено питање у задатку одречан. △

3. Ојлерови и Хамилтонови графови

Један од интересантних проблема који се односе на графове јесте да ли се задата фигура у равни може нацртати једним потезом без подизања оловке са папира. Графови са том особином се називају *Ојлеровим графовима.* Уз Ојлерове графове који подразумевају да се сви чворови у графу могу обићи тако што се кроз сваку грану прође тачно једанпут, разматрају се и тзв. Хамилтонови графови у којима се обилазе сви чворови тачно једанпут.

Ради прецизности у опису Ојлерових и Хамилтонових графова, навешћемо дефиниције путева, повезаних графова и циклуса.

Пут са n чворова је граф P_n, $n \in \mathbf{N}$, са скупом чворова $\{1, 2, \dots, n\}$ и скупом грана $\{\{i, i+1\} \mid i = 1, 2, \dots, n-1\}$.

Чворови u и v графа G су *повезани* ако у G постоји пут чији су крајњи чворови u и v. Граф G је *повезан граф* ако су свака два његова чвора повезана.

Циклус са n чворова је граф C_n, $n \in \mathbf{N}$, са скупом чворова $\{1, 2, \dots, n\}$ и скупом грана $\{\{i, i+1\} \mid i = 1, 2, \dots, n-1\} \cup \{n, 1\}$.

Дефиниција 3.1. *Ојлеров пут* у графу G је пут који тачно једном пролази кроз сваку његову грану. Ојлеров пут може бити и затворен, и тада се назива *Ојлеров циклус.* Граф G је *Ојлеров* ако садржи Ојлеров циклус. Граф G је *полуојлеров* ако садржи Ојлеров пут.

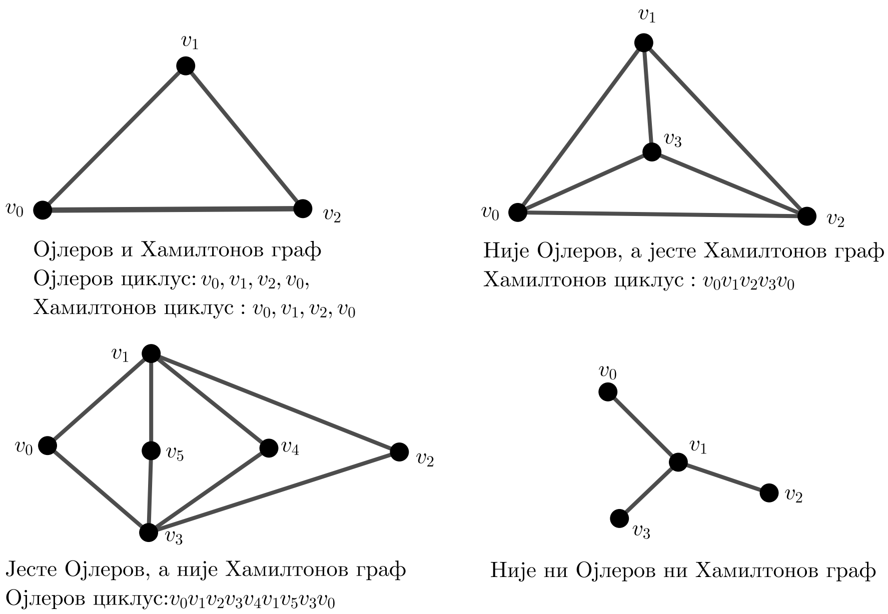
Теорема 3.1. *Нека је G повезан граф.*

1. *Граф G је Ојлеров ако и само ако су му сви чворови парног степена.*
2. *Граф G је полуојлеров ако и само ако садржи највише два чвора непарног степена.*

Доказ 1. Претпоставимо да је дати граф Ојлеров, тј. нека садржи Ојлеров циклус. Ако се крећемо по Ојлеровом циклусу, онда увек када неком граном уђемо у неки чвор, морамо користити неку другу грану (коју још нисмо користили) да изађемо из тог чвора. Како код Ојлерове контуре морамо проћи кроз све гране (и на крају се вратити у полазни чвор), добијамо да су степени свих чворова парни.

