Др Милан Живановић

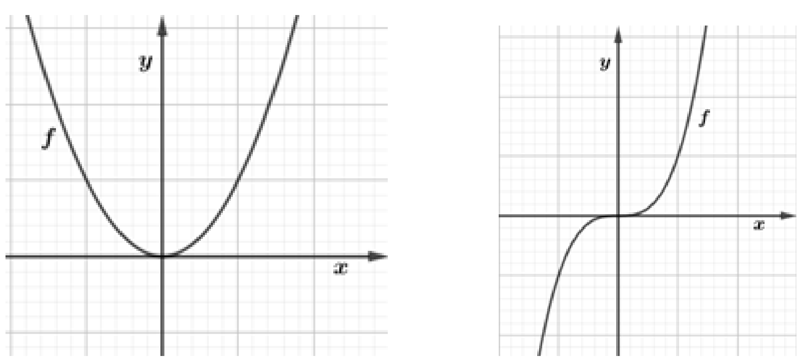
ТРАНСФОРМАЦИЈЕ ГРАФИКА ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦИЈА

Основне елементарне функције су: степене, експоненцијалне, логаритамске, тригонометријске и инверзне тригонометријске функције. Функције које из њих настају коначном применом аритметичких операција и композиције називамо елементарним функцијама. Испитивање својстава ових функција предмет је изучавања средњошколских курсева математике.

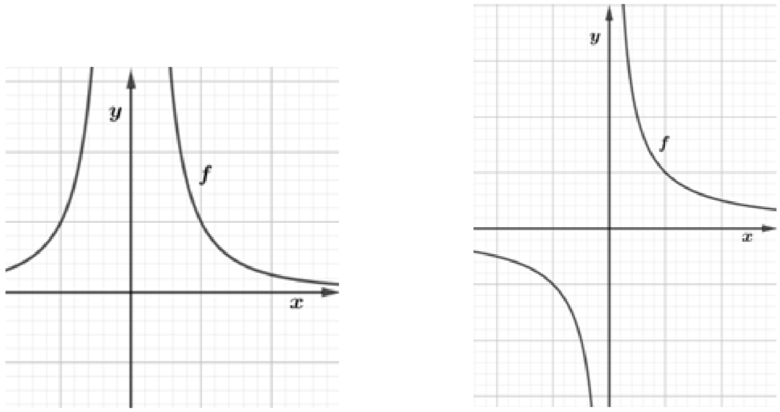
Циљ овог рада је да покажемо како се скицира график и одређују својства функције $y = Cf(ax + b) + D$, $(a, b, C, D$ су реални параметри и a, C су различити од $0)$ у зависности од својстава елементарне функције $y = f(x)$ и датих коефицијената, без коришћења диференцијалног рачуна. Биће размотрени и неки примери оваквих функција у којима фигурише и апсолутна вредност. Такође, илустроваћемо на примерима како се овако добијени графици могу искористити за анализу неких трансцендентних једначина и неједначина које се не могу решити на елементаран начин.

Основне елементарне функције

Својства *степене* функције $f(x) = x^{\alpha}$ целобројног изложиоца су познате и илустроване су, за разне вредности изложиоца α, на сликама 1 и 2.



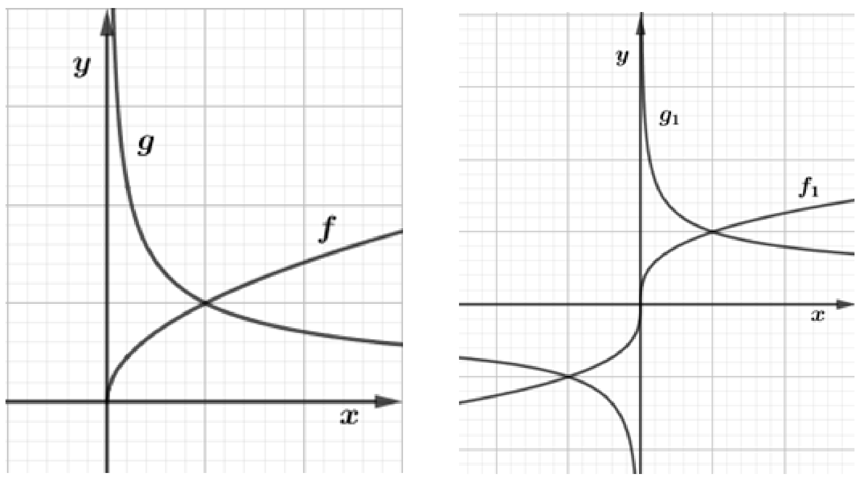
Слика 1. График функције $y = x^{\alpha}$ за $\alpha \in \mathbf{N}$, α парно (лево), односно непарно (десно)



Слика 2. График функције $y = x^{\alpha}$ за $\alpha \in \mathbf{Z}$, $\alpha < 0$, α парно (лево), односно непарно (десно)

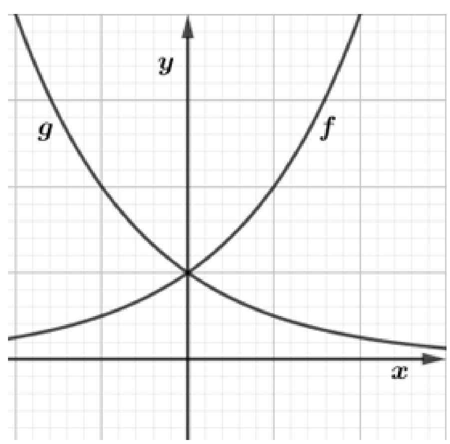
Ученицима су мање позната својства степене функције с рационалним изложиоцем $\frac{m}{n}$ ($m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$, НЗД$(m,n) = 1$), па су стога у доњој табели представљена та својства у зависности од природе изложиоца.

