Марко Кошчица

ЈЕДАН СТАВ О ПОДУДАРНОСТИ ТРОУГЛОВА

У овом чланку наведено је тврђење које даје један потребан и довољан услов за подударност два троугла у еуклидском простору, као и неке последице тог тврђења.

Теорема 1. *Троуглови ABC и $A_1B_1C_1$ су подударни ако и само ако важи:*

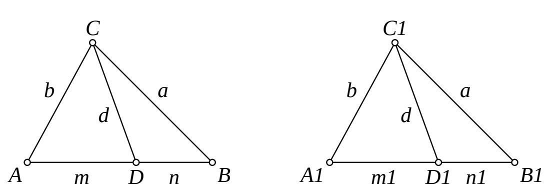
(i) $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$ *и*

(ii) *постоје тачке D и D_1 које припадају унутрашњости, редом, дужи AB и A_1B_1 и при томе важи* $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{A_1D_1}{D_1B_1}$ *и* $CD = C_1D_1$.

Доказ. Нека су троуглови ABC и $A_1B_1C_1$ подударни. Тада је $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$, $AB = A_1B_1$ и $\measuredangle CAB = \measuredangle C_1A_1B_1$. Нека је D унутрашња тачка дужи AB. Тада постоји јединствена тачка D_1 између тачака A_1 и B_1 таква да је $\dfrac{A_1D_1}{D_1B_1} = \dfrac{AD}{DB}$. Тада је

$$A_1D_1 = \frac{A_1D_1}{A_1B_1}A_1B_1 = \frac{\frac{A_1D_1}{D_1B_1}}{\frac{A_1B_1}{D_1B_1}}A_1B_1 = \frac{\frac{A_1D_1}{D_1B_1}}{\frac{A_1D_1}{D_1B_1}+1}A_1B_1 = \frac{\frac{AD}{DB}}{\frac{AD}{DB}+1}AB = AD.$$

Сада на основу става СУС следи да су троуглови CAD и $C_1A_1D_1$ подударни, па је $CD = C_1D_1$.



Слика 1

Да је конјункција услова (i) и (ii) довољан услов за подударност троуглова ABC и $A_1B_1C_1$ биће доказано на девет начина.

1. начин. Уведимо ознаке $BC = B_1C_1 = a$, $CA = C_1A_1 = b$, $AB = c$, $A_1B_1 = c_1$, $AD = m$, $A_1D_1 = m_1$, $DB = n$, $D_1B_1 = n_1$, $\lambda = \frac{m}{n}, CD = C_1D_1 = d$ (сл. 1). По услову теореме је $\frac{m_1}{n_1} = \lambda$, па је $\frac{m}{c} = \frac{m_1}{c_1} = \frac{\lambda}{\lambda+1}$ и $\frac{n}{c} = \frac{n_1}{c_1} = \frac{1}{\lambda+1}$. Применимо ли Стјуартову[1] теорему на $\triangle ABC$ и тачку D добијамо

$$d^2 = \frac{m}{c}a^2 + \frac{n}{c}b^2 - mn.$$

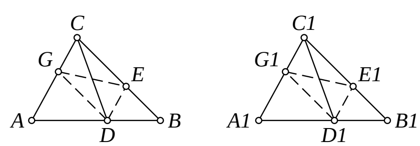
тј.

$$d^2 = \frac{\lambda}{\lambda+1}a^2 + \frac{1}{\lambda+1}b^2 - \frac{\lambda}{(\lambda+1)^2}c^2, \tag{1}$$

Аналогно се добија

$$d^2 = \frac{\lambda}{\lambda+1}a^2 + \frac{1}{\lambda+1}b^2 - \frac{\lambda}{(\lambda+1)^2}c_1^2. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следи да је $c = c_1$, па су троуглови ABC и $A_1B_1C_1$ подударни на основу става ССС.



