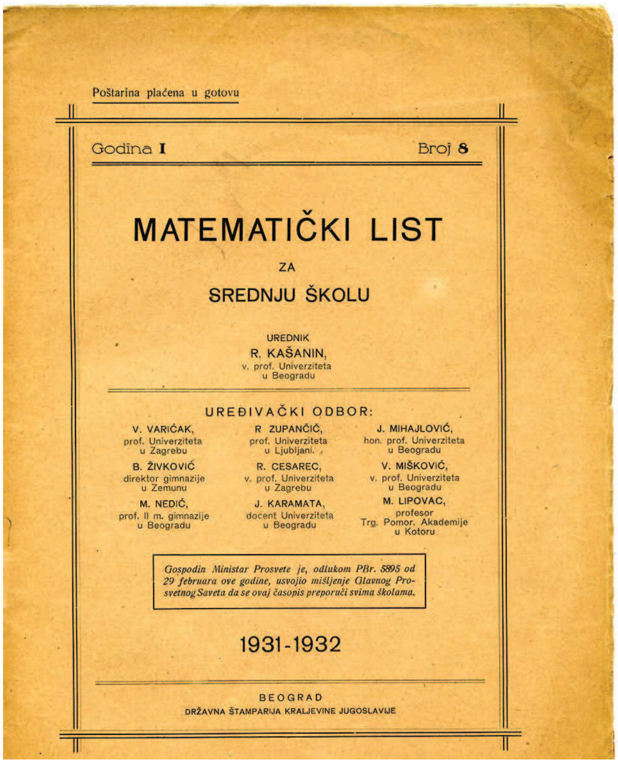
Др Јован Карамата

ПРАКТИЧНЕ МОГУЋНОСТИ МАТЕМАТИЧКИХ РЕШЕЊА

Напомена уредништва. Школске 1931/32 године покренут је у Београду часопис „Математички лист за средњу школу“. Уредник је био др Радивоје Кашанин (тада) ванредни професор Универзитета у Београду. Према његовим речима:



Poštarina plaćena u gotovu

Godina I — Broj 8

MATEMATIČKI LIST
ZA
SREDNJU ŠKOLU

UREDNIK
R. KAŠANIN,
v. prof. Univerziteta
u Beogradu

UREĐIVAČKI ODBOR:

V. VARIĆAK, prof. Univerziteta u Zagrebu
R ZUPANČIĆ, prof. Univerziteta u Ljubljani.
J. MIHAJLOVIĆ, hon. prof. Univerziteta u Beogradu
B. ŽIVKOVIĆ, direktor gimnazije u Zemunu
R. CESAREC, v. prof. Univerziteta u Zagrebu
V. MIŠKOVIĆ, v. prof. Univerziteta u Beogradu
M. NEDIĆ, prof. II m. gimnazije u Beogradu
J. KARAMATA, docent Univerziteta u Beogradu
M. LIPOVAC, profesor Trg. Pomor. Akademije u Kotoru

Gospodin Ministar Prosvete je, odlukom PBr. 5895 od 29 februara ove godine, usvojio mišljenje Glavnog Prosvetnog Saveta da se ovaj časopis preporuči svima školama.

1931-1932

BEOGRAD
DRŽAVNA ŠTAMPARIJA KRALJEVINE JUGOSLAVIJE

„Покретање овог часописа треба сматрати као израз тежње и покушај да се у средњошколску математичку наставу унесе мало више живота; да се и у нашој школској књижевности створи могућност за одржавање чвршћих веза, с једне стране између математичких наука и оних који желе да се баве њима, а с друге стране између свих оних које ове науке могу да интересују. Јер, у овом погледу је наша школска књижевност била до сада један изузетак према ономе што се на страни даје видети. А може се рећи и то да се код нас

Преузето из Математичког листа за средњу школу, Београд, 1931-1932, број 1 и 2, стр. 17–24.

уопште егзактним наукама поклањало сразмерно мало пажње, а знатно мање но што се то чини код других народа.“

Нажалост, овај часопис је излазио само две школске године. Ипак, представљао је важан покушај уношења нових метода у средњошколску наставу (не заборавимо да се у то време у средњу школу полазило са 11 година).