изложилац	домен и кодомен	нуле	знак	монотоност	екстремне вредности
$m > 0$ $m \in 2\mathbf{N}$ $n \in 2\mathbf{N}+1$	$f\colon \mathbf{R} \to [0,+\infty)$	$x = 0$	$f(x) > 0$ $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$	$f\uparrow$, $x \in (0,+\infty)$ $f\downarrow$, $x \in (-\infty,0)$	$x = 0$
$m < 0$ $m \in 2\mathbf{N}$ $n \in 2\mathbf{N}+1$	$f\colon \mathbf{R} \setminus \{0\}$ $\to (0,+\infty)$	нема	$f(x) > 0$ $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$	$f\downarrow$, $x \in (0,+\infty)$ $f\uparrow$, $x \in (-\infty,0)$	нема
$m > 0$ $m \in 2\mathbf{N}+1$ $n \in 2\mathbf{N}$	$f\colon [0,+\infty)$ $\to [0,+\infty)$	$x = 0$	$f(x) > 0$ $x \in (0,+\infty)$	$f\uparrow$, $x \in [0,+\infty)$	$x = 0$
$m < 0$ $m \in 2\mathbf{N}+1$ $n \in 2\mathbf{N}$	$f\colon (0,+\infty)$ $\to (0,+\infty)$	нема	$f(x) > 0$ $x \in (0,+\infty)$	$f\downarrow$, $x \in (0,+\infty)$	нема
$m > 0$ $m \in 2\mathbf{N}+1$ $n \in 2\mathbf{N}+1$	$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$	$x = 0$	$f(x) > 0$, $x \in (0,+\infty)$ $f(x) < 0$, $x \in (-\infty,0)$	$f\uparrow$, $x \in \mathbf{R}$	нема
$m < 0$ $m \in 2\mathbf{N}+1$ $n \in 2\mathbf{N}+1$	$f\colon \mathbf{R} \setminus \{0\}$ $\to \mathbf{R} \setminus \{0\}$	нема	$f(x) > 0$, $x \in (0,+\infty)$ $f(x) < 0$, $x \in (-\infty,0)$	$f\downarrow$, $x \in (0,+\infty)$ $f\downarrow$, $x \in (-\infty,0)$	нема



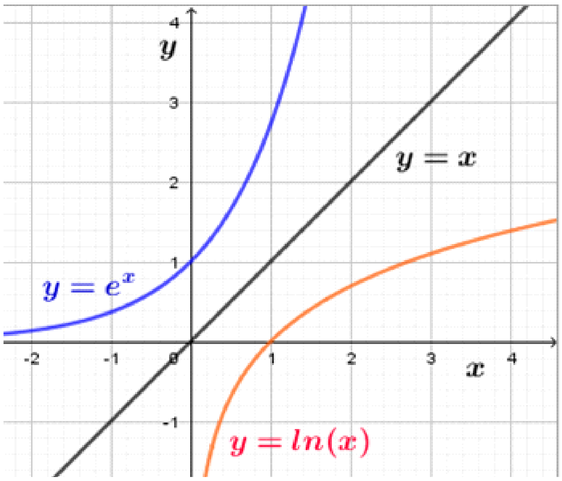
Слика 3. Примери графика степених функција рационалног изложиоца
$f(x) = x^{1/2}$, $g(x) = x^{-1/2}$, $f_1(x) = x^{1/3}$ и $g_1(x) = x^{-1/3}$

Експоненцијална функција је функција у којој се независно променљива јавља у изложиоцу (експоненту) степена. Аналитички је задајемо формулом $y = a^x$, при чему је $a > 0$ и $a \neq 1$.

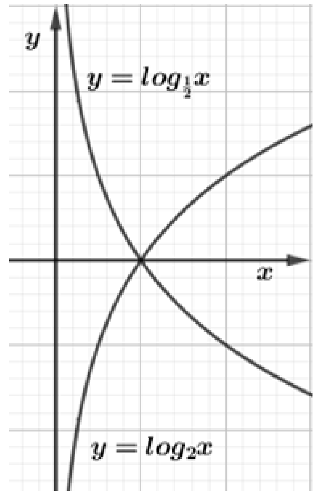


Слика 4. Примери графика експоненцијалних функција $f(x) = 2^x$ и $g(x) = (1/2)^x$

Код *логаритамске* функције независно променљива се јавља у аргументу логаритма. Аналитички је записујемо формулом $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$). Она је инверзна експоненцијалној функцији $y = a^x$, па су њихови графици симетрични у односу на праву $y = x$ (слика 5).

