Др Милан Живановић

МЕТОДА РАЦИОНАЛИЗАЦИЈЕ У РЕШАВАЊУ ЛОГАРИТАМСКИХ ЈЕДНАЧИНА И НЕЈЕДНАЧИНА

Приликом решавања логаритамских једначина и неједначина, код којих се у основи логаритма појављује промењлива може се доћи до сложених израза који нису једноставни за сређивање те је поступак решавања знатно отежан. Суштина методе рационализације је да се сложен израз $F(x)$ замени једноставнијим рационалним изразом $G(x)$ при чему се добија еквивалентна једначина, односно неједначина *на уоченом домену функције* $F(x)$. Другим речима, за неку релацију $\rho \in \{=, \neq, \geqslant, \leqslant, >, <\}$ важи да је

$$F(x)\,\rho\,0 \iff G(x)\,\rho\,0 \quad \text{за } x \in D_F.$$

У табели 1 дате су карактеристичне трансформације израза које се користе у методи рационализације код логаритамских једначина и неједначина.

Табела 1. Трансформације у методи рационализације код решавања логаритамских једначина и неједначина

$F(x)$	$G(x)$
$\log_a f$	$(a-1)(f-1)$
$\log_a f - 1$	$(a-1)(f-a)$
$\log_a f - \log_a g$	$(a-1)(f-g)$
$\log_f h - \log_g h$	$(f-1)(g-1)(h-1)(g-f)$
$\log_h f \cdot \log_p k$	$(f-1)(h-1)(k-1)(p-1)$
$\dfrac{\log_a f - \log_a g}{\log_b h}$	$\dfrac{(a-1)(f-g)}{(b-1)(h-1)}$

Докажимо, на пример, исправност треће од ових трансформација. Нека је дата (не)једначина $\log_a f - \log_a g\,\rho\,0$, где је $\rho \in \{=, \neq, \geqslant, \leqslant, >, <\}$. Логаритме из (не)једначине можемо представити као количнике логаритама основе 10, па добијамо еквивалентну (не)једначину $\dfrac{\log f}{\log a} - \dfrac{\log g}{\log a}\,\rho\,0$, односно $\dfrac{\log f - \log g}{\log a - \log 1}\,\rho\,0$. С обзиром да је логаритамска функција за основу 10 монотоно растућа, добијамо $\dfrac{f-g}{a-1}\,\rho\,0$. Како је због дефинисаности израза $a \neq 1$, множењем последње релације са $(a-1)^2 > 0$, добија се на крају $(a-1)(f-g)\,\rho\,0$. На аналоган начин се доказује исправност прве трансформације, а исправност осталих помоћу прве и треће применом алгебарских трансформација.

Наравно, приликом коришћења метода рационализације треба водити рачуна да се не направе грешке типа:

- коришћење методе без одређивања области дефинисаности полазне једначине или неједначине;
- примена метода код једначина и неједначина које нису сведене на један од облика из дате таблице. На пример замена израза $\log_a f(x) + \log_a g(x)$ изразом $f(x)+g(x)$.

Уочимо предност методе рационализације у односу на стандардну методу у следећем примеру.

1. Решити неједначину $\log_{x+2}(x^2+2) \geqslant \log_{x+2}(x+4)^2$.

Решење. Домен неједначине добијамо из услова $0 < x+2 \neq 1$, па је услов $x \in (-2,-1) \cup (-1,+\infty)$.

Стандардна метода

I. $x \in (-2,-1)$: $x^2+2 \leqslant (x+4)^2 \iff 8x+14 \geqslant 0 \iff x \geqslant -\dfrac{7}{4}$. Уз услов дефинисаности добијамо $x \in \left[-\dfrac{7}{4}, -1\right)$.

II. $x \in (-1,+\infty)$: $x^2+2 \geqslant (x+4)^2 \iff 8x+14 \leqslant 0 \iff x \leqslant -\dfrac{7}{4}$. На посматраном интервалу неједначина нема решења.

Из I и II следи да је решење неједначине $x \in \left[-\dfrac{7}{4}, -1\right)$.

Метода рационализације

На основу трећег реда Таблице 1 добијамо:

$(x+1)(-8x-14) \geqslant 0 \iff (x+1)(8x+14) \leqslant 0 \iff x \in \left[-\dfrac{7}{4}, -1\right]$. Уз услов дефинисаности добијамо решење $x \in \left[-\dfrac{7}{4}, -1\right)$.

