НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ
LXIX, 1-2 (2024), 1–19

Др Небојша Икодиновић

НАПРЕДНИ КОНЦЕПТИ НА ЕЛЕМЕНТАРНОМ НИВОУ — ТЕОРЕМЕ НЕМОГУЋНОСТИ[1]

Апстракт. Напредне концепте математике треба пажљиво планирати и систематски разрађивати од раног школовања. У чланку је неколико напредних концепата, који излазе из оквира школске математике, разматрано са елементарног становишта одређеног наставним програмима. Највећа пажња је посвећена познатим теоремама немогућности (о несамерљивости, неконструктибилности, недоказивости, неодлучивости итд.) које имају велики методички значај и популаризаторски потенцијал, јер спадају у фундаменталне резултате модерне математике, а и посебно су атрактивне за ширу јавност. Основу чланка чине специфични задаци (пројекти) прилагођени основношколској, одн. средњошколској математици. За решавање ових задатака је довољан школски ниво математике, а решења омогућавају анализу и дискусију усмерену ка напредним нивоима.

1. Увод

Наставне теме углавном планирамо и обрађујемо поштујући принцип научне заснованости, који је базиран на апстрактном, формалном, општем садржају, превасходно постављеном у оквире строго дедуктивног резоновања. Наравно, научни приступ се надовезује на конкретна, неформална, појединачна искуства и запажања, обликована интуитивним и здраворазумским размишљањем. Ови наизглед супротстављени поларитети представљају носећи стуб наставног процеса који би требало непрекидно да балансира између ових крајности. Исто се може рећи и за сам научно-истраживачки процес. Као илустрацију наводимо цитат из чланка *Откриће форсинга* (2002. год.), у коме Пол Коен[2] описује своју револуционарну методу доказивања независности неких тврдњи од аксиома теорије скупова: *Да би се размишљало продуктивно, морају се користити све интуитивне и неформалне методе расуђивања које су на располагању.*

Преласком на више нивое обраде неке математичке теме, интуиција све више „бледи“, а хеуристичке компоненте наставе, надовезане на разумљиве проблемске ситуације, све се више занемарују, те просечном ученику постаје све теже да

[1] Чланак је заснован на пленарном предавању ***Напредни концепти на елементарном нивоу – теореме немогућности***, одржаном на Државном семинару Друштва математичара Србије, 2024. године. Снимак предавања се може погледати на `YouTube` каналу Друштва математичара Србије, `https://www.youtube.com/@user-vo1ec2re7w`

[2] Пол Коен (1934–2007), амерички математичар, најпознатији по доказима независности континуум хипотезе и аксиоме избора од аксиома Цермело-Френкелове теорије скупова (ZF).

учи и развија одговарајуће компетенције. Данас је општеприхваћена теза да хеуристичке вештине такође треба плански развијати. Свака наставна тема треба да се обликује и усмерава ка напредном садржају који ће се на њу надовезати. Као једна од најзначајнијих карактеристика програма се узима јака повезаност и усклађеност сродних наставних тема на различитим нивоима школовања. Хеуристичка организација наставе омогућава и реализацију најважнијих општих исхода образовања: учење са разумевањем, логичко памћење, функционалну примену знања и вештина.

Појмови су производ дугог и сложеног процеса развитка мишљења које почиње опажајним и практичним мишљењем. Одавно су велики, стари ауторитети психологије образовања попут Аха, Пијажеа, Виготског[3] и многих других, показали да је стварање појмова скоро увек продуктивно, а не репродуктивно, и да појам настаје у току сложене операције усмерене ка решавању неког задатка [4]. Зато је припрему за напредне садржаје најприродније остварити кроз задатке и пројекте, за чије решавање је довољан елементарни ниво, али који могу отворити дискусију о напреднијим темама са циљем да се ученици са њима интуитивно упознају.[4] Главна идеја водиља за састављање оваквих задатака могла би се описати речима Лава Виготског [1]: *Неопходно је пред ученике поставити задатак који се не може решити другачије него стварањем појма. Тај иницијални задатак представља камен-темељац на коме ће се изграђивати појам.* Наредни одељци ће бити посвећени школским задацима и пројектима усмереним ка тзв. теоремама немогућности, које су имале велики значај за настанак модерне математике.

2. Теореме немогућности

Свака математичка теорема која показује својеврсну *немогућност* да се нешто уради (конструише, докаже, одлучи итд.), по правилу, имала је огроман значај за развој модерне математике и рађање нових дисциплина (видети нпр. [4]). Овакве теореме, познате и као *теореме немогућности*, спадају и у најпопуларније математичке резултате који привлаче пажњу шире јавности, инспиришу нове научне резултате изван математике, филозофске расправе, уметничку фикцију итд. Међутим, у настави математике се углавном наводе само као занимљивости, без било каквог детаљнијег приказа и шире дискусије.

Уопштено говорећи, саму математику је створила немогућност директног, непосредног решавања проблема. Геометрија – „мерење земље“ – јесте назив за математику античког доба. Међутим, права геометрија се рађа баш из немогућности директног мерења, решавањем проблема одређивања висине пирамида и стубова, ширине река, па до одређивања међусобних растојања између Земље, Месеца и Сунца и величине ових небеских тела.

[3]Нарцис Ах (1871–1946), немачки психолог; Жан Пијаже (1896–1980), швајцарски развојни психолог и филозоф; Лав Виготски (1896–1934) совјетски психолог и социолог

[4]Треба истаћи и да оваква настава подразумева да математичко образовање наставника знатно излази из оквира школске математике.

Првом значајном теоремом немогућности сматра се откриће несамерљивости дијагонале и странице квадрата. Користећи савремену терминологију, централно питање, које је довело до овог открића, може се формулисати на следећи начин.

> **Проблем самерљивости**. Могу ли мерни бројеви дијагонале и странице квадрата, при мерењу истом јединицом мере, истовремено бити природни бројеви?

Негативан одговор на претходно питање је почетак покушаја да се ускладе дужи (објекти које меримо) и бројеви (којима изражавамо резултат мерења). Усклађивање је трајало вековима, све до 19. века и радова Дедекинда и Кантора.[5]

Најпознатије теореме немогућности односе се на древне античке конструктивне задатке.

> **Проблем трисекције угла**. Лењиром и шестаром произвољан угао поделити на три једнака дела.

> **Проблем удвостручавања коцке**. Лењиром и шестаром конструисати страницу коцке чија је запремина двоструко већа од запремине задате коцке.

> **Проблем квадратуре круга**. Лењиром и шестаром конструисати квадрат чија је површина једнака површини датог круга.

Сматра се да су ови древни проблеми формулисани око 430 пре н. е. Немогућност да се лењиром и шестаром обаве жељене конструкције је показана такође у 19. веку, када су алгебра и математичка анализа развиле довољно моћне методе.

Вековима су трајали покушаји да се Еуклидов пети постулат изведе из осталих аксиома еуклидске геометрије, наравно уз уверење да се то може учинити. Пети постулат, одн. *аксиому паралелности* данас формулишемо по узору на Хилбертове[6] „Основе геометрије“ [7]:

> Нека је a произвољна права и A тачка ван a; тада постоји, у равни одређеној правом a и тачком A, највише једна права која пролази кроз A и не пресеца a.