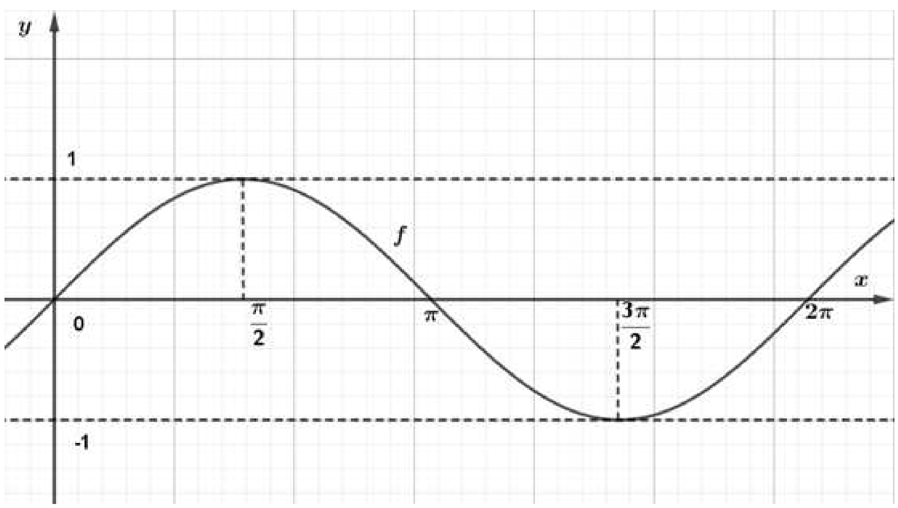


Слика 5. Експоненцијална и логаритамска функција

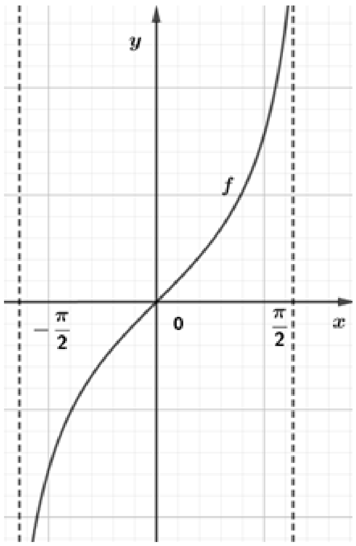


Слика 6. Логаритамске функције

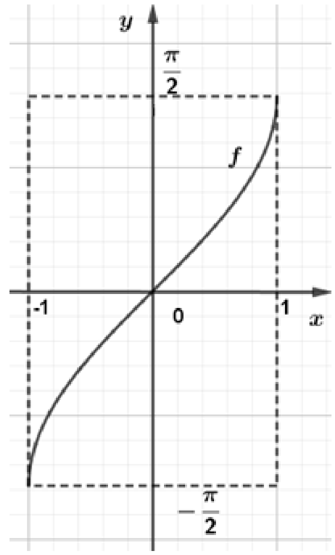
На сликама 7–10 представљени су графици *тригонометријских* и њима *инверзних* функција. Читаоцу се препушта да са графика „прочита“ својства тих функција.



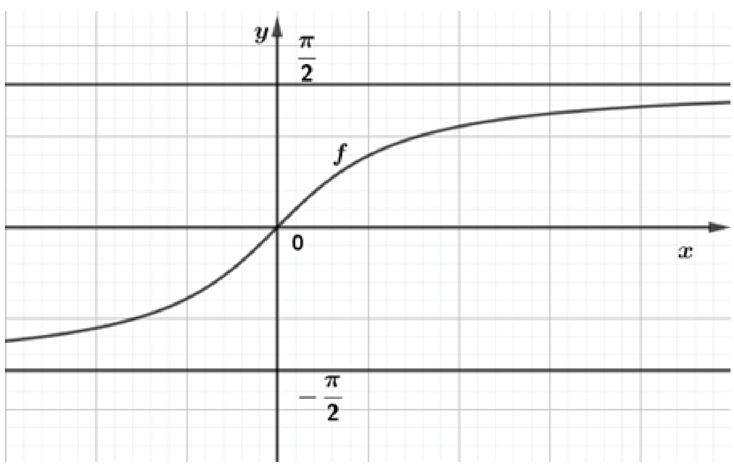
Слика 7. График функције $f(x) = \sin x$



Слика 8. Функција $f(x) = \operatorname{tg} x$



Слика 9. Функција $f(x) = \arcsin x$



Слика 10. График функције $f(x) = \operatorname{arctg} x$

Елементарне трансформације графика функција

Претпоставимо да је дата основна елементарна функција $y = f(x)$. Наш задатак је да без коришћења диференцијалног рачуна нацртамо график функције $y = Cf(ax + b) + D$ у којој неки изрази могу бити и под знаком апсолутне вредности. У том поступку користићемо трансформације померања, рефлексије, сажимања или истезања графика, или делова графика, полазне функције и функција помоћу којих се у том поступку долази до крајње. У наредној табели дат је списак таквих трансформација.