Слика 2

2. начин. Користићемо ознаке из претходног доказа. Нека је E тачка дужи BC таква да је $DE \parallel AC$, а E_1 тачка дужи B_1C_1 таква да је $D_1E_1 \parallel A_1C_1$ (сл. 2). На основу Талесове теореме је $EC = \frac{AD}{AB}BC = \frac{m}{c}a = \frac{\lambda}{\lambda+1}a$. Како је $\triangle DBE \sim \triangle ABC$, то је $DE = \frac{DB}{AB}AC = \frac{n}{c}b = \frac{1}{\lambda+1}b$. Аналогно се добија да је

$$E_1C_1 = \frac{A_1D_1}{A_1B_1}B_1C_1 = \frac{m_1}{c_1}a = \frac{\lambda}{\lambda+1}a \quad \text{и} \quad D_1E_1 = \frac{D_1B_1}{A_1B_1}A_1C_1 = \frac{n_1}{c_1}b = \frac{1}{\lambda+1}b.$$

Троуглови CDE и $C_1D_1E_1$ су подударни на основу става ССС, па је $\measuredangle BCD = \measuredangle B_1C_1D_1$, одакле је на основу става СУС $\triangle BCD \cong \triangle B_1C_1D_1$. Из последње подударности добијамо да је $DB = D_1B_1$. Следи да је $AB = A_1B_1$, па је на основу става ССС $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$.

Напомена. Ако са G означимо тачку дужи CA такву да је четвороугао $DECG$ паралелограм, тада се из чињенице да је збир квадрата дужина дијагонала паралелограма једнак збиру квадрата дужина његових страница добија да је

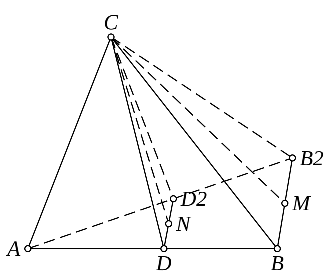
$$EG^2 = 2(EC^2 + DE^2) - CD^2 = 2\Big(\frac{\lambda^2}{(\lambda+1)^2}a^2 + \frac{1}{(\lambda+1)^2}b^2\Big) - d^2.$$

[1] M. Stewart (1717–1785), енглески математичар

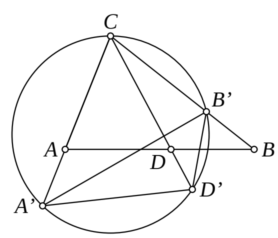
3. начин. Постоји изометријска трансформација простора која тачке A_1 и C_1 пресликава редом у тачке A и C, а тачку B_1 у тачку B_2, такву да B_2 припада равни троугла ABC и при том су тачке B и B_2 са исте стране праве AC. Нека се даље тачка D_1 описаном трансформацијом пресликава у тачку D_2. Тада је D_2 унутрашња тачка дужи AB_2 и при томе је $\frac{AD_2}{D_2B_2} = \frac{A_1D_1}{D_1B} = \frac{AD}{DB}$, као и $CD_2 = C_1D_1 = CD$. Да бисмо доказали да је $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$ довољно је да докажемо да је $B_2 \equiv B$.

Претпоставимо супротно, тј. да $B_2 \neq B$. Тачка B_2 може да се налази на правој AB или ван ње. Ако је тачка B_2 на правој AB, тада су тачке A и B_2 на полуправој $[AB)$ са исте стране или различитих страна тачке B. Без умањења општости доказа претпоставимо да су A и B_2 са различитих страна тачке B, тј. да важи $A - B - B_2$. Тада због $\frac{AD_2}{D_2B_2} = \frac{AD}{DB}$ мора бити $A - D - D_2 - B_2$. Ако би било $D_2 \equiv B$, онда би за оштре углове $\measuredangle DBC$ и $\measuredangle B_2BC$ на основицама једнакокраких троуглова D_2DC и B_2BC важило $\measuredangle DBC + \measuredangle B_2BC = 180°$, што је немогуће. Не може бити $A - D - D_2 - B$, јер би $\triangle D_2BC$ имао два тупа угла. Не може бити ни $A - D - B - D_2 - B_2$, јер би из једнакости $\measuredangle CD_2B = \measuredangle CDB_2$ и $\measuredangle CBD_2 = \measuredangle CB_2D$ следило да је $\measuredangle D_2CB = \measuredangle DCB_2$, што је немогуће. Следи да тачка B_2 не припада правој AB. Тачке C, B и B_2 не могу бити колинеарне јер би тада због $BC = B_2C$ морало бити $B_2 \equiv B$. Такође ни тачке C, D и D_2 не могу бити колинеарне, јер би тада због $CD = CD_2$ било $D_2 \equiv D$, па би из $\frac{AD_2}{D_2B_2} = \frac{AD}{DB}$ следило $B_2 \equiv B$.