Нека су сада сви чворови графа G парног степена. Како је G повезан граф, формирамо пут који пролази међусобно различитим гранама у графу G који почиње из произвољног чвора x_1 и повезује различите чворове овог графа. Како је степен сваког чвора паран кад год овај пут стигне у неки чвор, то постоји нова грана која га одводи од њега. Због тога ће овај пут, који уједно пролази и међусобно различитим чворовима, завршити у чвору x_1, тј. постати циклус. Означимо га са C_1. Ако он садржи све гране датог графа, он је Ојлеров. У противном удаљимо циклус C_1, из графа G, чиме се добија нови граф G_1. Како је степен сваког чвора графа G и циклуса C_1 паран, следи да ће и степен сваког чвора графа G_1 бити паран. Како је граф G повезан, граф G_1 и циклус C_1 имају бар један заједнички чвор. Означимо га са x_2. Почев од њега формирамо нови циклус C_2 у графу G_1, на исти начин како смо формирали циклус C_1. Унија циклуса C_1 и C_2 је такође циклус. Ако он није Ојлеров, продужимо овај поступак, чиме ћемо формирати циклус још веће дужине (броја грана у циклусу). Како су сви чворови који нису садржани у овако формираном циклусу парног степена, а број необухваћених грана стално опада, то поступак мора да се оконча и то формирањем Ојлеровог циклуса.

2. Нека су x и y чворови графа са непарним степенима. Додавањем нове гране $\{x, y\}$, доказ следи на основу дела теореме под 1. ■



Слика 3. Примери Ојлерових и Хамилтонових графова

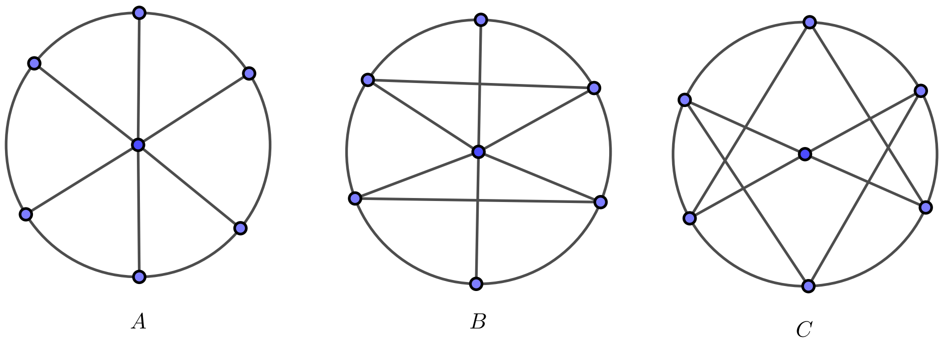
Дефиниција 3.2. *Хамилтонов пут* у графу G је пут који обилази све чворове графа тачно једанпут. *Хамилтонов циклус* у графу G је циклус који садржи све чворове графа G. Граф G је *Хамилтонов* ако садржи Хамилтонов циклус.

Разни примери Ојлерових и Хамилтонових графова као и њихових веза дати су на слици 3.

Теорема 3.2. *Уколико за повезани граф са $n \geqslant 3$ чворова важи да је $\delta \leqslant \frac{n}{2}$, где је δ најмањи степен чвора, онда је граф Хамилтонов.*

Задатак 3.1. (V разред) Која се од фигура на слици 4 може нацртати једним потезом оловке полазећи из:

(а) једне утврђене тачке; (б) било које тачке фигуре?