2. Решити једначину $\log_{\frac{2x+2}{5x-1}}(10x^2+x-2) = 0$.

Решење. Из услова дефинисаности $0 < \dfrac{2x+2}{5x-1} \neq 1$, $10x^2+x-2 > 0$, добије се домен једначине $x \in (-\infty,-1) \cup \left(\dfrac{2}{5}, 1\right) \cup (1,+\infty)$.

Применом методе рационализације једначина се своди систем једначина $\dfrac{2x+2}{5x-1} - 1 = 0$, $10x^2+x-2-1 = 0$. Решење које задовољава услов дефинисаности је $x = \dfrac{1}{2}$.

3. Решити неједначину $\log_{6-x}\dfrac{(x-6)^2}{x-2} \geqslant 2$.

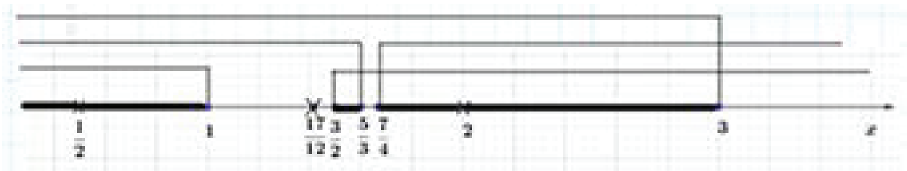
Решење. Услов дефинисаности неједначине је $x \in (2,5)\cup(5,6)$. Неједначину прво запишемо у облику $\log_{6-x}\dfrac{(x-6)^2}{x-2} - \log_{6-x}(6-x)^2 \geqslant 0$ а онда применимо метод рационализације. Добијамо

$(6-x-1)\left(\dfrac{(x-6)^2}{x-2}-(6-x)^2\right) \geqslant 0 \iff (5-x)(6-x)^2\left(\dfrac{1}{x-2}-1\right) \geqslant 0 \iff$ $\dfrac{(5-x)(3-x)}{x-2} \geqslant 0.$

Уз услов дефинисаности добијамо решење $x \in (2,3] \cup (5,6)$.

4. $\log_{12x^2-41x+35}(3-x) \geqslant \log_{2x^2-5x+3}(3-x)$.

Решење. Услови дефинисаности су: $0 < 12x^2-41x+35 \neq 1$, $0 < 2x^2-5x+3 \neq 1$, $3-x>0$. Решење првог услова је $x \in \left(-\infty, \frac{17}{12}\right)\cup\left(\frac{17}{12},\frac{5}{3}\right)\cup\left(\frac{7}{4},2\right)\cup(2,+\infty)$, другог $x \in \left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},1\right)\cup\left(\frac{3}{2},2\right)\cup(2,+\infty)$, и трећег $x\in(-\infty,3)$. Пресеком ових интервала добија се домен неједначине $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},1\right)\cup\left(\frac{3}{2},\frac{5}{3}\right)\cup\left(\frac{7}{4},2\right)\cup$ $(2,3)$ (слика 1).



Слика 1

Применом методе рационализације полазна неједначина је еквивалентна са $(12x^2-41x+34)(2x^2-5x+2)(2-x)(-10x^2+36x-32) \geqslant 0$. Након сређивања добијамо $(x-2)^4\left(x-\frac{8}{5}\right)\left(x-\frac{17}{12}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right) \geqslant 0$. Решење ове неједначине је скуп $\left[\frac{1}{2}\frac{17}{12}\right]\cup\left[\frac{8}{5},3\right]$, који у пресеку са доменом даје решење дате неједначине $x \in \left(\frac{1}{2},1\right)\cup\left[\frac{8}{5},\frac{5}{3}\right)\cup\left(\frac{7}{4},2\right)\cup(2,3)$.

5. $\log_{2x}(x-4)\cdot\log_{x-1}(6-x) < 0$.

Решење. Област дефинисаности неједначине је интервал $(4,6)$. Применом метода рационализације добијамо неједначину $(2x-1)(x-5)(x-2)(5-x)<0$, односно $(x-5)^2(2x-1)(x-2)>0$. Решење последње неједначине је $x\in(-\infty,1)\cup$ $(2,5)\cup(5,+\infty)$, што у пресеку са доменом даје решење полазне неједначине $x\in$ $(4,5)\cup(5,6)$.