Резултати које је добио Лобачевски[7], истражујући доказивост аксиоме паралелности, довели су до *нееуклидских геометрија* које историчари математике сматрају открићем од епохалног значаја и великом променом у филозофији саме математике.

[5] Рихард Дедекинд (1831–1916), немачки математичар; Георг Кантор (1845–1918), немачки математичар. Посебно су значајни Дедекиндови прилози аксиоматизацији аритметике и заснивању реалних бројева. Два Дедекиндова рада преведена су на многе језике и често заједно штампана као Есеји о теорији бројева: (I) Непрекидност и ирационални бројеви (1858); (II) Природа и значење бројева (1888). Чланак (I) је преведен у публикацији *Заснивање наставе математичке анализе*, Друштво математичара Србије (2019).

[6] Давид Хилберт (1862–1943), немачки математичар

[7] Николај Лобачевски (1792–1856), руски математичар

Рачунар, симбол модерног доба, у извесном смислу се може сматрати производом који је осмишљен у разматрањима „немогућих“ проблема. Реч је о проблемима које је у првој половини 20. века постављао чувени немачки математичар Хилберт. На 2. Светском математичком конгресу, 1900. године, он је одржао чувено предавање на коме је видовито представио 23 проблема за наступајући век. Један од тих проблема остао је познат као

> **10. Хилбертов проблем**. За дату Диофантову једначину са било којим бројем непознатих и целобројним коефицијентима, наћи поступак којим се може одлучити, користећи коначан број операција, да ли та једначина има или нема решења.

У данашњој терминологији, тражи се алгоритам који ће за улаз облика $F(x_1, \dots, x_k) = 0$, где је F полином са непознатим $x_1, \dots, x_k$ и целобројним коефицијентима, вратити одговор ДА, ако једначина има целобројна решења, а у супротном одговор НЕ. На пример, за улаз $x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$ алгоритам даје одговор ДА, а за улаз $x_1^3+x_2^3-x_3^3=0$ даје одговор НЕ.[8] Нешто касније, на математичком конгресу у Болоњи, 1928. године, Хилберт је формулисао општији проблем, и тражио поступак за решавање било које добро дефинисане класе проблема. Овај општији проблем, познат као *проблем одлучивости*, убрзо је добио негативан одговор. Велике заслуге у решавању проблема одлучивости припадају Геделу и Черчу, али је свакако суштински допринос дао Тјуринг[9] који је трагајући за неодлучивим проблемима замислио апстрактну машину за решавање одлучивих проблема. Та апстрактна машина данас се назива *универзална Тјурингова машина*, а њена (у извесном смислу слабија) физичка реализација се назива *рачунар*. Десети Хилбертов проблем је дуже чекао на одговор. Дефинитиван одговор је дао Матијасевич[10], 1970. године, доказавши да не постоји поступак који се тражи у 10. Хилбертовом проблему. Више детаља о решењу овог Хилбертовог проблем може се пронаћи у [6].

2.1. Задаци за загревање

Сасвим уопштено говорећи, основне методе на којима се заснивају докази теорема немогућности јесу: 1) индиректно резоновање и 2) налажење контрапримера. Ове методе свакако захтевају напредни начин размишљања и треба их систематски неговати од раног школовања. Наводимо неколико једноставних задатака који би могли послужити као узор за задатке који подстичу развој поменутих вештина. Задаци прате програм за основне школе и римски бројеви испред формулација препоручују разред у коме би се задатак могао решавати.

Задатак 1. [**Индиректно резоновање**]
IV Ако је $a+b>100$, онда је $a>50$ или $b>50$. Објасните.

---

[8] Решења једначине $x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$ су тзв. Питагорине тројке. Према Великој Фермаовој теореми, за $n \geqslant 3$, не постоје цели бројеви x_1, x_2, x_3 такви да је $x_1^n+x_2^n=x_3^n$.

[9] Курт Гедел (1906–1978), аустријско-амерички математичар; Алонзо Черч (1903–1995), амерички математичар; Алан Тјурниг (1912–1954), енглески математичар

[10] Јуриј В. Матијасевич (1947–), руски математичар

V Ако је ab непаран број, онда и a и b морају бити непарни. Објасните.
VI Троугао може имати највише један прав угао. Објасните.
VII Ако је ab ирационалан број, онда је бар један од бројева a или b ирационалан. Објасните.

Решење. У сваком од наведених захтева, индиректно размишљање се природно намеће. (IV) Ако ниједан од бројева a и b није већи од 50, збир не може бити већи од 100. (V) Ако би један од бројева a или b био паран, и производ ab би био паран. (VI) Ако би троугао имао два права угла, онда би збир свих углова тог троугла морао бити већи од $180°$. (VII) Ако су и a и b рационални бројеви, њихов производ би такође био рационалан. □

Задатак 2. [**Контрапримери**]
IV Нађите два правоугаоника истих површина и различитих обима.
V Нађите два броја чији је збир дељив са 7, а ниједан од њих није дељив са 7.
VI Нађите два троугла који показују да троугао већег обима не мора имати и већу површину.
VII Конструишите петоугао чије су све странице међусобно једнаке, а који није правилан.

Решење. За сваки од наведених захтева, постоји више могућих одговора. У таквим случајевима, корисно је потражити што више могућности. Наравно, најважније је из контрапримера извући одговарајући закључак. (IV) Правоугаоник $2\,\mathrm{cm} \times 6\,\mathrm{cm}$ има исту површину као правоугаоник $3\,\mathrm{cm} \times 4\,\mathrm{cm}$, али су обими ова два правоугаоника различити. Закључујемо, правоугаоници истих површина не морају имати једнаке обиме. (V) Збир $10 + 11$ је дељив са 7, али $7 \nmid 10$ и $7 \nmid 11$. Закључујемо, делилац збира не мора да дели ниједан од сабирака. (VI) Посматрајмо два правоугла троугла, троугао Δ_1 чије су катете $a_1 = 100\,\mathrm{cm}$ и $b_1 = 0{,}1\,\mathrm{cm}$ и троугао Δ_2 чије су катете $a_2 = 3\,\mathrm{cm}$ и $b_2 = 4\,\mathrm{cm}$. Нека су c_1 и c_2 редом хипотенузе троуглова Δ_1 и Δ_2. Проценимо обиме ова два троугла (користећи, у другом случају, неједнакост троугла):

$$O_1 = a_1 + b_1 + c_1 \geqslant 100{,}1\,\mathrm{cm} \ \text{ и } \ O_2 = a_2 + b_2 + c_2 \leqslant 2(a_2 + b_2) = 14\,\mathrm{cm}.$$

Дакле, $O_1 > O_2$. Међутим,

$$P_1 = \frac{a_1 b_1}{2} = 5\,\mathrm{cm}^2 \ \text{ и } \ P_2 = \frac{a_2 b_2}{2} = 6\,\mathrm{cm}^2,$$

одакле следи $P_1 < P_2$. (VII) Жељени петоугао се може добити од квадрата и једнакостраничног троугла који имају једну заједничку страницу и немају заједничких унутрашњих тачака. □