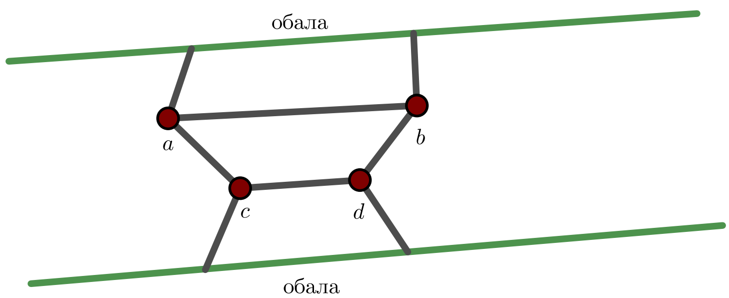


Слика 4. Задатак 3.1

Решење. Фигура A се не може нацртати једним потезом јер су сви чворови непарног степена 3.

Фигура B се може нацртати једним потезом, јер има само два чвора непарног степена, али само ако пођемо из једног темена непарног степена, а у другом завршимо.

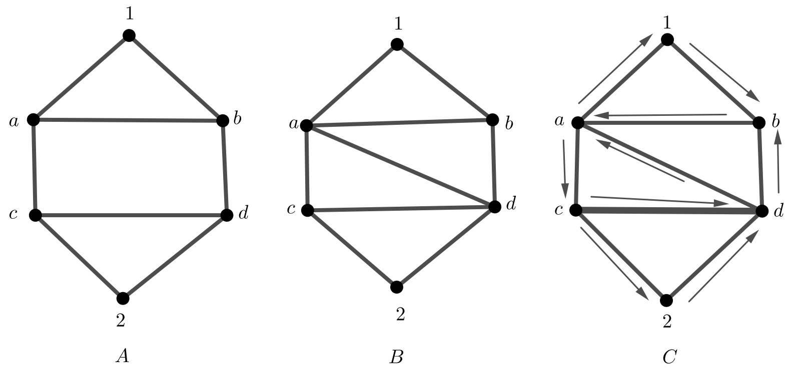
Фигура C може се нацртати једним потезом полазећи из било које тачке. △



Слика 5. Задатак 3.2

Задатак 3.2. (VII разред) На реци Амазон налазе се четири острва која су међусобно и са обалама повезана помоћу 8 мостова, као што је приказано на слици 5. Може ли се шетњом започетом са неког од острва, или обале, прећи преко свих мостова, при чему се сваки мост прелази само једанпут? Ако је то немогуће које нове мостове треба изградити између острва, или острва и обала, која до сада нису била повезана, тако да је поменута шетња могућа?

Решење. Постављеном задатку можемо придружити граф приказан на слици 6.A. Чворови a, b, c, d који одговарају острвима, непарног су степена, а чворови 1 и 2, који одговарају обалама, парног су степена. Овај граф није Ојлеров, те не садржи Ојлеров циклус. Тражена шетња се не може обавити.

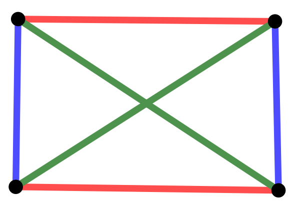


Слика 6. Решење задатка 3.2

Ако повежемо острва a и d или b и c, новим мостом (слика 6.B), граф ће имати два чвора непарног степена, а остали су парног степена, те је полуојлеров. Он садржи Ојлеров пут, при чему му је почетак у неком чвору непарног степена. Шетња је могућа (слика 6.C). $\triangle$

Задатак 3.3. (I разред СШ) Град има 1980 раскрсница, а у сваком од њих састају се по три улице. Постоји кружна аутобуска линија, која пролази кроз сваку раскрсницу тачно једанпут. Одлучено је да се у свакој улици засаде стабла само једне од следећих врста дрвећа: кестен, бреза и липа. Доказати да је то могуће учинити тако да се у свакој раскрсници састају три дрвореда различитих врста.

Решење. Задатак се може преформулисати на следећи начин: доказати да се гране регуларног графа степена регуларности 3 који поседује Хамилтонову контуру могу обојити у 3 боје тако да из сваког чвора полазе гране различитих боја.