функција	трансформација коју треба извршити на графику функције
$f(x)+D$	вертикално померање графика за вредност $\lvert D\rvert$, навише ако је $D>0$, односно наниже ако је $D<0$
$f(x-b)$	хоризонтално померање графика за вредност $\lvert b\rvert$, улево ако је $b>0$, односно удесно ако је $b<0$
$Cf(x)$, $C>0$, $C\neq 1$	истезање графика дуж y-осе C пута ако је $C>1$, односно сажимање ако је $C<1$
$f(ax)$ $a>0$, $a\neq 1$	сажимање графика дуж x-осе a пута ако је $a>1$, односно истезање ако је $a<1$
$-f(x)$	осна рефлексија у односу на x-осу
$f(-x)$	осна рефлексија у односу на y-осу
$\lvert f(x)\rvert$	осна рефлексија у односу на x-осу делова графика који се налазе у полуравни $y<0$ (испод x-осе), задржавајући делове графика у полуравни $y\geqslant 0$
$f(\lvert x\rvert)$	замена дела графика који се налази у полуравни $x<0$ (лево од y-осе) симетричном сликом у односу на y-осу дела графика из полуравни $x\geqslant 0$, задржавајући и тај део графика

До графика задате функције $y=Cf(ax+b)+D$ долазимо преко низа графика, полазећи од основне елементарне функције:

$$f(x)\mapsto f\Big(x+\frac{b}{a}\Big)\mapsto f\Big(a\Big(x+\frac{b}{a}\Big)\Big)\equiv f(ax+b)\mapsto Cf(ax+b)\mapsto Cf(ax+b)+D.$$

Применом ових трансформација могу се добити и графици основних елементарних функција: $y=\cos x=\sin\Big(x+\dfrac{\pi}{2}\Big)$, $y=\operatorname{ctg}x=\operatorname{tg}\Big(\dfrac{\pi}{2}-x\Big)$, $y=\arccos x=\dfrac{\pi}{2}-\arcsin x$ и $y=\operatorname{arcctg}x=\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x$. На слици 11 представљена је трансформација графика функције $y=\sin x$ у график функције $y=\cos x$.

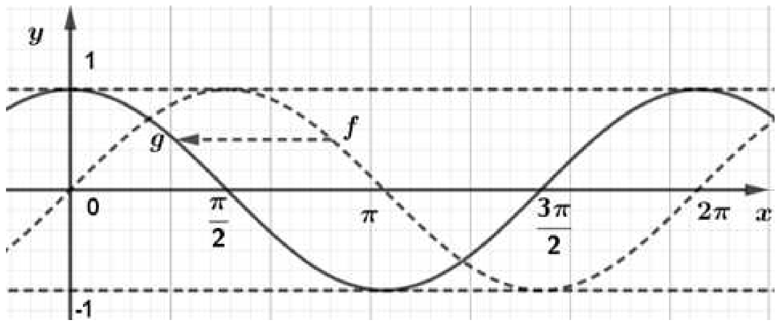
Примери графика елементарних функција

Сада ћемо нацртати графике неких елементарних функција применом трансформација описаних у претходном одељку.

Пример 1. $y=\big|2x^2-7|x|+5\big|$.

Представимо дату функцију у облику

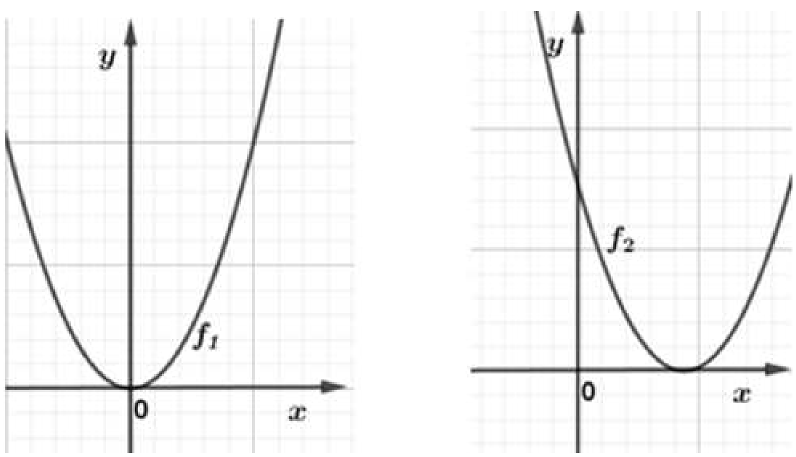
$$f(x)=\Big|2\Big(|x|-\frac{7}{4}\Big)^2-\frac{9}{8}\Big|.$$



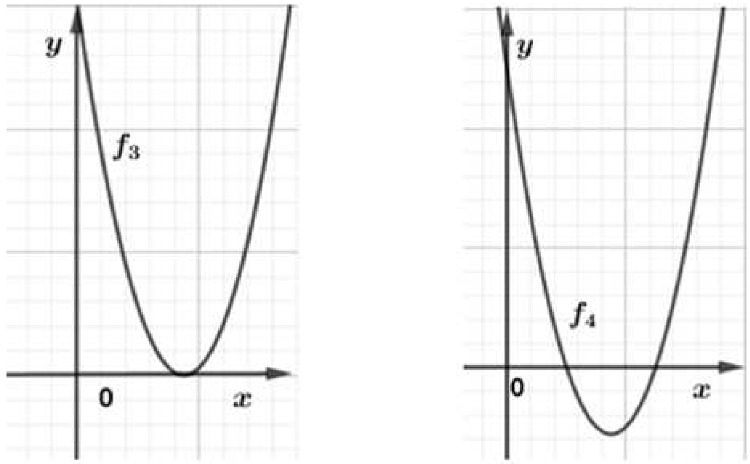
Слика 11. Транслација графика функције $f(x) = \sin x$ до графика функције $g(x) = \cos x = \sin(x + \pi/2)$