2.2. Несамерљивост

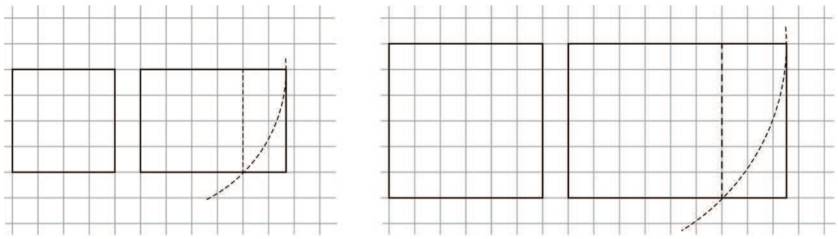
Проблем несамерљивости дијагонале и странице квадрата прате два веома суптилна концепта: индиректно мишљење и појам конвергенције. Они представљају основ за многе важне математичке теме и треба им посветити посебну пажњу. Наравно, неопходне су постепене припреме за сваки концепт посебно. Наредни задатак је осмишљен тако да ученицима (основних школа) предочи феномене који прате мерење дијагонале квадрата његовом страницом. Погодно је проблем мерења дужине превести у проблем мерења површине, јер овај други приступ пружа више могућности да се основне идеје очигледно представе. Сходно томе, следећи задатак се односи на мерење површине правоугаоника чија је једна страница јединична дуж, а друга страница је дијагонала јединичног квадрата.

Задатак 3. [VII] а) Нацртајте произвољан квадрат користећи квадратну мрежу у свесци. Конструишите затим правоугаоник чија је једна страница једнака страници квадрата, а друга страница је једнака дијагонали квадрата. Цртајте тако да се једна краћа страница правоугаоника налази на линији квадратне мреже.

б) Користећи квадратну мрежу свеске, процените површину правоугаоника ако је јединица мере полазни квадрат.

в) Упоредите своју процену са проценама осталих ученика. Запишите своја запажања.

Решење и дискусија. а) На слици 1 су приказане две могућности.



Слика 1. Процена површине правоугаоника помоћу квадратне мреже

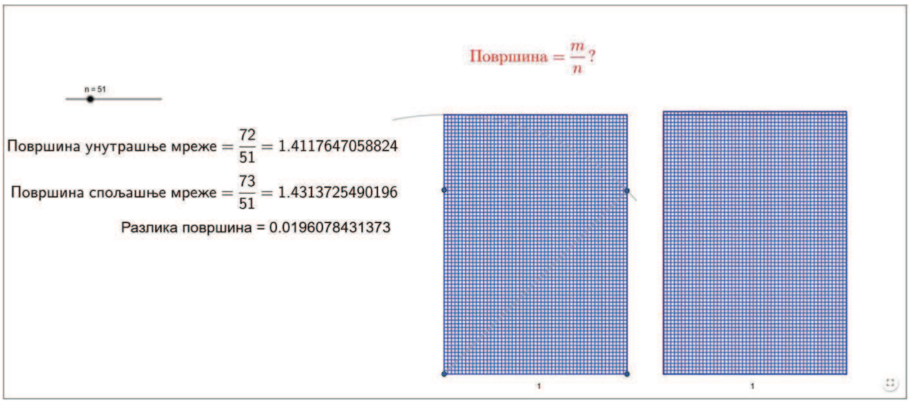
б) За процену површине правоугаоника користимо квадратић мреже нацртане у свесци. (Стандардно, квадратић јесте квадрат странице 5 mm, али то није релевантно.) „Квалитет“ процене површине правоугаоника зависиће од величине полазног квадрата. Што је већи полазни квадрат (тј. садржи више квадратића мреже), процена површине правоугаоника ће бити прецизнија. Нека је n мерни број странице полазног квадрата мерене страницом квадратића. На слици 1 лево је $n = 4$, а на слици 1 десно је $n = 6$. Површину правоугаоника P, узимајући да је јединица мере полазни квадрат, процењујемо одређивањем:

- највећег броја квадратића који се могу надовезати дуж дуже странице правоугаоника, тако да се не „изађе“ из правоугаоника; ако је m добијени број, онда је $P > \frac{mn}{n^2} = \frac{m}{n}$;
- најмањег броја квадратића који се могу надовезати дуж дуже странице правоугаоника, тако да се „покрије“ читава страница; ако је M добијени број, онда је $P < \frac{Mn}{n^2} = \frac{M}{n}$.

Наводимо неке процене у зависности од броја n.

n	процена површине P		
4	$\frac{5}{4} < P < \frac{6}{4}$	тј. $1{,}25 < P < 1{,}5$	(слика 1, лево)
5	$\frac{7}{5} < P < \frac{8}{5}$	тј. $1{,}4 < P < 1{,}6$	
6	$\frac{8}{6} < P < \frac{9}{6}$	тј. $1{,}3333 < P < 1{,}5$	(слика 1, десно)
7	$\frac{9}{7} < P < \frac{10}{7}$	тј. $1{,}2857 < P < 1{,}4286$	
8	$\frac{11}{8} < P < \frac{12}{8}$	тј. $1{,}375 < P < 1{,}5$	

в) Важно је приметити да се са порастом броја n добија све прецизнија процена. Геометријски софтвери пружају велике могућности да се ефектно прикажу процене за велики број вредности n (слика 2).



Слика 2. Geogebra прилог за мерење површине правоугаоника:
`https://www.geogebra.org/m/ndeng7ff`

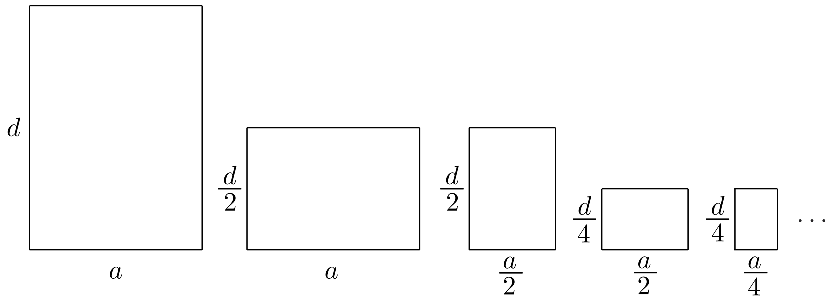
Повећавањем вредности n уочавамо да се не добија тачна вредност површине. Заиста, испоставља се да не постоји n за које се изједначавају површине највеће унутрашње мреже и најмање спољашње мреже. Другим речима, површина правоугаоника, мерена полазним квадратом, није рационалан број. То свакако не можемо проверити поступком који је описан у овом задатку. Сврха задатка је само да се такав резултат наслути. Додатно, приказани поступак мотивише и неке базичне концепте теорије мере, превасходно унутрашњу и спољашњу меру. □

Правоугаоник из претходног задатка има једно занимљиво својство које је нашло и практичну примену при стандардизацији димензија папира.