Нека су M и N средишта дужи BB_2 и DD_2, редом. Како је $BC = B_2C$ и $CD = CD_2$, то је $CM \perp BB_2$ и $CN \perp DD_2$ (сл. 3). Из једнакости $\frac{AD}{DB} = \frac{AD_2}{D_2B_2}$, на основу обратне Талесове теореме следи да су праве BB_2 и DD_2 паралелне. Добијамо да су CM и CN нормале на две паралелне праве и при том имају тачно једну заједничку тачку – тачку C, што је немогуће, с обзиром да нормале на две паралелне праве морају бити паралелне или се поклапати. Коначно следи да мора бити $B_2 \equiv B$, па су троуглови ABC и $A_1B_1C_1$ заиста подударни.



Слика 3



Слика 4

4. начин. Користићемо тачке B_2 и D_2 које су описане у претходном доказу. Нека је k кружница у равни $\triangle ABC$ са центром C и полупречником $\sqrt{BC \cdot CA}$. Нека се при инверзији у односу на кружницу k тачке A, B, D, B_2 и D_2 пресликавају редом у тачке A', B', D', B_2' и D_2' (сл. 4). Тада је $B'C = \frac{BC \cdot CA}{BC} = CA$

и $CA' = \frac{BC\cdot CA}{CA} = BC$. Тачке A', B', C и D' су четири различите коцикличне тачке и при томе се тачке C и D' налазе са различитих страна праве $A'B'$, па је $\measuredangle A'D'B' = 180^\circ - \measuredangle B'CA' = 180^\circ - \measuredangle BCA$. Из сличности $\triangle A'D'C$ и $\triangle DAC$ следи $A'D' = \frac{CA'}{CD}AD$, а из сличности $\triangle B'D'C$ и $\triangle DBC$ следи $B'D' = \frac{B'C}{CD}BD$. Дељењем последњих двеју једнакости добијамо да је

$$\frac{A'D'}{B'D'} = \frac{CA'}{B'C}\cdot\frac{AD}{BD} = \lambda\cdot\frac{CA'}{B'C}. \tag{3}$$

На основу Птоломејеве теореме је

$$\begin{aligned} A'B'\cdot CD' &= B'C\cdot A'D' + CA'\cdot B'D' \\ &= B'C\cdot\lambda\cdot\frac{CA'}{B'C}B'D' + CA'\cdot B'D' \\ &= (\lambda+1)\cdot CA'\cdot B'D', \end{aligned} \tag{4}$$

Аналогно се добија да је $B_2'C = CA$, $\measuredangle A'D_2'B_2' = 180^\circ - \measuredangle B_2CA = 180^\circ - \measuredangle B_1C_1A_1$, као и да је

$$\frac{A'D_2'}{B_2'D_2'} = \lambda\cdot\frac{CA'}{B_2'C} \tag{5}$$

и

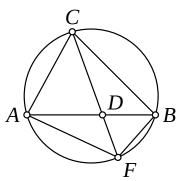
$$A'B_2'\cdot CD_2' = (\lambda+1)\cdot CA'\cdot B_2'D_2'. \tag{6}$$

