

Др Мануела Музика Диздаревић, мр Селма Зековић, мр Амар Башић

РАЗУМИЈЕВАЊЕ ГЕОМЕТРИЈЕ И ВАН ХИЛЕОВИ НИВОИ

1. Увод

Геометрија је једна од основних области математике која се изучава у основној и средњој школи. Посљедњих година примјетан је тренд опадања познавања а посебно разумијевања основних геометријских концепата како код студентата математике тако и код средњошколаца и основаца. Та појава је потпуно у складу са резултатима PISA и TIMSS истраживања која су спроведена 2018. и 2019. године у Босни и Херцеговини. Ова истраживања су показала да наши ученици не разумију концепте који се према међународним стандардима сматрају основним. Све ово указује на потребу да се детаљно анализирају пропусти и покушају исправити грешке које постоје у важећим наставним плановима и програмима, али и у начину на који наставници/професори презентују предвиђене наставне садржаје. Један од првих корака је свакако процјењивање степена разумијевања основних појмова у популацији ученика одређеног узраста.

У овом раду ћемо се бавити процјењивањем степена разумијевања геометријских појмова према теорији коју су развили Дина и Пјер ван Хиле (Dina van Hiele-Geldof, Pierre Marie van Hiele) на Универзитету у Утрехту (Холандија) средином прошлог вијека. Представићемо основе ван Хилеове теорије, а затим ћемо дати резултате истраживања које је спроведено у двије гимназије у Сарајеву са циљем одређивања ван Хилеових нивоа на којима се налазе ученици првог и четвртог разреда.

2. Основе теорије и ван Хилеови нивои

Већина наставника се сусрела са ученицима који могу да препознају троугао, али нису у стању да дају његову дефиницију или са онима који не разумију да је квадрат уједно и правоугаоник. Није ријеткост да ученици питају зашто доказујемо оно што се директно види са скице. Дина и Пјер ван Хиле нису жељели да занемарују овакве ситуације, те их је одлука да траже њихов узрок довела до стварања нове теорије [3]. Они су своју теорију, познату као *ван Хилеови нивои*, представили у докторским дисертацијама које су објавили 1957. године на Универзитету у Утрехту [7]. Њихова истраживања фокусирана су на развијање нивоа размишљања и разумијевања геометрије, те улогом које настава има у напредовању са нивоа на ниво [1].

2.1. Модел

Ван Хилеов модел се састоји од пет нивоа разумијевања геометрије. Нивои овог модела су хијерархијски поређани, што значи да се кроз нивое мора ићи редом. Напредак са нивоа на ниво је sukcesиван, па је сваки прелазак на виши ниво узрокован потпуним савладавањем садржаја са нижег нивоа [1].

Ниво 0 (Визуализација): Ученик који размишља на нивоу визуализације препознаје геометријске фигуре на основу њихових физичких карактеристика, те неријетко проблем у идентификацији фигуре представља „нестандардни“ положај фигуре у равни. Способан је да препозна и нацрта геометријске фигуре. Ученик на нивоу визуализације не препознаје квадрат као правоугаоник нити правоугаоник као паралелограм.

Ниво 1 (Анализа): На нивоу анализе ученик примјећује особине геометријских фигура и фигуре описује према њиховим особинама. У стању је, дакле, да уочи особине геометријских фигура и да разговара о њима, али није способен да разумије повезаност међу особинама. Тако ученик на овом нивоу вјерује да ако квадрат има све једнаке странице и дијагонале једнаке дужине онда и ромб, будући да су му све странице једнаке, такође има дијагонале једнаке дужине.

Ниво 2 (Неформална дедукција): Ученик који размишља на нивоу неформалне дедукције уочава особине фигура и везе између њих и на тај начин почиње да разумије класификацију фигура. Ученик на овом нивоу разумије значење потребног и довољног услова и може да да прецизну дефиницију геометријског појма али не разумије битност дедуктивног закључивања нити улогу аксиома.

Ниво 3 (Дедукција): Ученик на нивоу дедукције разумије значај и улогу аксиома, дефиниција и теорема и примјеном дедукције може да изведе низ тачних закључака. Ученици на овом нивоу нису свјесни постојања различитих система аксиома нити могу разумјети неевклидске геометрије.