Задатак 4. [VII] А-формат папира се дефинише следећим својством: *Ако се папир пресавије на пола, добија се правоугаоник истог облика, тј. остаје сачувана размера дуже и краће странице.* За почетни А-формат, означен А0, узима се правоугаоник површине $1\,\mathrm{m}^2$ који задовољава наведено својство; А1 се добија половљењем дуже странице А0 формата; А2 се добија половљењем дуже странице А1 формата, итд. Одредите приближно у милиметрима димензије А0, А1, А2, А3, А4 и А5 формата.

Решење и дискусија. Једнакост коју нам дају познати обрасци за површину квадрата, $\frac{d^2}{2} = a^2$, можемо да запишемо и на следећи начин: $\frac{d}{a} = \frac{a}{d/2}$. Овај запис има занимљиву геометријску интерпретацију:

(∗) када преполовимо дужу страницу, добијамо правоугаоник истог облика (сличан) што значи да је сачувана размера страница.



Слика 3. Правоугаоници А-формата

Ако наставимо да половимо дужу страницу, добијамо низ правоугаоника истог облика (слика 3).

$$\frac{d}{a} = \frac{a}{d/2} = \frac{d/2}{a/2} = \frac{a/2}{d/4} = \cdots$$

А-формат папира се дефинише управо особином (∗), уз додатни договор да је формат А0 правоугаоник површине $1\,\mathrm{m}^2$. Потражимо најприближније целобројне вредности страница А0 формата, у милиметрима, које задовољавају дате услове. Другим речима, А0 формат одређују дужи a и d такве да је

$$d^2 = 2a^2, \quad ad = 1\,000\,000\,\mathrm{mm}^2.$$

Једноставна последица првог услова је једнакост $d^4 = 2a^2d^2$, па узимајући у обзир и други услов добијамо

$$d^4 = 2\,000\,000\,000\,000\,\mathrm{mm}^2.$$

Потрагу за (приближном целобројном) вредношћу броја d можемо обавити *цифра-по-цифра*. Број d је сигурно између 1000 и 2000, јер је

$$1000^4 < d^4 = 2\,000\,000\,000\,000 < 2000^4.$$

Наставимо са потрагом између које две стотине (унутар друге хиљаде) се налази d. Како је

$$1100^4 = 1\,464\,100\,000\,000; \quad 1200^4 = 2\,073\,600\,000\,000,$$

закључујемо да је $1100 < d < 1200$. На исти начин одређујемо цифру десетица. Из

$$1180^4 = 1\,938\,777\,760\,000; \quad 1190^4 = 2\,005\,339\,210\,000$$

следи $1180 < d < 1190$. Најзад, одређујемо и цифру јединица. Из

$$1189^4 = 1\,998\,607\,065\,841; \quad 1190^4 = 2\,005\,339\,210\,000$$

добијамо $1189 < d < 1190$. Узимамо да је приближна целобројна вредност дуже странице 1189 mm, одакле једноставно налазимо и приближну целобројну вредност краће странице:

$$a = \frac{1\,000\,000}{1189} \approx 841$$

Уместо добијених вредности, углавном се узимају најближи мањи парни бројеви, јер се мањи А формати добијају полови̂љењем дуже странице. Када се то узме у обзир добијамо да су димензије А0 формата 1188×840. Одредимо димензије неколико мањих формата:

(A1) како је $1188 : 2 = 594$, димензије A1 формата су 840×594;
(A2) како је $840 : 2 = 420$, димензије A2 формата су 594×420;
(A3) како је $594 : 2 = 297$, димензије A3 формата су 420×297;
(A4) како је $420 : 2 = 210$, димензије A4 формата су 297×210;
(A5) како је[11] $296 : 2 = 148$, димензије A5 формата су 210×148 итд.

Посебно треба нагласити однос страница добијених правоугаоника:

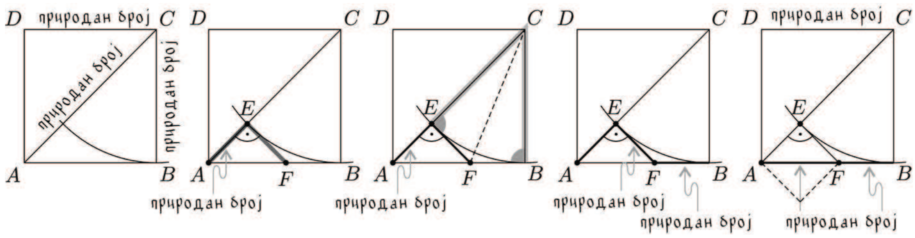
$$\frac{1188}{840} \approx 1{,}4142857, \quad \frac{840}{594} \approx 1{,}4141414, \quad \frac{594}{420} \approx 1{,}4142857, \ldots$$

Овај (пројектни) задатак наговештава проблем одређивања односа између дијагонале и странице квадрата. $\square$

Претходни задаци представљају добар увод у разматрање главног питања о самерљивости дијагонале и странице квадрата.

Задатак 5. [VII] Могу ли мерни бројеви дијагонале и странице квадрата истовремено бити природни бројеви? За одговор и образложење искористите следећи текст и слике које га прате.

Претпоставимо да је одговор потврдан! Нека је n најмањи природан број са следећом особином: у квадрату странице n јединица мере, мерни број дужине дијагонале је такође природан број.



Слика 4. Доказ несамерљивости странице и дијагонале квадрата

[11] Уместо 297 узима се први парни број мањи од њега.

Решење и дискусија. Постоји веома много доказа да се однос дијагонале и странице квадрата не може представити као рационалан број. Доказ приказан у овом задатку је вероватно најближи доказу из античких времена. У њему се користи посебно важан принцип доброг уређења природних бројева: ако постоји природан број са извесном особином, онда постоји и најмањи природан број са таквом особином. Другим речима, скуп природних бројева не дозвољава бесконачан спуст. Ако, из претпоставке да тврдња важи за неки природан број, покажемо да тврдња мора да важи и за неки строго мањи природан број, онда закључујемо да тврдња не важи ни за један природан број.

Одговор надовезујемо на дати текст и слику 4. Нека је $ABCD$ квадрат чија је страница дугачка n јединица мере, према претпоставци у наведеном тексту. На дијагонали AC (чија је дужина природан број) одређена је тачка E таква да је $CE = CB$. Тада је дужина дужи $AE = AC - CE$ такође природан број. Није тешко приметити да је $AB > AE$ (тј. да је дијагонала квадрата краћа од двоструке вредности странице). Тачка F, на страници AB, изабрана је тако да $\triangle AEF$ буде једнакокрако правоугли троугао, са правим углом у темену E. Из подударности троуглова CEF и CBF ($CE = CB$, $CF \equiv CF$, $\sphericalangle CEF = \sphericalangle CBF = 90^\circ$) следи $EF = FB$. Дакле, $AE = FB$, што значи да је дужина дужи FB природан број, па је природан број и дужина дужи $AF = AB - FB$. Дуж AF је једнака дијагонали квадрата странице AE и дужине обе дужи су природни бројеви, што је у супротности са полазном претпоставком, јер је $AE < n$. $\square$

2.3. Недоказивост

Лобачевски је покушавао индиректним расуђивањем да докаже Еуклидов пети постулат из осталих аксиома еуклидске геометрије. Претпоставио је негацију (једног еквивалента) петог постулата и уз остале аксиоме почео да изводи последице, очекујући да ће у једном тренутку доћи до контрадикције. Не откривши никакву противречност, смело је претпоставио да пети постулат није последица осталих аксиома и да се осим еуклидске геометрије може на сличан начин развити сасвим другачија геометрија. Ова „индиректна метода“ је само наговестила недоказивост, док је коначна потврда тог наговештаја добијена конструисањем контрапримера. Да бисмо што једноставније објаснили о каквим контрапримерима је реч, посматраћемо знатно једноставнији случај. Следимо Хилбертове Основе геометрије [7] и, уз одговарајућа поједностављења, *замишљамо два различита система ствари: ствари првог система називамо тачкама, а ствари другог система правим, и замишљамо их у извесном односу припадања.* Издвајамо само четири аксиоме припадања:

(I_1) За сваке две тачке увек постоји права којој припадају обе ове тачке.