Нацртајмо график ове функције корак по корак, полазећи од графика елементарне функције $y = x^2$:

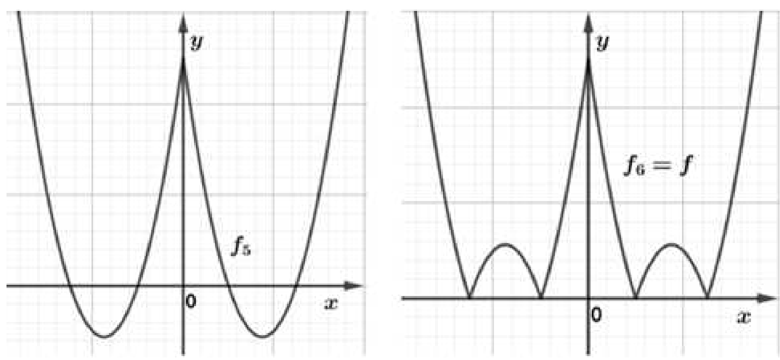
$$x^2 \mapsto \Big(x-\frac{7}{4}\Big)^2 \mapsto 2\Big(x-\frac{7}{4}\Big)^2 \mapsto 2\Big(x-\frac{7}{4}\Big)^2-\frac{9}{8} \mapsto 2\Big(|x|-\frac{7}{4}\Big)^2-\frac{9}{8} \mapsto \Big|2\Big(|x|-\frac{7}{4}\Big)^2-\frac{9}{8}\Big|.$$



Слика 12. Графици функција $f_1(x) = x^2$ и $f_2(x) = (x - 7/4)^2$



Слика 13. Графици функција $f_3(x) = 2(x - 7/4)^2$ и $f_4(x) = 2(x - 7/4)^2 - 9/8$



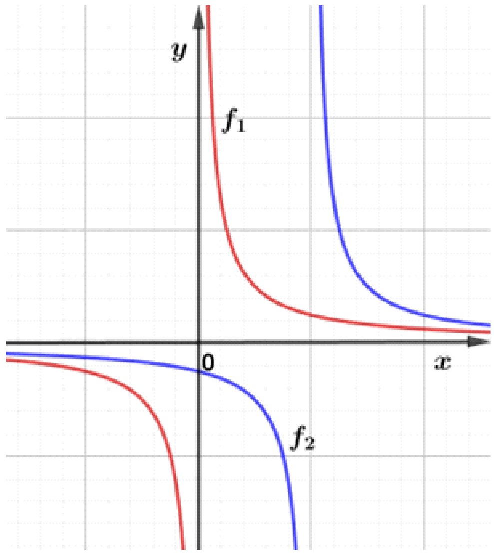
Слика 14. Графици функција $f_5(x) = 2(|x| - 7/4)^2 - 9/8$ и $f_6(x) = |2(|x| - 7/4)^2 - 9/8|$

Пример 2. $y = \dfrac{2|x| + 4}{6 - 3|x|}$.

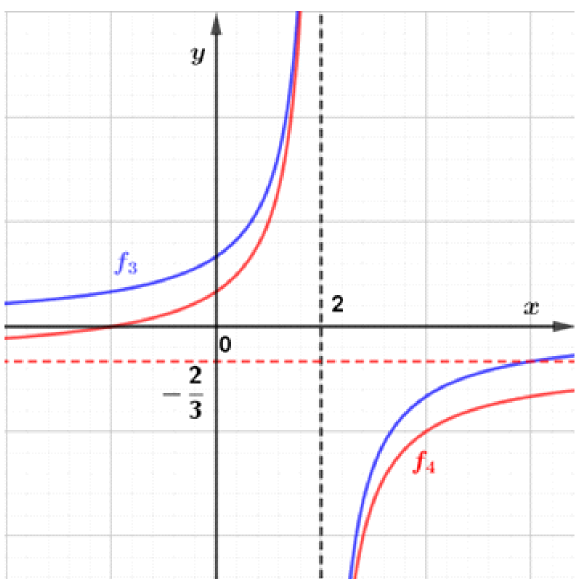
Дату функцију можемо написати у облику $y = -\dfrac{2}{3} - \dfrac{8}{3} \cdot \dfrac{1}{|x| - 2}$. До тог облика можемо доћи преко низа функција:

$$\frac{1}{x} \mapsto \frac{1}{x-2} \mapsto -\frac{8}{3} \cdot \frac{1}{x-2} \mapsto -\frac{2}{3} - \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{x-2} \mapsto -\frac{2}{3} - \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{|x|-2}$$