Ниво 4 (Строгост): Ученик се на нивоу строгости сналази у разним аксиоматским системима, проучава неевклидске геометрије и упоређује системе аксиома.

Ван Хилеови су дошли до генералних карактеристика модела које можемо назвати особинама модела. Особине су од великог значаја наставницима, јер дају смјернице и указују на који начин треба приступити подучавању геометрије [3].

1. **Досљедност** – Ученик кроз нивое напредује прогресивно.
2. **Напредовање** – Напредовање (или недостатак напредовања) узрокован је начином презентације и активностима услед сусретања са новим градивом.
3. **Унутрашње и спољашње** – Особина унутрашњег и спољашњег обиљежја модела – унутрашњост се односи на савладавање свих изазова које захтјева један ниво, док се појмови који се боље упознају прелазећи са нивоа на ниво односе на спољашњу везу између нивоа.
4. **Језик** – Сваки ниво има сопствену мрежу појмова и језичких симбола.

5. **Неусклађеност** – Ученик не може да разумије градиво уколико је презентовано на вишем нивоу разумијевања.

3. Истраживање

Да бисмо испитали на којим се ван Хилеовим нивоима разумијевања геометрије налазе ученици сарајевских гимназија осмислили смо кратки тест и провели тестирање.

Тестови за процјењивање нивоа ван Хилеове скале према [7] обично садрже 25 питања и то по 5 за сваки ниво. Сматра се да је ученик на n -том нивоу ван Хилеове скале уколико је задовољио све нивое ниже од n -тог и уколико је тачно урадио 3 од 5 (или чак 4 од 5 у строжијој варијанти) задатака предвиђених за n -ти ниво. За провођење оваквог облика тестирања потребно је много више од 30 минута колико смо имали на располагању, па смо се одлучили да направимо једноставнију и краћу верзију теста која би се фокусирала на прављење разлике између првог и другог, те другог и трећег нивоа.

Плановима и програмима математике у основној и средњој школи нашег образовног система обухваћена је само Еуклидска геометрија, док се друге геометрије ни не спомињу. Осим тога, строго аксиоматско заснивање Еуклидске геометрије обрађује се само у математичко-информатичком усмјерењу, због чега нисмо очекивали да ученици задовоље највиши ниво ван Хилеове скале, па питања за тај ниво нисмо ни укључили у тест.

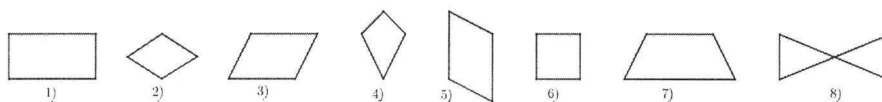
Тестирање смо обавили у двјема сарајевским гимназијама које похађају ученици са просјечном оцјеном из математике оствареном у основној школи и бројем бодова на екстерној матури из математике који су далеко виши од просјечне оцјене и просјечног броја бодова за Кантон Сарајево.

Задаци су изабрани из тематских јединица које су у основној, а касније и у средњој школи веома детаљно и кроз велики број часова обрађене, а односе се редом на:

- класификацију четвороуглова,
- подударност троуглова,
- кружницу, те однос праве и кружнице,
- Питагорину теорему.

Т Е С Т

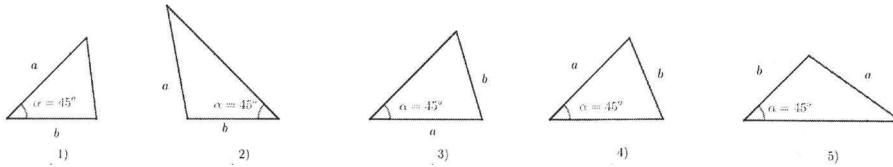
1. Међу понуђеним фигурама заокружити све паралелограме:



Допунити реченицу:

Паралелограм је ...

2. Међу понуђеним троугловима заокружити оне који су међусобно подударни:



Објаснити зашто су заокружени троуглови подударни.

3. Дате су двије праве које се сијеку. Нацртати неколико кружница које додирују дате праве. Одредити скуп тачака којег чине центри свих кружница које додирују обје праве. Шта је тај скуп тачака? (Нацртати слику!)
4. а) Навести Питагорину теорему.
б) Доказати Питагорину теорему.