Да бисмо нашим садашњим читаоцима ближе представили поменути часопис, преносимо у овој свесци Наставе математике један чланак Јована Карамате, вероватно нашег, у светским размерама, најпознатијег математичара 20. века, који демонстрира важност дискусије приликом решавања елементарног математичког задатка.

Решавање математичких задатака, које обично зовемо проблемима, дели се на три, у суштини различита дела: 1) изражавање података математичким изразима и постављање задатака у једначине; 2) решавање постављених једначина; 3) дискусија добивених резултата. При решавању задатака главну потешкоћу чине први и трећи део; јер за онога ко потпуно влада алгебарским радњама, други део решава се тако рећи сам од себе, примењујући на добивене једначине позната правила из алгебре. Од нарочите важности је баш трећи део и, као што сам наслов казује, циљ је овога чланка да у првом реду на њега обрати пажњу. Што се тиче првог дела, он сам по себи не изискује нарочито објашњавање, већ захтева само окретност у мишљењу.

Важност и начин обраде трећег дела решавања задатака показаћемо на подробном решавању овог задатка:

На правој линији налазе се два извора светлости, A и B, различите јачине. Наћи на тој правој линији ону тачку C коју подједнако осветљавају оба извора светлости.

При томе се претпоставља као познат закон из физике, да јачина светлости опада са квадратом растојања.

I

Узмимо прво да одстојање светлосних извора износи 1,5 m, јачина светлосног извора A 12, а извора B 3 јединице јачине (интензитета). Да бисмо утврдили положај тачке C на правој AB, изаберимо за непознату одстојање $\overline{AC}$ и означимо га са x (сл. 1).

Слика 1

Како је јачина осветљења извора A на одстојању од 1 m једнака 12, на одстојању од 2 m једнака $\dfrac{12}{2^2}$, на одстојању од 3 m једнака $\dfrac{12}{3^2}$ јединица јачине осветљења, итд, то ће уопште на одстојању од x метара јачина осветљења светлосног извора A бити $\dfrac{12}{x^2}$; тако исто јачина осветљења светлосног извора B на одстојању од $(1{,}5-x)\,\mathrm{m}$ биће $\dfrac{3}{(1{,}5-x)^2}$ јединица јачине осветљења. Тачка C биће, према томе, подједнако осветљена од оба извора A и B ако x изаберемо тако да буде

$$\frac{12}{x^2}=\frac{3}{(1{,}5-x)^2}.$$

Овим смо завршили први део решавања.

Други део се састоји у томе да се постављена једначина реши. Најбрже ћемо је решити овако. Обе стране једначине поделимо са 3:

$$\frac{4}{x^2}=\frac{1}{(1{,}5-x)^2},$$

извадимо други корен на обе стране, и добићемо две једначине:

$$\frac{2}{x}=+\frac{1}{1{,}5-x} \quad \text{и} \quad \frac{2}{x}=-\frac{1}{1{,}5-x}.$$

Одавде следује

$$2(1{,}5-x)=x \quad \text{или} \quad 2(1{,}5-x)=-x,$$

дакле

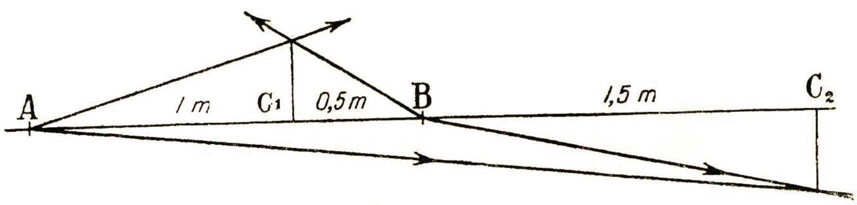
$$3-2x=x \quad \text{или} \quad 3-2x=-x,$$

па је коначно

$$x=x_1=1\,\mathrm{m} \quad \text{или} \quad x=x_2=3\,\mathrm{m}.$$

Овим је завршен и други део решавања.