Дељењем релација (3) и (5) рачунамо $\frac{A'D'}{B'D'} : \frac{A'D_2'}{B_2'D_2'} = \frac{CA'}{B'C} : \frac{CA'}{B_2'C} = \frac{BC}{CA} : \frac{BC}{CA} = 1$. Добијамо дакле да је $\frac{A'D'}{A'D_2'} = \frac{B'D'}{B_2'D_2'}$. Из једнакости (4) и (6) и чињенице да је $CD' = CD_2' = \frac{BC\cdot CA}{CD}$ добијамо да је $\frac{A'B'}{A'B_2'} = \frac{B'D'}{B_2'D_2'}$. Следи да је $\frac{A'B'}{A'B_2'} = \frac{B'D'}{B_2'D_2'} = \frac{A'D'}{A'D_2'}$, тј. троуглови $A'B'D'$ и $A'B_2'D_2'$ имају пропорционалне странице, па следи да су они слични. Из сличности је $\measuredangle A'D'B' = \measuredangle A'D_2'B_2'$, па је $\measuredangle BCA = \measuredangle B_1C_1A_1$. Сада су троуглови ABC и $A_1B_1C_1$ подударни на основу става СУС.

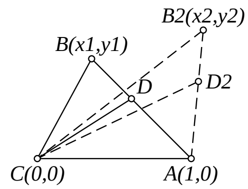
5. начин. Нека је F друга заједничка тачка праве CD и кружнице описане око $\triangle ABC$ (сл. 5). Из сличности $\triangle DFA$ и $\triangle DBC$ следи $AF = \frac{AD}{CD}BC = \frac{\lambda}{\lambda+1}\frac{ca}{d}$ и $DF = \frac{AD\cdot DB}{CD} = \frac{\lambda}{(\lambda+1)^2}\frac{c^2}{d}$, а из сличности $\triangle DFB$ и $\triangle DAC$ следи $BF = \frac{DB}{CD}CA = \frac{1}{\lambda+1}\frac{cb}{d}$. Рачунамо: $CF = CD + DF = CD + \frac{AD\cdot DB}{CD} = \frac{(\lambda+1)^2d^2+\lambda c^2}{(\lambda+1)^2 d}$. На основу Птоломејеве теореме је $AB\cdot CF = AF\cdot BC + BF\cdot CA$, тј. $c\cdot\frac{(\lambda+1)^2d^2+\lambda c^2}{(\lambda+1)^2 d} = \frac{\lambda}{\lambda+1}\frac{ca^2}{d} + \frac{1}{\lambda+1}\frac{cb^2}{d}$, одакле се после дељења последње једнакости са $\frac{c}{(\lambda+1)^2 d}$, сређивања и кореновања добија да је

$$c = \sqrt{(\lambda+1)a^2 + \frac{\lambda+1}{\lambda}b^2 - \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda}d^2}.$$

Аналогно се добија да је $c_1 = \sqrt{(\lambda+1)a^2 + \frac{\lambda+1}{\lambda}b^2 - \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda}d^2}$, па је $AB = A_1B_1$. На основу става ССС следи подударност $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$.



Слика 5



Слика 6

6. начин. Користићемо тачке B_2 и D_2 које су описане у трећем доказу. Нека је у равни $\triangle ABC$ уведен Декартов правоугли координатни систем тако да тачке C и A имају координате $C(0,0)$ и $A(1,0)$ (сл. 6). Нека тачка B има координате $B(x_1, y_1)$, а тачка $B_2(x_2, y_2)$. Тада тачке D и D_2 имају координате $D(\frac{1}{\lambda+1} + \frac{\lambda}{\lambda+1}x_1, \frac{\lambda}{\lambda+1}y_1)$ и $D_2(\frac{1}{\lambda+1} + \frac{\lambda}{\lambda+1}x_2, \frac{\lambda}{\lambda+1}y_2)$. Како је $BC = B_2C$, имамо да је и $BC^2 = B_2C^2$, тј.

$$x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2. \tag{7}$$

Из једнакости $CD^2 = CD_2^2$ имамо $(1 + \lambda x_1)^2 + \lambda^2 y_1^2 = (1 + \lambda x_2)^2 + \lambda^2 y_2^2$, тј. $2\lambda(x_1 - x_2) + \lambda^2(x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2) = 0$. Израз у другој загради последње једнакости једнак је нули на основу (7). па добијамо да је $\lambda(x_1 - x_2) = 0$, одакле следи да је

$$x_1 = x_2, \tag{8}$$

с обзиром да је $\lambda \neq 0$. Из (7) и (8) добијамо да важи

$$y_1^2 = y_2^2. \tag{9}$$

Једнакост $AB = AB_2$ еквивалентна је једнакости $(x_1 - 1)^2 + y_1^2 = (x_2 - 1)^2 + y_2^2$. Последња једнакост је тачна на основу (8) и (9). Следи да је $AB = AB_2 = A_1B_1$, па су троуглови ABC и $A_1B_1C_1$ подударни на основу става ССС.