3.1. Узорак

У току истраживања тест су радила 93 ученика из двије гимназије у Сарајеву, од чега је 55 ученика првог разреда и 38 ученика четвртог разреда. Истраживање је обављено у октобру 2020. године. У том периоду, због лоше епидемиолошке ситуације, настава се у Кантону Сарајево изводила по комбинованом моделу што је значило да је половина ученика из сваког одјељења наставу пратила у школи, а друга половина „онлајн“. Родитељи су имали могућност да се изјасне да дијете наставу похађа искључиво по „онлајн“ моделу, што је велики број родитеља ученика четвртог разреда искористио, па је то разлог нижег броја тестираних у генерацији четвртих разреда. Ученици другог и трећег разреда нису били обухваћени истраживањем, јер су се у октобру према наставном плану и програму обрађивале наставне јединице из геометрије.

3.2. Ток истраживања и опис резултата

Истраживање је одобрено од стране надлежног Министарства за образовање, науку и младе Кантона Сарајево. Тест се изводио током редовне наставе из математике, а непосредну израду задатака надгледали су аутори. Ученици су тест радили 30 минута.

Размотримо сада критеријум по коме смо извршили процјену нивоа разумијевања геометрије по ван Хилеовој скали.

У првом дијелу првог задатка понуђено је осам полигона међу којима је требало препознати и заокружити паралелограме. Ученици који су заокружили само полигоне 3) и 5) показали су да препознају стандардни облик и положај паралелограма. Они који су осим полигона под бројевима 3) и 5) заокружили и 2), препознају и ротирани ромб као паралелограм, чиме показују да су на почетку разумијевања класа геометријских облика. Међутим, ако ученици не

препознају правоугаоник и квадрат, односно полигоне под бројевима 1) и 6), као паралелограме, још увијек су на нивоу 0 (визуализација).

Ученици који су заокружили полигоне под бројевима 1), 2), 3), 5) и 6), односно они који су тачно ријешили први дио првог задатка показали су да су способни не само да препознају основне геометријске облике, него и да изврше класификацију истих анализирајући њихове особине чиме су показали да су на нивоу 1 ван Хилеове скале. Тако имамо да је 61,13% ученика који су приступили тестирању задовољило услов којим је показало да се налази на најмање првом ван Хилеовом нивоу разумијевања геометрије. Од броја тестираних ученика првог разреда 34,55% и 44,74% ученика четвртог разреда је на нивоу визуализације, то јесте на нултом нивоу ван Хилеове скале.

На другом нивоу ван Хилеове скале налазе се ученици који препознају особине геометријских фигура и везе између њих, те су способни да дају прецизну и смислену дефиницију. Карактеристика ученика на овом нивоу је да емпиријски добијене закључке комбинују са дедукцијом јер не разумију у потпуности важност дедуктивног закључивања. Због тога смо на други ниво смијештали ученике који су тачно урадили два од три сљедећа задатка:

- Други дио првог задатка. (Дали су тачну дефиницију паралелограма.)
- Први дио другог задатка. (Под тачно урађеним првим дијелом другог задатка подразумевају се и одговори у којима су осим троуглова 2) и 5) заокружени и троуглови 3) и 4), премда троуглови у другом пару нису међусобно подударни. Разлог лежи у чињеници да ученици који су на другом нивоу интуитивно разумију подударност, а троуглови 3) и 4) „изгледају“ као да су подударни.)
- Први дио трећег задатка. (Под тачно урађеним задатком у овом случају сматрали смо све оне цртеже из којих се види да ученик разумије тражени однос између праве и кружнице.)

Резултати су показали да је од укупног броја ученика 32,25% задовољило критеријум за прелазак на други ниво ван Хилеове скале. Тако је на првом нивоу ван Хилеове скале остало 40,00% ученика првог и 13,16% ученика четвртог разреда.

Трећи ниво ван Хилеове скале карактерише способност извођења закључака дедукцијом, па се према томе, на овом нивоу налазе ученици који разумију значење доказа математичког тврђења и способни су да направе слијед импликација који ће их довести од познатих и већ доказаних тврђења до жељеног. Због тога смо на трећи ниво ван Хилеове скале смјестили ученике који су тачно урадили два од сљедећа три задатка:

- Други задатак. (Под тачно урађеним другим задатаком сада се сматра уочен пар троуглова 2) и 5) као међусобно подударних, те изведен закључак да су троуглови подударни по ставу ССУ (страница-страница-угао) уз одговарајуће објашњење.
- Други дио трећег задатка. (Тачно урађен други дио трећег задатка директно указује на дубље разумијевање особина кружница и њихових танген-

ти. Иначе овакав начин размишљања код ученика доводи до закључка да је тражени скуп тачака унија двије праве, односно симетрале углова које образују праве из услова задатка.)

