Петар Свирчевић

ДОКАЗИ БИНОМНЕ ФОРМУЛЕ И ПИТАГОРИНЕ ТЕОРЕМЕ ПОМОЋУ НЕОДРЕЂЕНОГ ИНТЕГРАЛА

Добро је познато да у дефиницији извода и неодређеног интеграла није коришћена биномна формула, као ни Питагорина теорема, а то значи да за њихов доказ можемо користити изводе и неодређени интеграл. Сувишно је истицати важност биномне формуле за математику. Даље, у [3] и [4] смо показали да можемо извести Питагорину теорему помоћу извода, а сада ћемо показати да обе наведене теореме можемо извести и помоћу неодређеног интеграла.

Доказ биномне формуле помоћу неодређеног интеграла

У четвртом разреду средње школе доказује се и примењује биномна формула, најчешће у облику

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^nb^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n}a^0b^n, \tag{1}$$

где је $a, b \in \mathbf{R}$ и $n \in \mathbf{N}$. Та формула важи и за комплексне бројеве, дакле може бити и $a, b \in \mathbf{C}$.

У циљу извођења наредног доказа, параметар a у једнакости (1) ћемо заменити промењљивом x, тј. записати је у облику

$$(x+b)^n = \binom{n}{0}x^nb^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^0b^n. \tag{2}$$

Пођимо сада од тривијалног идентитета $(x+b)^1 = x+b$; ако тај идентитет неодређено интегрирамо, добијемо

$$\int (x+b)^1\,dx = \int (x+b)\,d(x+b) = \int x\,dx + b\int dx,$$

односно $\frac{1}{2}(x+b)^2 = \frac{1}{2}x^2 + xb + C_2$, где је C_2 нека константа. Стављајући $x=0$, добијамо $C_2 = \frac{1}{2}b^2$, па добијамо да је

$$(x+b)^2 = x^2 + 2xb + b^2, \tag{3}$$

што је добро познати идентитет из основне школе.

Ако сада неодређено интегрирамо формулу (3), добијемо

$$\frac{1}{3}(x+b)^3 = \frac{1}{3}x^3 + x^2b + xb^2 + C_3.$$

Стављајући $x=0$ добијемо $C_3 = \frac{1}{3}b^3$, па одатле следи позната формула за куб бинома

$$(x+b)^3 = x^3 + 3x^2b + 3xb^2 + b^3.$$

Да бисмо строго доказали формулу (2), применићемо математичку индукцију служећи се неодређеним интергирањем. Дакле, претпоставимо да важи (2), па ако обе стране неодређено интегрирамо, тада добијамо

$$\frac{1}{n+1}(x+b)^{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{n}{0}x^{n+1}b^0 + \frac{1}{n}\binom{n}{1}x^nb^1 + \cdots + \frac{1}{1}\binom{n}{n}x^1b^n + C_{n+1}. \tag{4}$$

Ако искористимо да је $\dfrac{n+1}{n-k+1}\dbinom{n}{k} = \dbinom{n+1}{k}$, добијамо да је $C_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}b^{n+1}$, а како је $\dbinom{n}{0} = \dbinom{n+1}{0} = 1$, то формула (4) добија облик

$$(x+b)^{n+1} = \binom{n+1}{0}x^{n+1}b^0 + \binom{n+1}{1}x^nb^1 + \cdots + \binom{n+1}{n+1}x^0b^{n+1},$$

чиме је биномна формула (2) у потпуности доказана.

Доказ Питагорине теореме помоћу неодређеног интеграла

Колико постоји доказа Пирагорине теореме? То питање је себи поставио и E. S. Loomis, па се почетком прошлог века дао на прикупљање њему свих доступних доказа те теореме. Прикупио их је 367 и издао их је у књизи The Pythagorean Proposition, али то не значи да су ту прикупљени баш сви докази. Рецимо и то, да је NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) 1968. године објавио то исто дело у дотераној верзији [1]. Даље, важно је напоменути да је W. Dunham објавио 1978. године дело Mathematical Universe, где он у предговору тврди да Питагорина теорема има велики број алгебарских, као и геометријских доказа, али је уверен да не постоји њен тригонометријски доказ. Могло би се рећи, да је то била његова слутња, коју негира Nuno Luzia дајући два тригонометријска доказа, који су наведени у раду [2].

Сада ћемо ову теорему доказати помоћу неодређеног интеграла. Полазимо од идентитета

$$\sin x \cos x - \cos x \sin x \equiv 0,$$

из којег након неодређене интеграције следи, редом,

$$\begin{aligned}\int \sin x\cos x\,dx - \int \cos x\sin x\,dx &= C,\\ \int \sin x\,d(\sin x) + \int \cos x\,d(\cos x) &= C,\\ \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{2}\cos^2 x &= C,\\ \sin^2 x + \cos^2 x &= 2C. \qquad (5)\end{aligned}$$

Будући да се ради о идентитету, тада он важи за свако $x \in \mathbf{R}$, па за $x = 0$ добијамо из (5) да је $C = \frac{1}{2}$, а то значи да важи

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1. \qquad (6)$$

Ако искористимо стандардне ознаке величина везаних за правоугли троугао и дефиниције вредности тригонометријских функција мера углова у правоуглом троуглу, тада имамо да је $\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$, $\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$. Ако то уврстимо у релацију (6), где смо x заменили с α, добијамо формулу Питагорине теореме

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

која важи онда и само онда када је троугао правоугли. Та се еквиваленција може лако доказати, што припада средњошколском градиву.

ЛИТЕРАТУРА

[1] E. S. Loomis, *The Pythitagorean Proposition*, NCTM (National Ccouncil of Teachers of Mathematics), 1968.

[2] N. Luzia, *Pythagoren Theorem via Half-Angle Formulas*, Universitate Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matematica, Rio de Janeiro 21, 941–909, Brasil.

[3] P. Svirčević, *Dokaz Pitagorinog poučka pomoću derivacije*, Matematičko-fizički list, 285, Zagreb 2021.

[4] П. Свирчевић, *Генерисање тригонометријских идентитета помоћу извода*, Настава математике LXII, 3–4 (2021).

[5] http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtm.

Tehnička škola, Zagreb

E-mail: petar.svircevic@zg.t-com.hr