Остаје још да испитамо уколико добивени резултати одговарају постављеном задатку. Видимо да смо за тражено одстојање x добили две вредности: $x_1=1\,\mathrm{m}$ и $x_2=3\,\mathrm{m}$; то значи да постоје две тачке, C_1 и C_2, које су подједнако осветљене (сл. 2). Посматрајмо прву, C_1, која је удаљена $1\,\mathrm{m}$ од тачке A, према томе $1{,}5\,\mathrm{m}-1\,\mathrm{m}=0{,}5\,\mathrm{m}$ од тачке B; она је дакле двапут ближа тачки B него тачки A; ово одговара задатку, јер је јачина светлосног извора A четири пута јача од јачине извора B.



Слика 2

Друга тачка, C_2, удаљена је $3\,\mathrm{m}$ од тачке A; она се дакле налази изван одсечка AB, на одстојању $1{,}5\,\mathrm{m}$ од тачке B. Дакле, и у овом случају, тачка C_2 двапут је ближа тачки B него тачка A. Према томе и ово решење одговара задатку. То можемо овако објаснити. Светлосни зраци који полазе из тачака A и B разилазе се се на све стране, те ће зрак који полази из тачке A према тачки B (ако га тачка B не задржи), бити у тачки C_2 исте јачине као и зрак који полази из тачке B у истом правцу. Тиме је и трећи део решавања завршен и задатак потпуно решен.

II

У решеном примеру јачина светлости у тачки A била је већа од јачине у тачки B. Посматрајмо сада исти задатак, али узмимо да је јачина светлости у тачки A једнака 0,5, а у тачки B једнака 8 јединица, тј. да је јачина светлосног извора већа у тачки B него у тачки A. При томе задржавамо исто растојање од 1,5 m између тачака A и B.

Ако и сад означимо са x тражено одстојање тачке C од тачке A, једначина ће, слично пређашњем случају, гласити

$$\frac{0{,}5}{x^2} = \frac{8}{(1{,}5 - x)^2}.$$

Кад поможимо обе стране ове једначине са 2 и извучемо други корен, добићемо опет две једначине:

$$\frac{1}{x} = +\frac{4}{1{,}5 - x} \quad \text{и} \quad \frac{1}{x} = -\frac{4}{1{,}5 - x}.$$

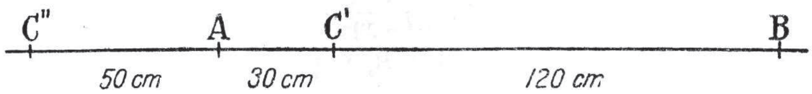
Дакле, имамо

$$1{,}5 - x = 4x \quad \text{или} \quad 1{,}5 - x = -4x.$$

Одаве добијемо две вредности за x:

$$x = x_1 = 0{,}3\,\text{m} = 30\,\text{cm} \quad \text{и} \quad x = x_2 = -0{,}5\,\text{m} = -50\,\text{cm}.$$

Прво решење је позитивно. Тражена тачка C' удаљена је 30 cm од тачке A, тј. $150\,\text{cm} - 30\,\text{cm} = 120\,\text{cm}$ од тачке B. Она је дакле четири пута ближе тачки A него тачки B. Ово одговара задатку, јер је јачина у тачки A $\frac{8}{0{,}5} = 16$ пута мања од јачине у тачки B.



Слика 3

Друго решење је негативно; треба видети да ли и оно одговара задатку и како. Код првог задатка (сл. 2), видели смо да се са обе стране извора слабије јачине налази по једна тачка подједнако осветљена. Упоредимо ли ову чињеницу са садашњим нашим задатком, закључујемо да се и у овом случају мора налазити са леве стране тачке A једна тачка C'' која је подједнако осветљена као и тачка C'. Ми смо, међутим, добили да је друга тачка удаљена -50 cm од тачке A. Узмемо ли да се тачка C'' налази *лево* од тачке A за $50\,\mathrm{cm}$, тј. на $150\,\mathrm{cm}+50\,\mathrm{cm}=200\,\mathrm{cm}$ лево од тачке B, видимо да је та тачка $\dfrac{200}{50}=4$ пута ближе тачки A него тачки B. То је, према томе, друга тачка која одговара постављеном задатку. Знак минус $(-)$ у другом резултату казује, дакле, да се тачка C'' налази на $50\,\mathrm{cm}$ од тачке A, но са супротне стране од тачке C'. И тако, оба решења одговарају постављеном задатку.