- Други дио четвртог задатка. (Тачно изведен доказ Питагорине теореме на било који од познатих начина који укључује и употребу тригонометрије или вектора.)

Резултати су показали да је од укупног броја ученика 9,68% задовољило критеријум за прелазак на трећи ниво ван Хилеове скале. При томе је 23,64% ученика првог и 21,05% ученика четвртог разреда остало на другом нивоу ван Хилеове скале.

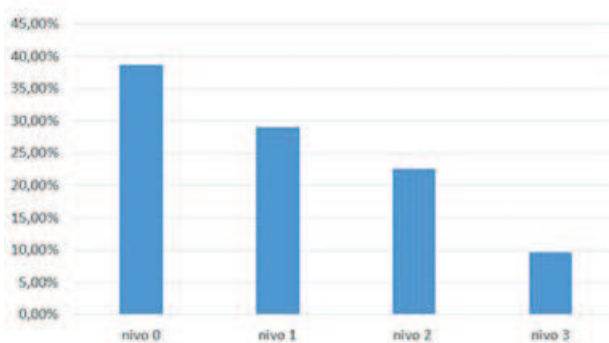
Примјетимо да тачно навођење исказа Питагорине теореме нисмо узимали у обзир приликом оцјењивања теста, јер само навођење исказа најпознатије математичке теореме може се сматрати и резултатом учења које није нужно везано за разумијевање.

Према томе, резултат истраживања можемо приказати у сљедећој табели:

	апсолутна фреквенција	релативна фреквенција
Ниво 0	36	0,39
Ниво 1	27	0,29
Ниво 2	21	0,23
Ниво 3	9	0,1
Σ	93	1

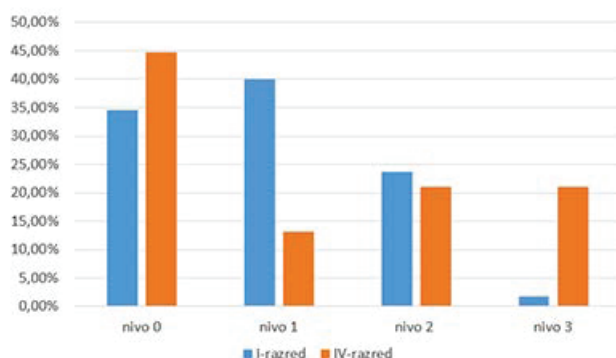
Табела 1. Табела апсолутне и релативне фреквенције

Прегледније, резултате можемо илустровати и графиконима на сликама 1 и 2.



Сл. 1. Процент ученика по ван Хилеовим нивоима

Напоменимо да према ван Хилеовој теорији мора бити задовољена хијерархичност што значи да се на примјер, на нивоу три не може наћи ученик који није



Сл. 2. Поређење процента ученика I и IV разреда

задовољно и постављене критеријуме за нивое 0, 1 и 2. Гутманов скалограм је коришћен да бисмо утврдили да ли ван Хилеови нивои тестирани задацима чине хијерархију. То значи да смо сваком ученичком раду додијелили четвороцифрени бинарни број који означава задовољавање, односно незадовољавање услова за сваки од 4 нивоа ван Хилеове скале. Тако на примјер, 1010 значи да ученик задовољава услове за нивое 0 и 2, али не и за 1 и 3. Бројевима 0000, 1000, 1100 и 1111 се означавају радови код којих је хијерархичност задовољена, а све остале комбинације различите од ових сматрају се грешком. У нашем истраживању појавило се седам радова са грешком и израчуната вриједност Гутмановог коефицијента је 0,9812 [4] чиме је поузданост самог теста потврђена.