(I_2) За сваке две тачке не постоји више од једне праве којој би припадале обе тачке.

(I_3) Свакој правој припадају најмање две тачке.

(I_4) За сваку праву постоји тачка која не припада тој правој.

и следећу варијанту аксиоме паралелности:

(V) За сваку праву и сваку тачку која не припада тој правој, постоји само једна права којој припада дата тачка и нема заједничких тачака са датом правом.

Како показати да се тврдња (V) не може доказати из претпоставки (I_1), (I_2), (I_3), (I_4)? Наредни задатак илуструје суштину методе контрапримера којом се разматрају питања недоказивости.

Задатак 6. [$\mathrm{I}_{\text{СШ}}$] Замишљамо два различита система ствари: ствари првог система називамо *члановима*, а ствари другог система *тимовима*, и замишљамо их у извесном односу *припадања*. Тимови су формирани тако да важе следећи услови:

(I_1) За свака два члана увек постоји тим коме припадају оба члана.

(I_2) За свака два члана не постоји више од једног тима коме би припадала оба члана.

(I_3) Сваком тиму припадају најмање два члана.

(I_4) За сваки тим постоји члан који не припада том тиму.

Дата је тврдња:

(V) За сваки тим и сваког члана који не припада том тиму, постоји само један тим коме припада дати члан и нема заједничких чланова са датим тимом.

а) Полазећи од само три члана формирајте тимове тако да важе услови (I_1), (I_2), (I_3), (I_4).

б) Проверите да ли је тачна тврдња (V), за три члана и тимове формиране под а).

в) Ослањајући се на решења захтева под а) и б), објасните зашто тврдња (V) није последица услова (I_1), (I_2), (I_3), (I_4).

Решење и дискусија. а) Ако чланове обележимо са A, B и C, једноставно добијамо да треба формирати три тима: $\{A, B\}$, $\{B, C\}$, $\{C, A\}$.

б) Директно се проверава да тврдња (V) није тачна за системе формиране под а). Изаберимо, на пример, тим $\{A, B\}$ и (јединог) члана C који не припада том тиму. Да ли постоји тим коме припада C али нема заједничких чланова са $\{A, B\}$? Наравно, одговор је негативан. До истог закључка се долази и у осталим случајевима.

в) Ако је нека тврдња последица извесних услова, онда је та тврдња сигурно тачна у свим ситуацијама у којима су испуњени сви наведени услови. Под а) је одређена једна ситуација у којој су истинити сви услови (I_1), (I_2), (I_3), (I_4), а под б) је показано да тврдња (V) није тачна у тој ситуацији.

Корисно је испитати и да ли је могућа ситуација која испуњава услове (I_1), (I_2), (I_3), (I_4), а тачна је и тврдња (V). Није тешко проверити да ће то бити случај ако од четири члана A, B, C, D формирамо тимове $\{A, B\}$, $\{A, C\}$, $\{A, D\}$, $\{B, C\}$, $\{B, D\}$ и $\{C, D\}$. $\square$

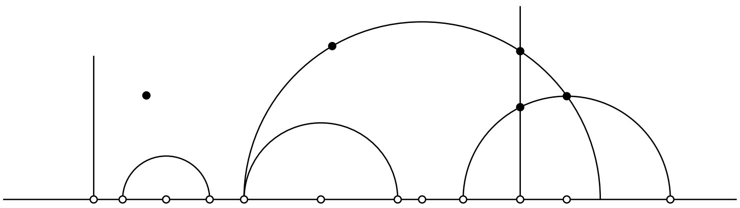
Посебно значајни „системи ствари“ су уведени у следећем задатку. Реч је тзв. Поенкареовом[12] полураванском моделу хиперболичке планиметрије.

[12] Анри Поенкаре (1854–1912), француски математичар

Задатак 7. [$\mathrm{I}_{\text{СШ}}$] Дата је (еуклидска) отворена полураван, тј. полураван без граничне праве. Посматрајте следећа два система ствари: *тачке* отворене полуравни и *линије* које могу бити

- полуправе чији почеци припадају граничној правој полуравни и нормалне су на њој, или
- полукружнице те полуравни, чији су центри на граничној правој полуравни,

при чему у оба случаја линија не садржи крајње тачке са граничне праве. Подразумева се уобичајен однос *припадања* између тачака и линија (слика 5).



Слика 5. Поенкареов полуравански модел

Испитајте које од следећих особина задовољавају ови системи тачака и линија.

(I_1) За сваке две тачке увек постоји линија којој припадају обе тачке.

(I_2) За сваке две тачке не постоји више од једне линије којој припадају обе тачке.

(I_3) Свакој линији припадају најмање два тачке.

(I_4) За сваку линију постоји тачка која не припада тој линији.

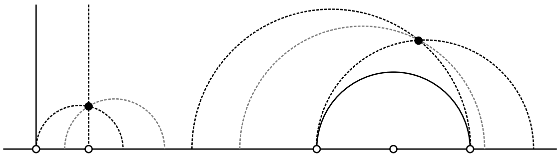
(V) За сваку линију и сваку тачку која не припада тој линији, постоји само једна линија којој припада дата тачка и која нема заједничких тачака са датом линијом.

Решење и дискусија. Очигледно је да су тачни искази (I_3) и (I_4). Испитивање истинитости преосталих исказа погодно је посматрати конструктивно, тј. свести на решавање следећих конструктивних задатака.

1. За задате две тачке полуравни конструисати линију (одговарајућу полуправу или полукружницу) која садржи те две тачке.
2. За задату линију (полуправу или полукружницу) и тачку која не припада тој линији, конструисати линију која садржи дату тачку и нема заједничких тачака са датом линијом.

Први конструктивни задатак увек има јединствено решење, одакле следи да су искази (I_1) и (I_2) тачни. Заиста, ако задати пар тачака припада нормали на граничну праву полуравни, онда је тражена линија одговарајућа полуправа. Ако задати пар тачака не припада нормали на границу полуравни, онда треба конструисати симетралу дужи коју одређују те две тачке и тражена линија ће бити полукружница чији је центар пресек симетрале и границе полуравни.

Други конструктиван задатак такође увек има решења, али оно никада није јединствено. Без обзира на избор линије и тачке која јој не припада, увек можемо



Слика 6. Исказ (V) није тачан за Поенкареов полуравански модел

конструисати неограничено много линија које садрже дату тачку и немају заједничких тачака са датом линијом (слика 6).