III

Посматрајмо још увек исти задатак, али узмимо сад да су светлосни извори A и B исте јачине, рецимо 5 јединица. Растојање тачака A и B нека буде опет $1{,}5\,\mathrm{m}$. Једначина која одређује одстојање x тачке C од A гласиће у овом случају

$$\frac{5}{x^2}=\frac{5}{(1{,}5-x)^2}.$$

Ако поделимо са 5 и извадимо други корен, добићемо

$$\frac{1}{x}=+\frac{1}{1{,}5-x}\quad \text{или}\quad \frac{1}{x}=-\frac{1}{1{,}5-x},$$

тј.

$$1{,}5-x=x\quad \text{или}\quad 1{,}5-x=-x.$$

Прва једначина даје $x=x_1=\dfrac{1{,}5}{2}=0{,}75\,\mathrm{m}=75\,\mathrm{cm}$; то значи да је тачка C подједнако удаљена од тачака A и B, што смо могли и предвидети, јер су јачине светлосних извора A и B једнаке.

Друга једначина, међутим, не даје никакво решење; она није задовољена ни за једну вредност од x јер из ње излази $1{,}5=x-x=0$, што је бесмислено. У овом случају постоји, дакле, свега једна тачка C која је подједнако осветљена од извора A и B, што се слаже са условом да су јачине светлосних извора једнаке. У том случају, наиме, C мора бити подједнако удаљена од A и B, а једина тачка на правој AB која је подједнако удаљена од A и B је тачка која се налази на средини између њих.

IV

Ова три примера само су посебни случајеви општег задатка у коме јачине и растојања A и B нису дати бројним вредностима већ словима. Зато ћемо решити и тај општи задатак, означивши са a јачину извора A, са b јачину извора B, а са d растојање тачака A и B. Нека је, даље, x одстојање тражене тачке C од тачке A. Тада ће јачина осветљења извора A у тачки C бити $\dfrac{a}{x^2}$, а извора B: $\dfrac{b}{(d-x)^2}$. Да би, дакле, тачка C била подједнако осветљена од извора A и B, мора бити

$$\frac{a}{x^2}=\frac{b}{(d-x)^2}.$$

Вађењем другог корена добивамо:

$$\frac{\sqrt{a}}{x} = +\frac{\sqrt{b}}{d-x} \quad \text{или} \quad \frac{\sqrt{a}}{x} = -\frac{\sqrt{b}}{d-x},$$

те долазимо до једначина

$$(d-x)\sqrt{a} = x\sqrt{b} \quad \text{и} \quad (d-x)\sqrt{a} = -x\sqrt{b};$$

ове једначине дају решења:

$$x = x_1 = d\,\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \quad \text{и} \quad x = x_2 = d\,\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}.$$

Дискусија. Прво решење је увек позитивно. Из другог решења видимо да треба разликовати три случаја, према томе да ли је именилац у x_2, наиме $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, позитиван, негативан или нула, тј. да ли је $a > b$, или $a < b$, или $a = b$. Раније решена три примера са одређеним бројевима одговарају управо овим случајевима.

1. $a > b$. Прво решење даје одстојање тачке C_1 од тачке A

$$x_1 = d\,\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}},$$

а за одстојање $\overline{C_1B}$

$$x_1' = d - x_1 = d\,\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}};$$

тачка C_1 налази се, дакле, између A и B, јер је $x_1 < d$, и то ближе тачки B, јер је

$$d\,\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} < d\,\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

Друга тачка C_2 је од тачке A на одстојању

$$x_2 = d\,\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}};$$

оно је позитивно, јер је $a > b$, а веће је од d, јер је

$$d < d\,\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}.$$

Према томе, тачка C_2 налази се изван одсечка AB, и то ближе тачки B од које је удаљена за $x_2 - d = d\,\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$.