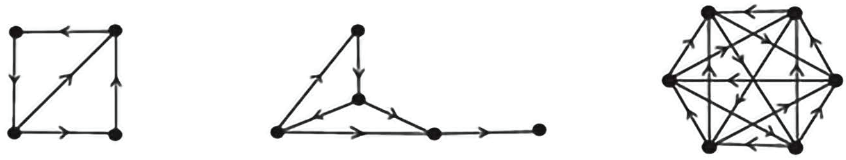
Слика 7. Решење задатка 3.3

Идеја је да гране у Хамилтоновој контури обојимо наизменично двема бојама. Како је број чворова 3-регуларног графа паран, прва и последња грана Хамилтонове контуре биће обојене различито. Преостале гране обојимо трећом бојом и тиме смо добили тражено бојење.

4. Усмерени графови

Дефиниција 4.1. *Усмерени граф* или *диграф* D је уређени пар (V, A), где је V скуп чворова, а A скуп лукова односно усмерених грана које спајају чворове скупа V. Диграф се може замишљати као граф код кога свака грана има смер.

Наводимо неке примере усмерених графова.

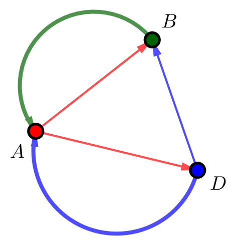


Слика 8. Усмерени графови

Задатак 4.1. (I разред СШ) Наставник је приликом прегледања тестова уочио да је неко од ученика преписивао. Избор је сузио на троје ученика, Ану, Бојана и Дениса. Ана је изјавила: „Ја нисам преписивала!“, Бојан: „Ана је преписивала!“, и Денис: „Ја нисам преписивао!“. Ако знамо да само један ученик говори истину, ко је преписивао?

Решење. Бар једна од изјава коју су дали Ана и Бојан мора бити тачна. Бојанова изјава не може бити тачна јер је тада тачна и Денисова изјава. Остаје да је тачна Анина изјава. Из лажности Денисове изјаве следи да је Денис кривац.

На решење задатка може се надовезати графовска интерпретација увођењем усмереног графа. Нека чворови A, B, D, редом представљају ученике Ану, Бојана и Дениса. Анина изјава да није преписивала представљена је са две усмерене гране од чвора A ка чворовима B и D јер се Анина изјава може тумачити као оптужба да су Бојан и Денис преписивали. Бојанова изјава да је Ана преписивала представљена је усмереном граном од чвора B ка чвору D. Денисова изјава, слично као Анина, представљена је са две усмерене гране од чвора D ка чворовима A и B (слика 9).



Слика 9. Решење задатка 4.1

Са слике 9 видимо да у чвор D улази само једна грана и како само један ученик говори истину, закључујемо да је Денис био ученик који је преписивао. △

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Андрић, *Математика X*, Приручник за припремање за такмичења ученика основних школа од IV до VIII разреда – прва књига, Круг, Београд, 1996.

[2] Д. Цветковић, *Теорија графова и њене примене*, Научна књига, Београд, 1990.

[3] Е. Миловановић, Д. Долићанин, Т. Мирковић, И. Миловановић, *Графови–збирка задатака*, Државни универзитет у Новом Пазару, 2011.

[4] M. Mišolić, *Dodatne teme u srednjoškolskoj nastavi matematike – teorija grafova*, diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, 2017.

[5] Д. Стевановић, В. Балтић, С. Симић, М. Ћирић, *Дискретна математика, основе комбинаторике и теорије графова*, Друштво математичара Србије, 2008.

[6] D. Stevanović, M. Milošević, V. Baltić, *Diskretna matematika, osnove kombinatorike i teorije grafova – zbirka rešenih zadataka*, Materijali za mlade matematičare, sv. 43, Društvo matematičara Srbije, 2004.

[7] D. Veljan, *Kombinatorika sa teorijom grafova*, Školska knjiga, Zagreb, 1989.

Е.З. и Е.Г.: Државни универзитет у Новом Пазару

E-mail: ezogic@np.ac.rs, edinglogic@np.ac.rs

Д.Д.Ђ.: Факултет техничких наука Универзитета у Приштини са привременим седиштем у Косовској Митровици

E-mail: diana.dolicanin@pr.ac.rs