7. начин. Означимо још $\measuredangle CAB = \alpha$, $\measuredangle ABC = \beta$, $\measuredangle BCA = \gamma$, $\measuredangle DCA = \varphi$, $\measuredangle BCD = \theta$, $\measuredangle B_1C_1A_1 = \gamma_1$, $\measuredangle D_1C_1A_1 = \varphi_1$ и $\measuredangle B_1C_1D_1 = \theta_1$. На основу синусне теореме примењене на троугао ADC је $\sin\varphi = \frac{AD}{CD}\sin\alpha = \frac{\lambda}{\lambda+1}\frac{c}{d}\sin\alpha$, док из синусне теореме примењене на троугао DBC добијамо $\sin\theta = \frac{DB}{CD}\sin\beta = \frac{1}{\lambda+1}\frac{c}{d}\sin\beta$, тј. па следи да је

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\theta} = \lambda \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \lambda \cdot \frac{a}{b},$$

с обзиром да је $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b}$ на основу синусне теореме примењене на $\triangle ABC$. Како је $\sin\gamma = \frac{c}{a}\sin\alpha$, то је

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\varphi} = \frac{\lambda+1}{\lambda} \cdot \frac{d}{a}.$$

Аналогно се добија да је $\frac{\sin\varphi_1}{\sin\theta_1} = \lambda \cdot \frac{a}{b}$ и $\frac{\sin\gamma_1}{\sin\varphi_1} = \frac{\lambda+1}{\lambda} \cdot \frac{d}{a}$, па је

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\theta} = \frac{\sin\varphi_1}{\sin\theta_1}, \quad \text{и} \quad \frac{\sin\gamma}{\sin\varphi} = \frac{\sin\gamma_1}{\sin\varphi_1}. \tag{10}$$

Докажимо да је $\gamma = \gamma_1$. Без умањења општости доказа претпоставимо да је $\gamma_1 < \gamma$. Из косинусне теореме примењене на троуглове $A_1B_1C_1$ и ABC добијамо да је

$$c_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma_1 < a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = c^2,$$

с обзиром да је функција cos строго опадајућа на интервалу $(0, \pi)$. Одавде је $c_1 < c$. Из косинусне теореме примењене на троуглове $A_1D_1C_1$ и ADC добијамо да је

$$\cos\varphi_1 = \frac{b^2 + d^2 - \frac{\lambda^2}{(\lambda+1)^2}c_1^2}{2bd} > \frac{b^2 + d^2 - \frac{\lambda^2}{(\lambda+1)^2}c^2}{2bd} = \cos\varphi.$$

Применом косинусне теореме на троуглове $B_1D_1C_1$ и BDC добијамо да је

$$\cos\theta_1 = \frac{a^2 + d^2 - \frac{c_1^2}{(\lambda+1)^2}}{2ad} > \frac{a^2 + d^2 - \frac{c^2}{(\lambda+1)^2}}{2ad} = \cos\theta.$$

Како је $\frac{\sin\gamma}{\sin\varphi} = \frac{\sin(\varphi+\theta)}{\sin\varphi} = \cos\theta + \frac{\sin\theta}{\sin\varphi}\cos\varphi$ и $\frac{\sin\gamma_1}{\sin\varphi_1} = \cos\theta_1 + \frac{\sin\theta_1}{\sin\varphi_1}\cos\varphi_1$, то је на основу (10)

$$\cos\theta - \cos\theta_1 = \frac{\sin\theta_1}{\sin\varphi_1}\cos\varphi_1 - \frac{\sin\theta}{\sin\varphi}\cos\varphi = \frac{\sin\theta}{\sin\varphi}(\cos\varphi_1 - \cos\varphi).$$

Како је $\cos\varphi_1 > \cos\varphi$, то је $\cos\theta_1 < \cos\theta$, што је немогуће обзиром да је $\cos\theta_1 > \cos\theta$. Добијамо да не може бити $\gamma_1 < \gamma$. Аналогно се доказује да не може бити ни $\gamma_1 > \gamma$. Следи да мора бити $\gamma_1 = \gamma$, па су троуглови ABC и $A_1B_1C_1$ подударни основу става СУС.