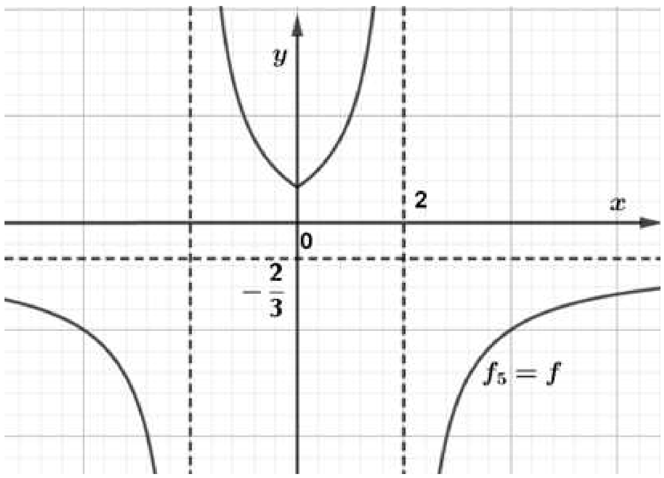
(в. слике 15–17).



Слика 15. Графици функција $f_1(x) = 1/x$ и $f_2(x) = 1/(x-2)$



Слика 16. Графици функција $f_3(x) = -8/(3(x-2))$ и $f_4(x) = -2/3 - 8/(3(x-2))$



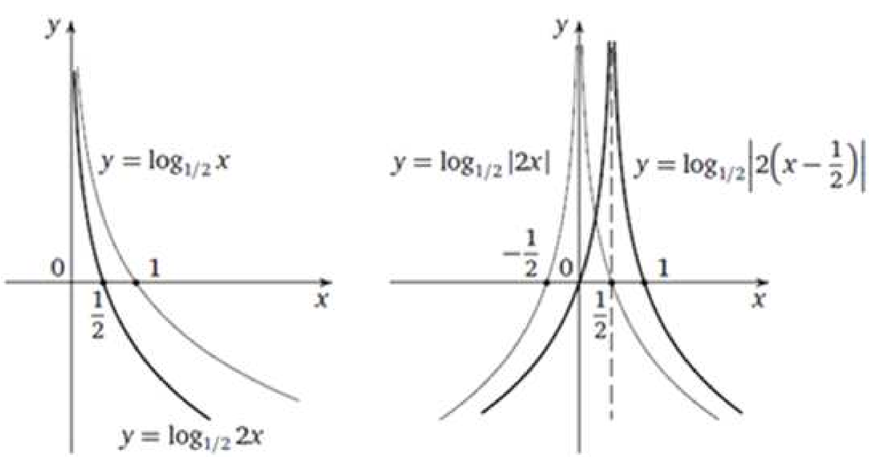
Слика 17. График функције $f_5(x) = -2/3 - 8/(3(|x| - 2))$

Пример 3. $y = \log_{1/2}\Big|1 - 2\big||x| - 1\big|\Big|$.

Дату функцију[1] добијамо помоћу низа функција

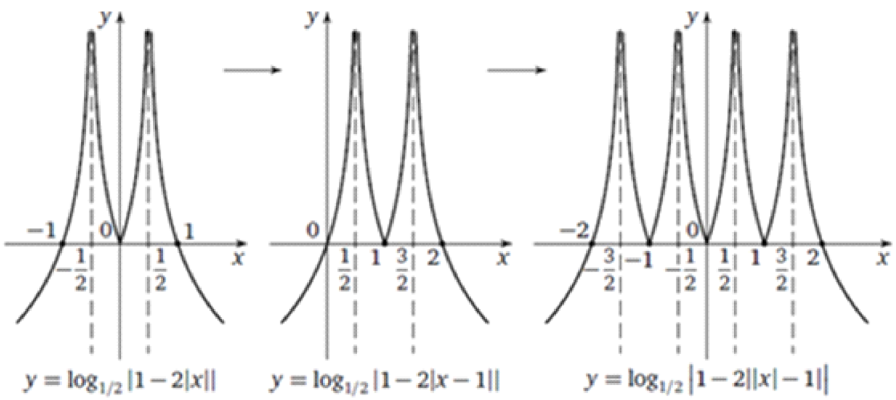
$$\begin{aligned}&\log_{1/2} x \mapsto \log_{1/2} 2x \mapsto \log_{1/2} |2x| \mapsto \log_{1/2} |2(x - 1/2)|\\ &\qquad \mapsto \log_{1/2}\big|1 - 2|x|\big| \mapsto \log_{1/2}\big|1 - 2|x - 1|\big| \mapsto \log_{1/2}\Big|1 - 2\big||x| - 1\big|\Big|.\end{aligned}$$

(слике 18а, 18б).



Слика 18а. Низ графика функција за конструкцију графика $y = \log_{1/2}\Big|1 - 2\big||x| - 1\big|\Big|$.