Решење другог конструктивног задатка показује да исказ (V) није тачан за Поенкареов полуравански модел. Штавише, за сваку линију и сваку тачку која не припада тој линији, постоји бесконачно линија којима припада дата тачка и које немају заједничких тачака са датом линијом. □

2.4. Трисекција угла

Напори да се реше древни конструктивни проблеми, посебно проблем квадратуре круга, често се сликовито описују уверењем да је *утрошено више интелектуалног напора да се реши проблем квадратуре круга него да се човек пошаље на Месец.* Прве потпуне доказе да се проблеми трисекције угла и удвостручавања коцке не могу решити лењиром и шестаром дао је француски математичар Венцел[13], 1837. године. За проблем трисекције угла, Венцел доказује следећу теорему.

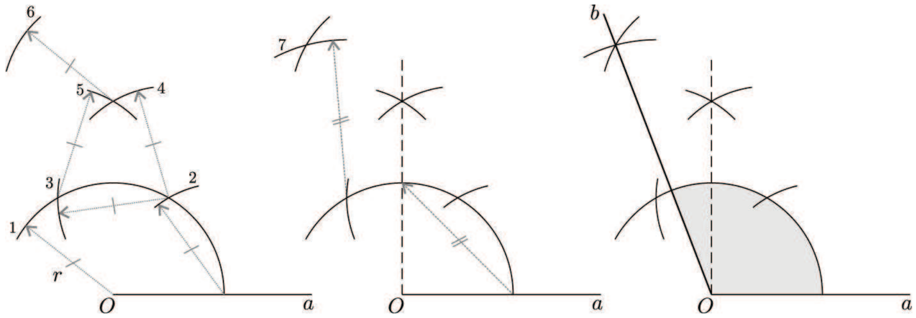
Теорема. *Лењиром и шестаром није могуће конструисати угао од* 20°.

Из претходне теореме директно следи да је проблем трисекције угла нерешив лењиром и шестаром, јер бисмо у супротном, трисекцијом угла од 60° добили угао од 20°.

Доказ Венцелове теореме изостављамо, али предлажемо неколико задатака којима се истичу веома значајни аспекти Венцеловог резултата. Задаци су инспирисани једним проблематичним `YouTube` прилогом. `YouTube`, `TikTok` и друге популарне платформе обилују (едукативним и „едукативним“) прилозима различитог квалитета. Постоје одлични прилози који пружају изузетне могућности за освежење стандардних модела организације наставе и креативно планирање. Међутим и лоши примери имају дидактички потенцијал, јер се могу искористити да изоштре моћ запажања ученика и јачају њихово критичко мишљење. Управо ова идеја је определила наш избор видеа за проблемску ситуацију. Видео приказује једну сасвим једноставну, лако разумљиву геометријску конструкцију, која се завршава некоректном тврдњом да је конструисан угао од 110°. Тврдња се директно супротставља Венцеловом резултату. Прав угао је могуће конструисати лењиром и шестаром, па бисмо конструкцијом угла од 110° једноставно добили и угао од 20°. Следећа три задатка су осмишљена тако да усмеравају истраживање коректности конструкције, отварајући простор за дискусију о самим методама оповргавања.

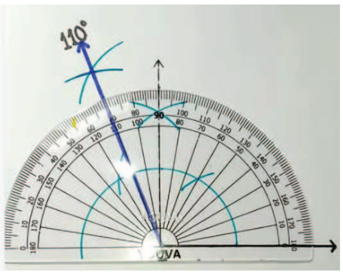
[13] Пјер Венцел (1814–1848), француски математичар

На YouTube-у је доступно неколико видео прилога који својим насловима најављују конструкцију угла од 110°. Слика 7 приказује најважније сцене једне од поменутих видео-конструкција. Полазећи од полуправе, означимо је Oa, прво је конструисано шест лукова једнаког полупречника r (слика 7, лево), а затим и седми лук чији је полупречник дијагонала квадрата странице r (слика 7, средина). Пресек шестог и седмог лука одређује полуправу Ob (слика 7, десно).



Слика 7. Сцене проблематичног YouTube-видеа

Видео се завршава сценом којом је аутор „показао“ да је конструисан угао од 110°. Озбиљнија анализа видео-конструкције би могла започети следећим задацима.



Слика 8. Завршна сцена проблематичног YouTube-видеа

Задатак 8. [II$_{\text{СШ}}$] Конструишите угао подударан углу aOb из видеа. Измерите овај угао. Уколико мерење покаже да величина угла одступа од 110°, шта би могли бити разлози одступања? Непрецизност конструкције или ваљаност саме методе?

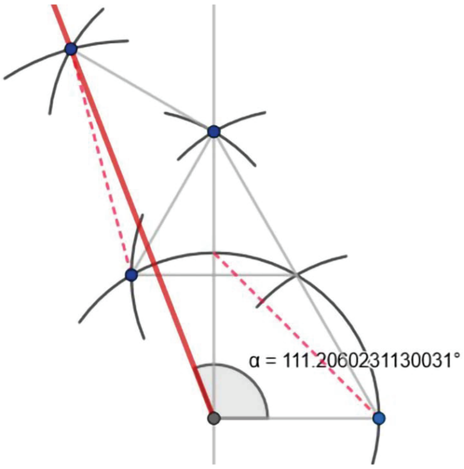
Решење и дискусија. На слици 9 приказана је одговарајућа конструкција помоћу Geogebra-е. Мерењем је утврђено да је мера конструисаног угла већа од 110°.

Да ли су ово довољни разлози да се конструкција одбаци? Као што се мерењем не може показати коректност конструкције, ова метода није поуздана ни за одбацивање конструкције. □

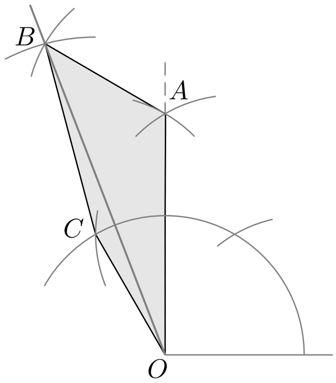
Задатак 9. [II$_{\text{СШ}}$] Уочите четвороугао $OABC$ добијен приказаном конструкцијом (слика 10).

а) Одредите углове и странице четвороугла $OABC$.

б) Одредите (приближно) величину угла који дијагонала OB заклапа са страницама четвороугла $OABC$.



Слика 9. Приказ проблематичне YouTube-конструкције у Geogebra-и и мерење конструисаног угла



Слика 10. Четвороугао $OABC$

Решење и дискусија. а) Четвороугао $OABC$ је састављен од два једнакокрака троугла OCA и BAC, са заједничким краком дужине r. Углови и странице овог четвороугла се једноставно рачунају: $\sphericalangle O = 30°$, $\sphericalangle A = 120°$, $\sphericalangle B = 45°$, $\sphericalangle C = 165°$; $OC = AB = r$, $BC = r\sqrt{2}$, $OA = r\sqrt{3}$.