8. начин. Користићемо тачке B_2 и D_2 описане у трећем доказу. Није ограничење општости ако претпоставимо да се троуглови $\triangle ABC$ и $\triangle AB_2C$ налазе у истој равни коју ћемо посматрати као комплексну раван у којој је свакој тачки додељен комплексан број. Нека тачкама A, B, C, B_2 и D_2 одговарају редом комплексни бројеви a, b, c, b_2 и d_2. (Дакле ознаке a, b, c и d више не користимо за дужине.) Како је $d - a = \lambda(b - d)$, то је $d = \frac{1}{\lambda+1}a + \frac{\lambda}{\lambda+1}b$, и слично $d_2 = \frac{1}{\lambda+1}a + \frac{\lambda}{\lambda+1}b_2$. Како је $|b-c|^2 = (b-c)(\overline{b} - \overline{c}) = |b|^2 + |c|^2 - \overline{b}c - b\overline{c}$, то је $|b - c| = |b_2 - c|$, еквивалентно са

$$|b|^2 - |b_2|^2 = (\overline{b} - \overline{b_2})c + (b - b_2)\overline{c}. \tag{11}$$

Такође, једнакост $|d - c| = |d_2 - c|$ је еквивалентна са

$$|d|^2 - |d_2|^2 = (\overline{d} - \overline{d_2})c + (d - d_2)\overline{c}. \tag{12}$$

С друге стране је

(13)

$$
\begin{aligned}
|d|^2-|d_2|^2 &= \left|\frac{1}{\lambda+1}a+\frac{\lambda}{\lambda+1}b\right|^2-\left|\frac{1}{\lambda+1}a+\frac{\lambda}{\lambda+1}b_2\right|^2\\
&= \Big(\frac{1}{\lambda+1}a+\frac{\lambda}{\lambda+1}b\Big)\Big(\frac{1}{\lambda+1}\overline{a}+\frac{\lambda}{\lambda+1}\overline{b}\Big)\\
&\quad -\Big(\frac{1}{\lambda+1}a+\frac{\lambda}{\lambda+1}b_2\Big)\Big(\frac{1}{\lambda+1}\overline{a}+\frac{\lambda}{\lambda+1}\overline{b_2}\Big)\\
&= \frac{\lambda^2}{(\lambda+1)^2}(|b|^2-|b_2|^2)+\frac{\lambda}{(\lambda+1)^2}(a(\overline{b}-\overline{b_2})+\overline{a}(b-b_2)).
\end{aligned}
$$

док је

(14) $$(\overline{d}-\overline{d_2})c+(d-d_2)\overline{c}=\frac{\lambda}{\lambda+1}((\overline{b}-\overline{b_2})c+(b-b_2)\overline{c}).$$

Из релација (11)–(14) се добија да је

$$\frac{\lambda^2}{(\lambda+1)^2}(|b|^2-|b_2|^2)+\frac{\lambda}{(\lambda+1)^2}(a(\overline{b}-\overline{b_2})+\overline{a}(b-b_2))=\frac{\lambda}{\lambda+1}(|b|^2-|b_2|^2),$$

тј.

$$\frac{\lambda}{(\lambda+1)^2}(|b|^2-|b_2|^2)=\frac{\lambda}{(\lambda+1)^2}(a(\overline{b}-\overline{b_2})+\overline{a}(b-b_2)).$$

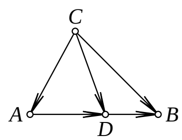
После скраћивање последње једнакости са $\frac{\lambda}{(\lambda+1)^2}$, добија се да важи $|b|^2-|b_2|^2=a(\overline{b}-\overline{b_2})+\overline{a}(b-b_2)$, што је еквивалентно са $|b-a|=|b_2-a|$. Следи да је $AB=AB_2=A_1B_1$, па су троуглови ABC и $A_1B_1C_1$ подударни на основу става ССС.