[1] Задатак преузет из [1]



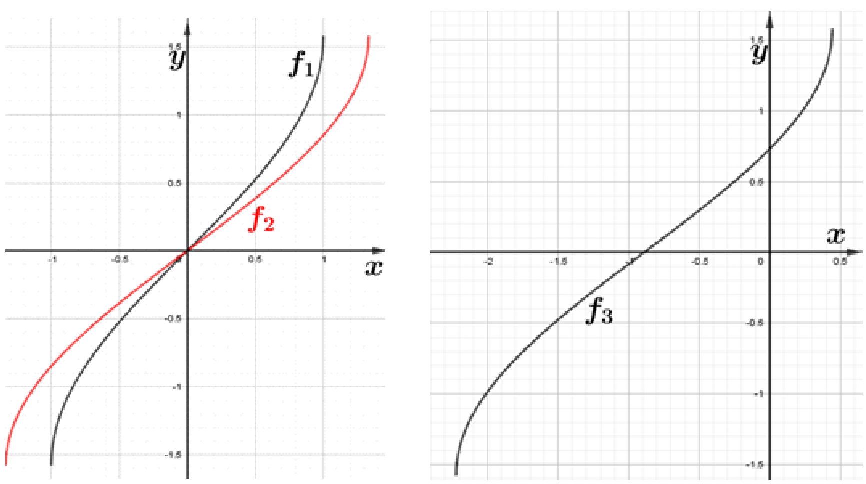
Слика 18б. Низ графика функција за конструкцију графика $y = \log_{1/2}\Big|1-2\Big||x|-1\Big|\Big|$.

Пример 4. $y = \arcsin \dfrac{2+3|x|}{4}$.

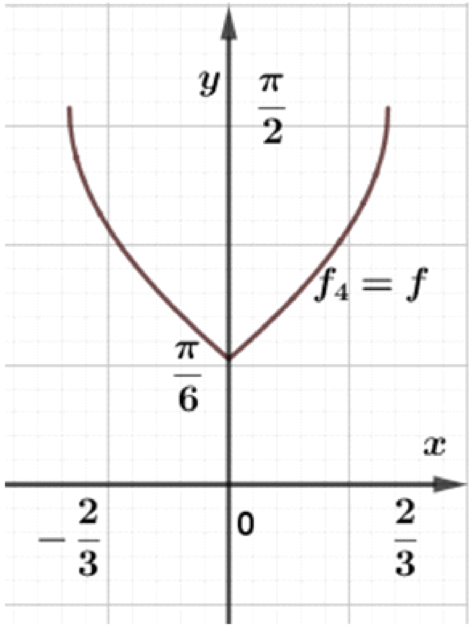
До дате функције долази се преко низа функција:

$$\arcsin x \mapsto \arcsin \frac{3}{4}x \mapsto \arcsin \frac{3}{4}\Big(x+\frac{2}{3}\Big) \mapsto \arcsin \frac{3}{4}\Big(|x|+\frac{2}{3}\Big) \equiv \arcsin \frac{2+3|x|}{4}$$

(слике 19–20).



Слика 19.



Слика 20. График функције $y = \arcsin \frac{2+3|x|}{4}$

Примена графика елементарних функција на решавање трансцендентних једначина и неједначина

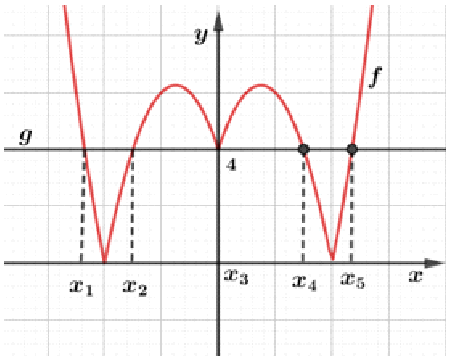
Конструкција графика елементарних функција описана у претходном одељку може се успешно искористити за анализу једначина и неједначина, укључујући оне које садрже параметар, као и оне чија се решења не могу добити елементарно. Илуструјмо то наредним примерима.

Пример 5. У зависности од параметра $\alpha \in [0, \pi] \setminus \{\pi/2\}$ одредити број решења једначине

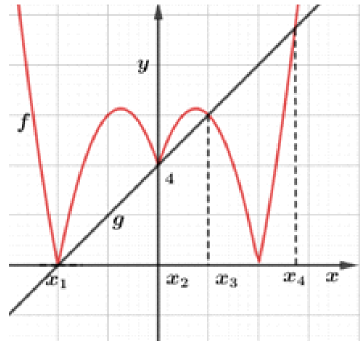
$$\left|x^2 - 3|x| - 4\right| = x \operatorname{tg} \alpha + 4.$$

Решење. Функције $f(x) = \left|x^2 - 3|x| - 4\right|$ и $g(x) = x \operatorname{tg} \alpha + 4$ за домен имају скуп реалних бројева, а за $x = 0$ обе имају вредност 4. Функција f је парна, па се у анализи можемо ограничити на случајеве $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, јер су решења једначине за $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ симетрична решењима за $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ у односу на тачку $x = 0$. Број решења једначине једнак је броју пресечних тачака графика тих двеју функција.