3.3. Закључак

Иако овим истраживањем није обухваћен велики узорак ученика, на првом мјесту због тога што се настава већи дио школске године одвијала по „онлајн“ моделу и само у кратким временским интервалима је мали број ученика физички био присутан у школи, ипак можемо констатовати неколико чињеница:

- 1) 38,71% гимназијалаца који су учествовали у тестирању не разумеје да су квадрат, правоугаоник и ромб такође паралелограми.
- 2) Подударност и ставови о подударности троуглова сматрају се основним теоремама Еуклидове геометрије који представљају фундаментални апарат за рјешавање геометријских задатака како у основној тако и у средњој школи. Међу тестираним ученицима само је 6,45% ученика тачно препознало пар подударних троуглова и оправдало избор одговарајућим ставом о подударности троуглова.
- 3) 26,88% гимназијалаца који су учествовали у тестирању је знало да нацрта неколико кружница које додирују двије праве које се сијеку.
- 4) Питагорина теорема је свакако најпопуларнија теорема у настави математике чији је доказ могуће извести на много различитих начина и користећи различите математичке алате. Само 17,2% тестираних гимназијалаца је понудило валидан доказ Питагорине теореме.

Не можемо бити задовољни чињеницом да се 57,89% тестираних ученика четвртог разреда гимназије налази на нивоу визуализације и анализе (0 и 1 ниво ван Хилеове скале) и поред тога што је око 40% наставних садржаја предмета математика било управо из области геометрије. Низак ниво разумијевања основних геометријских појмова имплицира тешкоће у разумијевању свих аспеката умјетности, науке и технике који имају основу у геометрији.

Не можемо бити задовољни чињеницом да се 74,55% тестираних ученика првог разреда гимназије налази на нивоу визуализације и анализе, јер према ван Хилеовој теорији напредак са једног нивоа на следећи условљен је разумијевањем језика којим се предавач обраћа ученицима и мора бити прилагођен њиховом нивоу разумијевања. Наставни садржаји и сам језик којим се тај садржај презентира су у старијим разредима средње школе свакако на нивоу који је овим ученицима слабије или никако разумљив, а то у коначном резултира њиховом стагнацијом и ненапредовањем.

Резултати овог малог истраживања отварају многа питања која чекају одговор, а нека од њих су свако:

- Како би изгледали резултати сличног тестирања које би се провело на много већем и репрезентативнијем узорку?
- Који су основни разлози за тако низак ниво разумијевања основних појмова у геометрији?
- Шта се све може учинити да се постојеће стање поправи?

ЛИТЕРАТУРА

- [1] D. Fuys, D. Geddes, R. Tischler, *The van Hiele Model of Thinking in Geometry among Adolescents*, College School of Education M. de Villiers, Some Reflections on the Van Hiele Theory, Invited plenary from 4th Congress of teachers of mathematics, 2010.
- [2] M.N. Hassan, A.H. Abdullah, N. Ismail, *Effects of VH-iSTEM Learning Strategy on Basic Secondary School Students' Degree of Acquisition of van Hiele Levels of Thinking in Sokoto State, Nigeria*, Universal J. of Educational Research 8(9): 4213–4223, (2020), doi:10.13189/ujer.2020.080848.
- [3] M. L. Crowley, *The van Hiele model of the development of geometric thought*, Learning and Teaching Geometry, K-12, (1987), 1–16.
- [4] J. Mayberry, *The Van Hiele Levels of Geometric Thought in Undergraduate Preservice Teachers*, Journal for Research in Mathematics Education, 14(1), (1983), 58–69.
- [5] OECD (2020), *Education in the Western Balkans: Findings from PISA*, PISA, OECD Publishing, Paris, <https://doi.org/10.1787/764847ff-en>.
- [6] F. Razak, A.B. Sutrisno, Z. Immawan, S.B. Muchsin, *Analysis of Students' Thinking Level with Cognitive Style "Field Independent" Based on Van Hiele Theory*, J. Phys.: Conf. Ser. 1028 (2018) 012161, doi:10.1088/1742-6596/1028/1/012161.
- [7] Z. Usiskin, *Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry*, University of Chicago, 1982.

M.M.D.: Prirodno-matematički fakultet, Sarajevo, BiH

E-mail: manuela.md@pmf.unsa.ba

S.Z.: E-mail: zekovicsehma@hotmail.com

A.B.: Druga gimnazija, Sarajevo, BiH

E-mail: amar.basic@2gimnazija.edu.ba