9. начин. Користићемо следеће ознаке $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{d}$, $\overrightarrow{C_1B_1}=\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{C_1A_1}=\overrightarrow{b_1}$ и $\overrightarrow{C_1D_1}=\overrightarrow{d_1}$ (сл. 7). Како је $\overrightarrow{AD}=\lambda\cdot\overrightarrow{DB}$, тј. $\overrightarrow{d}-\overrightarrow{a}=\lambda(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{d})$, то је $\overrightarrow{d}=\frac{1}{\lambda+1}\overrightarrow{a}+\frac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{b}$. Слично се добија да је $\overrightarrow{d_1}=\frac{1}{\lambda+1}\overrightarrow{a_1}+\frac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{b_1}$. Како је

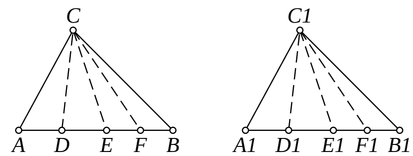
$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{d}|=|\overrightarrow{d_1}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{d}|^2=|\overrightarrow{d_1}|^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{d}\cdot\vec{d}=\overrightarrow{d_1}\cdot\vec{d_1}&\\
\Leftrightarrow (\frac{1}{\lambda+1}\overrightarrow{a}+\frac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{b})\cdot(\frac{1}{\lambda+1}\overrightarrow{a}+\frac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{b})&\\
=(\frac{1}{\lambda+1}\overrightarrow{a_1}+\frac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{b_1})\cdot(\frac{1}{\lambda+1}\overrightarrow{a_1}+\frac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{b_1})&\\
\Leftrightarrow \quad \frac{1}{(\lambda+1)^2}|\overrightarrow{a}|^2+\frac{\lambda^2}{(\lambda+1)^2}|\overrightarrow{b}|^2+\frac{2\lambda}{(\lambda+1)^2}\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}&\\
=\frac{1}{(\lambda+1)^2}|\overrightarrow{a_1}|^2+\frac{\lambda^2}{(\lambda+1)^2}|\overrightarrow{b_1}|^2+\frac{2\lambda}{(\lambda+1)^2}\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{b_1},&
\end{aligned}
$$

следи да је

(15) $$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{b_1},$$



Слика 7



Слика 8

с обзиром да је $|\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{a_1}|$ и $|\overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{b_1}|$. Из једнакости (15) следи да је $\cos\measuredangle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \cos\measuredangle(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{b_1})$, па је $\measuredangle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \measuredangle(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{b_1})$. Сада су троуглови ABC и $A_1B_1C_1$ подударни на основу става СУС. ■

Ако је D средиште дужи AB тада је $\frac{AD}{DB} = 1$, па користећи претходну теорему добијамо да важи

Последица 1. *Два троугла су међусобно подударна ако и само ако имају два пара једнаких страница и једнаке тежишне дужи које одговарају трећем пару страница.*

Ако је D тачка у којој бисектриса $\measuredangle BCA$ троугла ABC сече страницу AB, тада је на основу теореме о бисектриси угла троугла $\frac{AD}{DB} = \frac{CA}{BC}$, па добијамо да важи

Последица 2. *Два троугла су међусобно подударна ако и само ако имају два пара једнаких страница и једнаке одсечке бисектриса захваћених унутрашњих углова.*

Подсетимо се да симедијаном троугла називамо праву која је симетрична са тежишном дужи у односу на бискетрису унутрашњег угла, конструисану из истог темена троугла. Према једној од особина симедијане (водети нпр. [1]), ако је D тачка у којој симедијана троугла ABC из темена C сече страницу AB, тада је $\frac{AD}{DB} = \frac{CA^2}{BC^2}$, па добијамо да важи