6. $\dfrac{\log_4(2-x)-\log_{14}(2-x)}{\log_{14}x-\log_{49}x} \leqslant \log_4 49$.

Решење. Домен неједначине је $(0,1)\cup(1,2)$. Логаритме изразимо за основу 4:

$$\frac{\log_4(2-x)-\dfrac{\log_4(2-x)}{\log_4 14}}{\dfrac{\log_4 x}{\log_4 14}-\dfrac{\log_4 x}{\log_4 49}}\leqslant \log_4 49 \iff \frac{\log_4(2-x)\cdot\dfrac{\log_4 14-1}{\log_4 14}}{\log_4 x\cdot\dfrac{\log_4 49-\log_4 14}{\log_4 49\cdot\log_4 14}}\leqslant \log_4 49.$$

Приметимо да је $\log_4 14-1=\log_4\dfrac{7}{2}=\log_4 49-\log_4 14$, па се добија:

$$\frac{\log_4(2-x)}{\log_4 x}\cdot\log_4 49\leqslant\log_4 49 \iff \frac{\log_4(2-x)}{\log_4 x}\leqslant 1 \iff \log_x(2-x)\leqslant 1$$
$$\iff \log_x\frac{2-x}{x}\leqslant 0.$$

Применом методе рационализације добијамо:

$$(x-1)\Big(\frac{2-x}{x}-1\Big)\leqslant 0 \iff \frac{(x-1)^2}{x}\geqslant 0 \iff x>0.$$

Последњи услов у пресеку са доменом даје решење неједначине: $x\in(0,1)\cup(1,2)$.

7. $\dfrac{\log(5-x^2)}{\cos\dfrac{x-5}{4}-\cos\dfrac{2x-7}{4}}\geqslant 0.$

Решење. Логаритам у неједначини је дефинисан за $x\in(-\sqrt{5},\sqrt{5})$. Услов дефинисаности неједначине је и

$$\cos\frac{x-5}{4}-\cos\frac{2x-7}{4}\neq 0,\ \text{тј. } 2\sin\frac{3x-12}{8}\sin\frac{x-2}{8}\neq 0.$$

Добија се $x\neq 4+\dfrac{8k\pi}{3}$ и $x\neq 2+8k\pi$, па за домен имамо $x\in(-\sqrt{5},2)\cup(2,\sqrt{5})$. Погледајмо које услове задовољавају аргументи функције косинуса у имениоцу. С једне стране је $\dfrac{-\sqrt{5}-5}{4}>\dfrac{-3-5}{4}=-2>-\pi$, а с друге $\dfrac{\sqrt{5}-5}{4}<0$, па је $-\pi<\dfrac{x-5}{4}<0$. Такође имамо $\dfrac{-2\sqrt{5}-7}{4}=\dfrac{-\sqrt{20}-7}{4}>\dfrac{-\sqrt{25}-7}{4}=\dfrac{-5-7}{4}=-3>-\pi$ и $\dfrac{2\sqrt{5}-7}{4}=\dfrac{\sqrt{20}-\sqrt{49}}{4}<0$ па је $-\pi<\dfrac{2x-7}{4}<0$. Дакле, оба аргумента функције косинус су из интервала $(-\pi,0)$ па је тад функција косинус монотоно растућа. Применом методе рационализације добија се

$$\frac{5-x^2-1}{\dfrac{x-5}{4}-\dfrac{2x-7}{4}}=\frac{4(4-x^2)}{2-x}\geqslant 0,$$

одакле $x+2\geqslant 0$, тј. $x\geqslant -2$. Последњи услов у пресеку са доменом даје решење неједначине $x\in[-2,2)\cup(2,\sqrt{5})$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Олейник, М. К. Потапов, П. И. Пасиченко, *Уравнения и неравенства. Нестандартные методы решения. 10-11 классы*, Учебно-методическое пособие, Изд. «Дрофа», Москва, 2010.

[2] Ф. Ф. Лисенко, С. Ю. Кулабухова, *Математика. Подготовка к ЕГЭ*, Учебно-методический комплекс, «Легион», Ростов-на-Дону, 2014.

[3] `https://shkolkovo.net/catalog/reshenie_neravenstv_metodom_racionalizacii` 27.02.2021.

Висока школа за васпитаче, Крушевац

E-mail: `mzivanovic@vaspks.edu.rs`