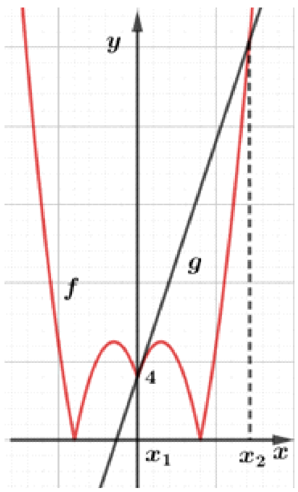
Узмимо најпре да је $\alpha = 0$. Тада на графику (слика 21) уочавамо да осим $x_3 = 0$ једначина има још четири решења. Лако се уочава и да у случају $\alpha = \frac{\pi}{4}$ (слика 22) ти графици имају четири пресечне тачке, па је број решења једнак 4.



Слика 21



Слика 22



Слика 23

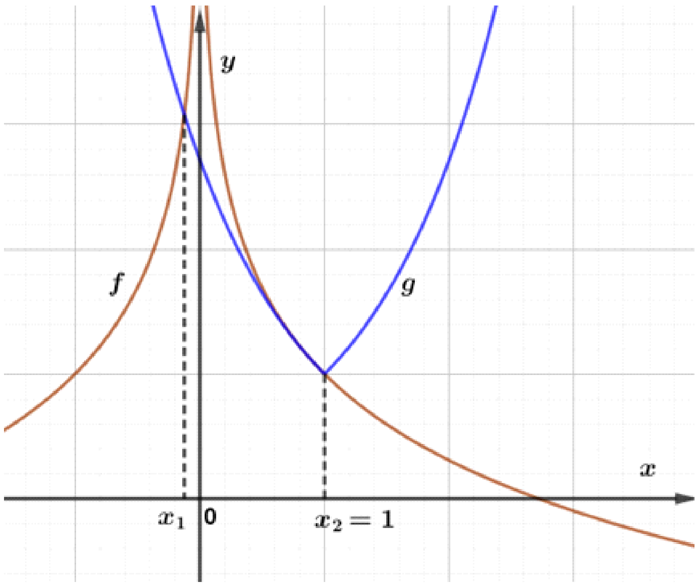
Следећи гранични случај је када је график функције g тангента графика функције f у тачки $(0,4)$. Из услова да систем једначина $y = -x^2 + 3x + 4 \wedge y = x \operatorname{tg}\alpha + 4$ има јединствено решење добијамо да је $\operatorname{tg}\alpha = 3$, односно $\alpha = \operatorname{arctg} 3$. У том случају дата једначина има два решења (слика 23).

На основу свега реченог, број решења једначине представићемо у наредној табели.

$\alpha \in$	број решења
$\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right) \cup \left(\dfrac{3\pi}{4}, \pi\right]$	5
$\left\{\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right\}$	4
$\left(\dfrac{\pi}{4}, \operatorname{arctg} 3\right) \cup \left(\pi - \operatorname{arctg} 3, \dfrac{3\pi}{4}\right)$	3
$\left[\operatorname{arctg} 3, \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi - \operatorname{arctg} 3\right]$	2

Пример 6. Одредити целобројна решења неједначине $1-\ln|x| \geqslant e^{|x-1|}$.

Решење. Неједначина је дефинисана за све реалне бројеве изузев за $x=0$. Означимо $f(x)=1-\ln|x|$ и $g(x)=e^{|x-1|}$ и конструишимо графике тих функција на већ описани начин (слика 24).



Слика 24

На основу слике закључујемо да је решење неједначине одређено са $x \in [x_1, 0) \cup (0, 1]$. Како је $x_1 \in (-1, 0)$, имамо да је $x_2 = 1$ једино целобројно решење неједначине.

Задаци за вежбање

1. Не користећи диференцијални рачун, скицирати графике следећих функција:

   а) $y=|-3x^2+2|x|+1|$;   б) $y=3-|x^2-|x-1||$;

   в) $y=\dfrac{2|x|-4}{3+3|x|}$;   г) $y=\left|\dfrac{2|x|-4}{6-3|x|}\right|$;

   д) $y=\left|2^{-|x|}-\dfrac{1}{2}\right|$;   ђ) $y=\left|3^{|x-1|}-3\right|$;

   е) $y=\log_2|x-|x-1||$;   ж) $y=\operatorname{arctg}|1-2|x||$.

2. У зависности од $a \in (-2,2)$ одредити број решења једначине:

   а) $|x^2-4|x|+3|=a$;   б) $a\sin x=\ln|x|$.

3. Одредити збир целобројних решења неједначине:
   а) $\arcsin|x-1| \geqslant |\sin x|$; б) $|x|-1 < e^{-|x-1|}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. А. Виноградова, С. Н. Олехник, В. А. Садовничии: *Математический анализ в задачах и упражнениях*, Том 1: *Дифференциальное и интегральное исчисление*, МЦНМО, Москва, 2017.
2. Ж. Ивановић, С. Огњановић: *Математика 2, Збирка решених задатака и тестова за II разред гимназија и техничких школа*, Круг, Београд, 1999.
3. З. Каделбург, В. Мићић, С. Огњановић, *Анализа са алгебром 2, Уџбеник са збирком задатака за 2. разред Математичке гимназије*, 3-ће издање, Круг, Београд, 2002.
4. B. Vene: *Zbirka rešenih zadataka iz matematike 2*, 35-to izdanje, Zavod za udžbenike, Beograd, 2011.

Висока школа за васпитаче, Крушевац

E-mail: `mzivanovic@vaspks.edu.rs`