2. $a < b$. Тачка C', дата првим решењем, налази се и овај пут између тачака A и B, али сад ближе тачки A. Друго решење, међутим, даје негативну вредност за тражено одстојање, и то

$$x_2 = -d\,\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}.$$

Према горе решеном другом примеру, то значи да се тачка C'' налази на одстојању

$$\overline{AC''} = d\,\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}$$

од тачке A, али са супротне стране од тачке B. Да је ово заиста тако, можемо се лако уверити. Тада је, наиме, одстојање тачке C'' од тачке B једнако

$$\overline{BC''} = d\,\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}} + d = d\,\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}},$$

па је према томе

$$\frac{\overline{AC''}^2}{\overline{BC''}^2} = \frac{a}{b}, \quad \text{тј.} \quad \frac{\overline{AC''}^2}{a} = \frac{\overline{BC''}^2}{b},$$

што казује да је заиста тачка C'' подједнако осветљена од извора A и B. (Знак минус дакле и у овом општем случају одређује положај тачака које леже лево од тачке A). И у овом случају имамо две тачке C' и C'', али су овај пут оне ближе тачки A (опет извору мање јачине).

3. $a = b$. У овом случају су светлосни извори једнаке јачине; тачка C мора, према томе, бити подједнако удаљена од тачка A и B, као што и даје први резултат, јер је тада $\overline{AC} = \overline{BC} = \frac{d}{2}$. Други резултат, међутим, не даје ништа, јер именилац у x_2 постаје једнак нули, а дељење нулом нема смисла.

Горња дискусија је била изведена под претпоставком да је $d > 0$. Посматрајмо шта ће бити ако је $d = 0$, тј. ако се тачке A и B поклапају.

1) Ако су јачине светлосних извора различите, добијамо решење $x_1 = x_2 = 0$, тј. обе ће се тачке C поклопити са већ поклопљеним тачкама A и B. У том случају, сем те тачке неће постојати више ниједна тачка која би била подједнако осветљена од оба извора, што одговара стварности.

2) Ако су јачине светлосних извора једнаке, прво решење је $x_1 = 0$, тј. тачка C ће се поклопити са тачкама A и B. Друго решење добија облик $x_2 = \frac{0}{0}$, што значи да је положај ове тачке неодређен. Тако у ствари и јесте, јер ако су светлосни извори исте јачине и налазе се у истој тачки, тачка C увек ће бити подједнако осветљена од оба извора, ма где се она налазила на правој AB (или у простору).

Тиме је дискусија до краја изведена и задатак решен. Из предњег видимо да смо при вођењу дискусије задатка датог словима углавном обратили пажњу на две ствари:

1. на то да се испита у каквом су односу величине дате задатком (a, b и d) да би решење било позитивно, негативно, нула, неодређено, или да не постоји;

2. на то да се испита, уколико ови случајеви одговарају постављеном задатку.

Ако је задатак дат у бројевима, дискусија се састоји само у томе да се испита уколико и како добијена решења одговарају задатку.

V

У горњем задатку требало је углавном разликовати позитивна и негативна решења и испитати уколико и како негативна решења одговарају задатку. Сви случајеви одговарали су задатку, тј. били су практично могући. Али има примера код којих у извесним случајевима решења не одговарају постављеном питању, нису практично могућа. Ово се може појавити, на пример, кад је резултат негативан број, или разломак, а природа задатка, међутим, захтева да резултат буде позитиван или цео број. То ћемо најлакше увидети на овом задатку.

Два полигона имају укупно 21 *страницу; један има двапут толико дијагонала колико други; колики је број страница свакога?*

Означимо са x број страница првог полигона; тада ће број његових дијагонала бити $\frac{x(x-3)}{2}$* Како је збир страница полигона 21, то ће број страница другог полигона бити $(21-x)$, а број његових дијагонала $\frac{(21-x)(18-x)}{2}$. Како је број дијагонала другог полигона два пута већи од броја дијагонала првога, то је

$$2 \cdot \frac{x(x-3)}{2} = \frac{(21-x)(18-x)}{2}.$$

Множењем са 2 и уклањањем заграда добијамо

$$2x^2 - 6x = x^2 - (18+21)x + 18 \cdot 21,$$

или, ако све пренесемо на леву страну и уредимо,

$$x^2 + 33x - 378 = 0.$$

За x добијамо две вредности:

$$x = \frac{-33 \pm \sqrt{1089+1512}}{2} = \frac{-33 \pm \sqrt{2061}}{2},$$

дакле је

$$x_1 = \frac{-33+51}{2} = 9 \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{-33-51}{2} = -42.$$

Први резултат одговара задатку и лако се можемо уверити да полигон са $21-9=12$ страница има двапут толико дијагонала колико полигон са 9 страница. Друго решење је негативно, а како полигон са негативним бројем страница не постоји, то оно отпада као практично немогуће.