Последица 3. *Два троугла су међусобно подударна ако и само ако имају два пара једнаких страница и једнаке симедијане које одговарају трећем пару страница.*

Ако је D подножје висине из темена C оштроуглог троугла ABC, тада је на основу Питагорине теореме $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{\sqrt{CA^2 - CD^2}}{\sqrt{BC^2 - CD^2}}$, па добијамо да важи

Последица 4 *Два оштроугла троугла су међусобно подударна ако и само ако имају два пара једнаких страница и једнаке висине које одговарају трећем пару страница.*

Последица 5. *Нека за троуглове ABC и $A_1B_1C_1$ постоје тачке D, E, F, D_1, E_1 и F_1 такве да је $A - D - E - F - B$, $A_1 - D_1 - E_1 - F_1 - B_1$, $\frac{AD}{DB} = \frac{A_1D_1}{D_1B_1}$,*

$\frac{AE}{EB} = \frac{A_1E_1}{E_1B_1}$, $\frac{AF}{FB} = \frac{A_1F_1}{F_1B_1}$, $CD = C_1D_1$, $CE = C_1E_1$ и $CF = C_1F_1$. Тада је $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$.

Dokaz. Нека је $\lambda_1 = \frac{AD}{DB}$, $\lambda_2 = \frac{AE}{EB}$ и $\lambda_3 = \frac{AF}{FB}$ (сл. 8). Тада је $DE = AE - AD = \frac{\lambda_2}{\lambda_2+1}AB - \frac{\lambda_1}{\lambda_1+1}AB = \frac{\lambda_2-\lambda_1}{(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)}AB$ и $EF = EB - FB = \frac{1}{\lambda_2+1}AB - \frac{1}{\lambda_3+1}AB = \frac{\lambda_3-\lambda_2}{(\lambda_2+1)(\lambda_3+1)}AB$, па је $\frac{DE}{EF} = \frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_3-\lambda_2} \cdot \frac{\lambda_3+1}{\lambda_1+1}$. Аналогно је $\frac{D_1E_1}{E_1F_1} = \frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_3-\lambda_2} \cdot \frac{\lambda_3+1}{\lambda_1+1}$. На основу Теореме 1 је $\triangle DFC \cong \triangle D_1E_1F_1$. Следи да је $DF = D_1F_1$, тј. $\frac{\lambda_3-\lambda_1}{(\lambda_3+1)(\lambda_1+1)}AB = \frac{\lambda_3-\lambda_1}{(\lambda_3+1)(\lambda_1+1)}A_1B_1$, дакле $AB = A_1B_1$. Из подударности такође следи да је $\measuredangle ADC = \measuredangle A_1D_1C_1$ и $\measuredangle BFC = \measuredangle B_1F_1C_1$, а како је $AD = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+1}AB = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+1}A_1B_1 = A_1D_1$ и $FB = \frac{1}{\lambda_3+1}AB = \frac{1}{\lambda_3+1}A_1B_1 = F_1B_1$, на основу става СУС следи да је $\triangle ADC \cong \triangle A_1D_1C_1$ и $\triangle BFC \cong \triangle B_1F_1C_1$. Добијамо да је $CA = C_1A_1$ и $BC = B_1C_1$, па су троуглови ABC и $A_1B_1C_1$ подударни на основу става ССС. ■

На крају није тешко доказати да важи и

Теорема 2. *Троуглови ABC и $A_1B_1C_1$ међусобно су слични ако и само ако важи:*

(*i*) $\frac{C_1A_1}{CA} = \frac{B_1C_1}{BC}$ *и*

(*ii*) *постоје тачке D и D_1 које припадају унутрашњости редом дужи AB и A_1B_1 и при томе важи $\frac{AD}{DB} = \frac{A_1D_1}{D_1B_1}$ и $\frac{C_1D_1}{CD} = \frac{B_1C_1}{BC}$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Д.С Јовић, *О симедијани троугла*, Настава математике **50**, 3 (2005), 21–24.

ОШ „Др Драган Херцог", Београд

E-mail: markocos10@hotmail.com