б) Применом косинусне теореме на $\triangle OAB$ и коришћењем једнакости $\cos 120° = -\frac{1}{2}$ добијамо:

$$\begin{aligned} OB^2 &= AB^2 + AO^2 - 2AB \cdot AO \cdot \cos\sphericalangle OAB \\ &= r^2 + 3r^2 - 2\sqrt{3}\, r^2 \cos 120° = r^2\big(4+\sqrt{3}\big). \end{aligned}$$

Даље, још једном применом косинусне теореме на исти троугао имамо:

$$\begin{aligned} \cos\sphericalangle AOB &= \frac{OA^2+OB^2-AB^2}{2OA\cdot OB} = \frac{3r^2+r^2\left(4+\sqrt{3}\right)-r^2}{2r^2\sqrt{3}\cdot\sqrt{4+\sqrt{3}}} \\ &= \frac{6+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\sqrt{4+\sqrt{3}}} = \frac{2\sqrt{3}+1}{2\sqrt{4+\sqrt{3}}} \approx 0,9322857809. \end{aligned}$$

Најзад, употребом калкулатора рачунамо, наравно приближно, величину угла AOB, $\sphericalangle AOB \approx 21{,}2060231208°$. Овај резултат појачава сумњу у полазну конструкцију. Да је полазна конструкција коректна, угао AOB би требало да буде једнак $20°$, а рачун је показао одступање веће од $1°$. Ипак, још увек немамо чврст доказ да конструкција није коректна. Разлог је наравно непрецизност приближног рачунања (два пута смо употребили знак $\approx$ уместо $=$). $\square$

Задатак 10. $[\mathrm{II}_{\text{СШ}}]$

а) Доказати идентитет $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$.

б) Доказати да је $\cos 20°$ решење једначине $4x^3 - 3x - \frac{1}{2} = 0$.

в) Доказати да број $\frac{2\sqrt{3}+1}{2\sqrt{4+\sqrt{3}}}$ није решење једначине $4x^3-3x-\frac{1}{2}=0$.

Решење и дискусија. а) Идентитет је једноставна последица познатих формула: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ и $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$.

б) Тврђење следи из а) за $\alpha=20°$, и једнакости $\cos 60°=\frac{1}{2}$.

в) Нешто захтевнији доказ, и то само у техничком смислу, потребан је за део в). Претпоставимо да број $\frac{2\sqrt{3}+1}{2\sqrt{4+\sqrt{3}}}$ јесте решење једначине $4x^3-3x-\frac{1}{2}=0$. Из једнакости

$$\begin{aligned} x(4x^2-3) &= \frac{2\sqrt{3}+1}{2\sqrt{4+\sqrt{3}}}\left(4\cdot\frac{(2\sqrt{3}+1)^2}{4(4+\sqrt{3})}-3\right) \\ &= \frac{2\sqrt{3}+1}{2\sqrt{4+\sqrt{3}}}\left(\frac{13+4\sqrt{3}-3(4+\sqrt{3})}{4+\sqrt{3}}\right) \\ &= \frac{2\sqrt{3}+1}{2\sqrt{4+\sqrt{3}}}\cdot\frac{1+\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}=\frac{7+3\sqrt{3}}{2\sqrt{4+\sqrt{3}}(4+\sqrt{3})} \end{aligned}$$

следи да би морало бити

$$\frac{7+3\sqrt{3}}{2\sqrt{4+\sqrt{3}}(4+\sqrt{3})}=\frac{1}{2},\ \text{тј.}\ 7+3\sqrt{3}=\sqrt{4+\sqrt{3}}(4+\sqrt{3}).$$

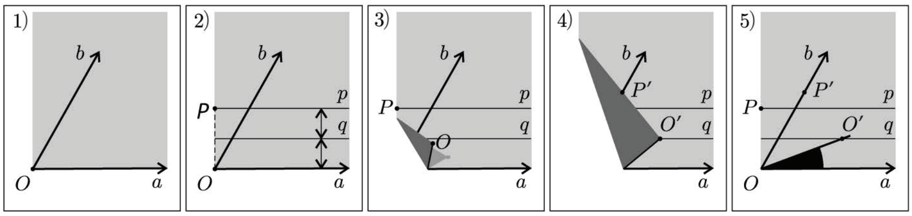
После квадрирања обеју страна последње једнакости добијамо $24+9\sqrt{3}=0$. Последња једнакост је нетачна, јер је $\sqrt{3}$ ирационалан број. Важно је истаћи да се и интуитивно могло наслутити да кубну једначину не може да задовољи неки број представљен бројевним изразом у коме се осим основних рачунских операција користи само квадратни корен.

Тек сада извлачимо непобитан закључак: *полазна конструкција није коректна;* YouTube-*видео не показује конструкцију угла од* $110°$. Интернет обилује некоректним конструкцијама које могу бити полазиште за сличне задатке. □

Чињеница да се лењиром и шестаром не може извршити трисекција произвољног угла инспирише потрагу за новим справама и триковима којима би се овај конструктивни задатак могао решити. Такозвана *оригами трисекција* може бити посебно занимљива за анализу. Оригами трисекцију је открио јапански математичар Хисаши Абе, 70-их година 20. века.

Задатак 11. [$\mathrm{I}_{\text{СШ}}$] а) Испробај оригами трисекцију угла приказану на слици 11.[14] 1) На правоугаоном папиру нацртати оштар угао aOb тако да се теме O поклопи са врхом доњег левог угла папира, а крак Oa буде нацртан дуж доње ивице. 2) Нацртати праве p и q паралелне краку Oa, тако да једна права (q) буде једнако удаљена од друге праве (p) и праве на којој се налази крак Oa. Нацртати

[14] Уместо слике, ученицима се може показати видео који приказује оригами трисекцију. YouTube, TikTok и сличне платформе садрже велики број добрих анимација овог поступка.

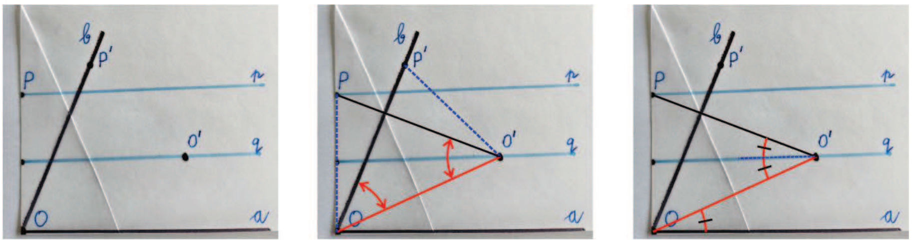


Слика 11.

подножје P нормале из O на праву p. 3-4) Доњи леви угао папира пресавити тако да тачке O и P редом „падну“ на q и Ob, остављајући „трагове“ O' и P'. 5) Полуправа OO' одређује трећину полазног угла aOb.

б) Да ли је приказаним поступком почетни угао заиста подељен на три једнака дела? Детаљно образложите одговор.

Решење и дискусија. а) Пожељно је користити провидан (тзв. паус) папир и нацртати све објекте који су од значаја (слика 12, лево). Додатно, требало би истаћи и линију пресавијања, јер ће особине осне симетрије бити важне у образложењу поступка.