Решићемо сад исти задатак са општим бројевима.

Два полигона имају укупно n страница; један има двапут толико дијагонала колико други; колики је број страница свакога?

---

*Кроз сваки врх једног полигона од n страница пролазе $(n-3)$ дијагонале; како има n врхова и како је свака дијагонала два пута убројана, то је двоструки број дијагонала $n(n-3)$.

Нека је x број страница првог полигона; онда је $\frac{x(x-3)}{2}$ број његових дијагонала. Број страница другог полигона је $(n-x)$, а $\frac{(n-x)(n-3-x)}{2}$ број његових дијагонала. Да би број дијагонала другог полигона био двапут већи од броја дијагонала првог, мора бити

$$\frac{2x(x-3)}{2} = \frac{(n-x)(n-3-x)}{2},$$

одакле добијамо једначину

$$x^2 + (2n-9)x - n(n-3) = 0.$$

Према томе, имамо два решења:

$$x_1 = \frac{-(2n-9) + \sqrt{(2n-9)^2 + 4n(n-3)}}{2},$$
$$x_2 = \frac{-(2n-9) - \sqrt{(2n-9)^2 + 4n(n-3)}}{2}.$$

Решење x_2 је увек негативно; према тома не може одговарати задатку, Решење x_1 је, међутим, увек позитивно, јер је за $n > 3$:

$$\sqrt{(2n-9)^2 + 4n(n-3)} \geqslant 2n-9.$$

Али ово још није довољно да то решење одговара задатку. Наиме, да би исто одговарало, x_1 не само да мора бити позитиван број, него и цео; у противном случају решење би било практички немогуће, јер не постоји полигон са ирационалним или рационалним, али не целим бројем страница. Да би x_1 био цео број, мора пре свега број $(2n-9)^2 + 4n(n-3)$ (који је цео број јер је n цео број) бити пун квадрат, тј. имати облик N^2, где је N цео број. Претпоставимо да је тај услов испуњен, тј. да је

$$(2n-9)^2 + 4n(n-3) = N^2;$$

тада је N^2 непаран број, јер је збир једног непарног и једног парног броја; но, онда је и N непаран број, тј. облика $N = 2m+1$. Према томе, биће

$$x_1 = \frac{(2m+1) - (2n-9)}{2} = m - n + 5.$$

На основу ове дискусије, решење горњег задатка гласи:

Постављени задатак има решење онда, и само онда, кад је број $(2n-9)^2 + 4n(n-3)$ *квадрат непарног целог броја* $2m+1$. *Тада први полигон има* $m-n+5$, *а други* $2n-m-5$ *страница. То је једино практично могуће решење.*[**]

[**] Може се доказати да је 21 најмања вредност броја n за коју је наведени услов испуњен. Прва следећа вредност је $n = 108$, у ком случају је $m = 148$, а тражени полигони имају 45, односно 63 странице [прим. уред.].

* * *

Из обрађена два задатка види се како се дискусија има водити и од колике је важности таква дискусија при решавању задатака. Један задатак се може потпуно схватити тек кад је дискусија до краја изведена. Она казује да ли и уколико постављени задатак има смисла, тј. да ли је и уколико резултат практично могућ (као што је то био случај у другом задатку). Осим тога, када се у извесним задацима (као што је то био случај у првом задатку) добијају поред очекиваног решења још и друга, она омогућује да се увиди када и како ти резултати одговарају постављеном питању.

Напослетку, напомињемо да задатке задане у овом листу треба редовно решавати са дискусијом, и овој обраћати нарочиту пажњу. Како се дискусија има водити види се из горњих задатака, а доцније ћемо то у згодним приликама показивати и на другим задацима.