Слика 12. Анализа оригами трисекције

б) Троуглови $OO'P'$ и $O'OP$ су осносиметрични у односу на линију пресавијања (слика 12, средина). Сходно томе, углови $O'OP'$ и $OO'P$ су једнаки, тј. $\sphericalangle OO'P = \sphericalangle O'Ob$.

Троугао $OO'P$ је једнакокрак и права q полови угао при врху $OO'P$. Према познатој теореми о угловима на трансверзали паралелних правих, оштар угао који q заклапа са OO' једнак је углу $O'Oa$. Закључујемо да је $\sphericalangle O'Oa$ једнак половини угла $OO'P$, па је према раније показаном

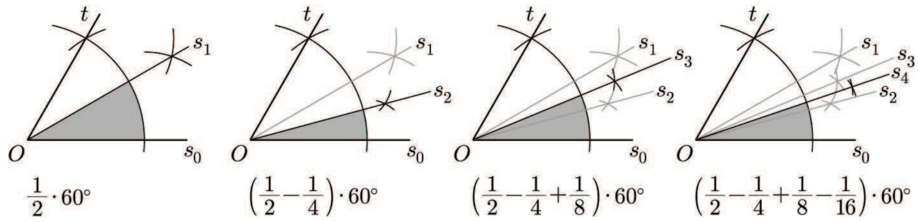
$$\sphericalangle O'Oa = \frac{1}{2}\sphericalangle O'Ob.$$

Из последње једнакости директно следи да полуправа OO' одређује трећину угла aOb. $\square$

Чињеница да се лењиром и шестаром не може извршити трисекција произвољног угла инспирише потрагу за приближним решењима овог задатка. „Произвољно добре“ приближне конструкције се могу искористити као мотивациони примери граничних процеса.

Задатак 12. [$\text{III}_{\text{СШ}}$]

а) Опишите конструкције приказане на слици 13 и одредите величине осенчених углова.



Слика 13. Приближна трисекција угла

б) Настављањем претходног поступка, добијају се углови:

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\right)\cdot 60°, \quad \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}\right)\cdot 60°, \quad \text{итд.}$$

Шта примећујете?

в) Може ли се лењиром и шестаром конструисати угао чија се величина разликује од угла од $20°$ за мање од $0,01°$? Може ли се разлика учинити још мањом?

г) Ако је ε било који позитиван број, може ли се лењиром и шестаром конструисати угао чија се величина за мање од ε степени разликује од $20°$?

Решење и дискусија. а) Приближна трисекција угла s_0Ot се састоји од низа конструкција симетрала углова. Индуктивно дефинишемо низ полуправих $(Os_n)_{n\geqslant 0}$ на следећи начин:

- Os_0 је један крак датог угла s_0Ot, а Os_1 је симетрала угла s_0Ot;
- за $n \geqslant 2$, полуправа Os_n је симетрала (оштрог) угла $s_{n-2}Os_{n-1}$.

После сваке конструисане полуправе Os_n, једноставно можемо одредити величину угла s_0Os_n. Угао s_0Ot се прво дели на два једнака дела, затим се од половине одузима четвртина, па се додаје осмина, па одузима шеснаестина итд. Ако је величина полазног угла s_0Ot једнака $60°$, онда се сваком новом симетралом добијају следећи углови: $\frac{1}{2}\cdot 60° = 30°$, $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\cdot 60° = 15°$, $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)\cdot 60° = 22{,}5°$, $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}\right)\cdot 60° = 18{,}75°$.

б) Настављајући претходни поступак, даље добијамо: $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\right)\cdot 60° = 20{,}625°$, $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}\right)\cdot 60° = 19{,}6875°$ итд. Примећујемо да сваком новом симетралом добијамо угао који се све мање разликује од $20°$. Уопште, узимајући у обзир формулу за збир коначно много чланова геометријског низа, добијамо:

$$\begin{aligned}
\sphericalangle s_0Os_n &= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\cdots-\frac{(-1)^n}{2^n}\right)\cdot 60° \\
&= \frac{1}{2}\cdot\left(1+\left(-\frac{1}{2}\right)^1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)\cdot 60°
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1-(-\frac{1}{2})^n}{1+\frac{1}{2}} \cdot 60^\circ = \Big(1-(-\frac{1}{2})^n\Big) \cdot 20^\circ.$$

Дакле, конструкцијом симетрале Os_n добијамо угао s_0Os_n који је за $\frac{20^\circ}{2^n}$ већи или мањи од 20°.

в-г) Број $\frac{20^\circ}{2^n}$ се може учинити произвољно малим, за довољно велико n. На пример, за $n = 11$ имамо

$$\frac{20^\circ}{2^{11}} = \frac{20^\circ}{2048} = 0,009765625^\circ < 0{,}01^\circ.$$

Уопште, за било које $\varepsilon > 0$, постоји природан број n такав да је $2^n > \frac{20}{\varepsilon}$. Нека је n_0 најмањи природан број за који важи последња неједнакост, тј. $\frac{20}{2^{n_0}} < \varepsilon$. Величина угла $s_0Os_{n_0}$ разликује се од 20° за $\frac{20^\circ}{2^{n_0}}$, тј. за мање од ε степени. □

3. Закључак

Велики број фундаменталних научних резултата је потпуно изван оквира школске наставе. Велики број одличних расправа о настави, нажалост, никада се не уздигне до масовне реализације у школској пракси. Велика удаљеност од актуелних научних истраживања и неприлагођеност савременом добу сматрају се великим проблемима наставе уопште. У овом чланку су предложени неки прилози школској настави математике који су инспирисани наведеним проблемима савремене наставе математике. Осим тога, предложени задаци остварују и многе друге опште захтеве савременог образовања: омогућавају активно учење и функционалну примену знања, развој критичког мишљења, повећање информатичке и информационе писмености.

ЛИТЕРАТУРА

[1] L. Vigotski, *Mišljenje i govor*, Nolit, Beograd, 1977.

[2] Н. Икодиновић, *Конструкције лењиром и шестаром*, Тангента 42, Друштво математичара Србије, 2005.

[3] N. Ikodinović, *How to keep balance in education?*, Зборник на трудовите од мегународната конференција за образованието по математика, физика и сродни науки, Скопје, 27-28 септември 2019, пп. 51–60.

[4] J. Lützen, *A History of Mathematical Impossibility*, Oxford University Press, 2023.

[5] D. Flannery, *The square Root of 2. A Dialog Concerning a Number and a Sequence*, Copernicus, New York, 2005.

[6] Ž. Mijajlović, Z. Marković, K. Došen, *Hilbertovi problemi i logika*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1986. http://elibrary.matf.bg.ac.rs/handle/123456789/593

[7] Д. Хилберт, *Основи геометрије*, Класични научни списи, књига XIV, САНУ, 1957 (превод осмог немачког издања, Ж. Гарашанин). http://elibrary.matf.bg.ac.rs/bitstream/handle/123456789/435/DavidHilbertOsnoveGeometrije.pdf?sequence=1

Математички факултет, Универзитет у Београду
nebojsa.ikodinovic@matf.bg.ac.rs