

Марија Лекић

НЕКИ NP-ПРОБЛЕМИ У ОБРАЗОВАЊУ

За алгоритам кажемо да је ефикасан ако је његова временска сложеност $O(P(n))$, гдје је $P(n)$ полином од величине проблема – n . Класа свих проблема који се могу ријешити ефикасним алгоритмом означава се са P (због полиномијалног времена). Временска сложеност полиномијалних алгоритама на које се наилази у пракси најчешће је полином малог степена. Међутим, немају сви проблеми елегантне ефикасне алгоритме који се могу „открити“ коришћењем малог скупа техника. Има их много за које се не зна ниједан алгоритам полиномијалне сложености. Препознати такве проблеме значило би не трошити вријеме на тражење непостојећег алгоритма. Класа проблема за које постоји недетерминистички алгоритам полиномијалне временске сложености зове се NP . Познато је да је P подскуп од NP . Једна поткласа проблема за које се не зна да ли су у класи P назива се класа тзв. NP -комплетних проблема. Ови проблеми се могу груписати у једну класу јер су они сви међусобно строго еквивалентни – ефикасан алгоритам за неки NP -комплетан проблем постоји ако и само ако за сваки NP -комплетан проблем постоји ефикасан алгоритам.

За проблем X кажемо да је NP -тежак ако је сваки проблем из класе NP полиномијално сводљив на X . Проблем X је NP -комплетан ако припада класи NP и ако је NP -тежак. Примјери NP -комплетних проблема су: покривање чворова графа, доминирајући скуп, 3SAT, 3-бојење, проблем клика, Хамилтонов циклус (контура), Хамилтонов пут, трговачки путник, независан скуп, проблем ранца, проблем паковања, цјелобројно линеарно програмирање ... [1], [20].

У раду ће бити дат преглед неких проблема у образовању за које се показало да, математички моделирани, припадају класи NP . Такође, препознати су још неки за које аутор предлаже да се могу користити при дизајнирању наставног програма и одабира стратегије учења и наставе, а припадају класи NP .

Проблем распореда

Проблем израде распореда представља једну врсту проблема распоређивања и састоји се од четири коначна скупа: термина, ресурса, активности и ограничења. Проблем се састоји од придруживања термина и ресурса активностима

тако да се задовољи што већи број ограничења. Конкретно у образовним и научним институцијама проблем се састоји од повезивања термина и наставних активности (предавања, испити, вјежбе, лабораторијске вјежбе) којима су повезани коначни ресурси (наставници, просторије, ученици или група ученика) на начин да се минимизује одступање од датих ограничења. Најчешћа подјела проблема распореда у образовним и научним институцијама је она према типу установе и типу ограничења: израда распореда разредне наставе (основна и средња школа), израда распореда на факултетима и израда распореда одржавања испита. Осим ове три класе, идентификовани су и проблеми дефинисања броја наставних група (на предавањима са већим бројем студената), распоређивање студената у наставне групе (на предметима који се предају у више група – осим избјегавања колизија тежи се што равномјернијој расподјели студената по наставним групама), придруживање наставника предмету, односно наставној групи (јавља се када један наставник може предавати више предмета па се у обзир узимају и његове жеље и равномјерна расподјела оптерећења), придруживање асистената испитима (како би надгледали њихово спровођење), придруживање просторије наставној активности (уз поштовање ограничења капацитета просторије и захтјева за њену опремљеност) [2].

Организовање курсева на универзитетима

Претварање образовних планова у наставну праксу односно додјеливање курсева одувijek је био тежак задатак за академске институције. Тим прије што функционише под мноштвом ограничења као што су наставничково професионално знање и преференције, захтјеви и очекивања студената везана за понуду курсева, политика школе око планирања наставног програма, доступност опреме, као и специфичности школског менаџмента. Како су промјене школске политике и стандарда честе, није лако генерисати решење које ће задовољити све ове факторе. Наиме, постаје изузетно тежак задатак направити овакву стратегију. Да би се проблем релаксирао, изузимају се захтјеви везани за наставну опрему и ресурсе и претпоставља се да су они у потпуности задовољени. Тако се проблем додјеливања курсева може посматрати као проблем додјеливања наставника и проблем распореда курсева [3].

Фактори који утичу на проблем додјеливање наставника су: понуда курсева, наставничкова професионална знања и преференције, најмањи број часова које школа захтијева (норма) и ограничење везано за прековремене часове. Додјеливање наставника је заправо проблем додјеливања (assignment problem) којим треба одредити који наставник ће предавати који предмет. Проблем укључује ограничена квалификације и преференција наставника, као и фер расподјеле прековременог рада. У вези са овим ограничењима, услови које треба задовољити су следећи: треба да буде задовољен минималан захтјев у настави за сваког наставника (наставници различитог ранга и годишта имају различите захтјеве), хонорарни часови за сваког наставника треба да уђу у разуман опсег (свака школа може подесити горње ограничење за прековремене часове у зависности од позиције или годишта наставника), треба да буду процијењене академске квалификације

и преференције сваког наставника, број прековремених часова треба да буде распоређен тако да се не прави разлика међу наставницима и један инструктор не би требало да буде одређен да предаје превише различитих курсева у циљу избегавања преотеретења. С обзиром на наведено, може се направити математички модел за решавање проблема и решавати се неком од познатих метода. У [3] су развијени генетски алгоритми за решавање овог проблема.

Проблем распореда испита

Проблем креирања распореда испита генерално може да се изрази као проблем теорије графова који је уско повезан са тзв. проблемом бојења. Сваки испит се може представити чвором графа. Грана између два чвора постоји ако постоји студент који полаже оба испита. Проблем се састоји у прављењу распореда за најмањи број термина предвиђених за испите тако да се два испита не могу одржавати истовремено ако постоји студент који полаже оба испита. Проблем је еквивалентан познатом NP-тешком проблему бојења чворова одговарајућег графа најмањим бројем боја: два чвора могу бити обојена истом бојом ако нису повезани граном, тј. два испита могу бити одржана у истом термину ако нема студената који полажу оба та испита [4].

Уопштени проблем бојења графа са ограничењима ширине опсега (VMCP – The Bandwidth Multicoloring Problem) састоји се у додељивању боја за сваки чвор на графу, тако да удаљеност између чворова графа буде мања или једнака од минималне удаљености. Сваком чвору мора бити додељен одређен број боја и свака боја мора поштовати минималну удаљеност између боја осталих чворова. У овом случају се такође мора обратити пажња на минималну удаљеност различитих боја додељених једном истом чвору. У образовању, овај проблем се користи приликом прављења распореда полагања испита на факултетима, распореда контролних и писмених задатака за мјесец дана, полугодиште или за цијелу школску годину, распоред коришћења видео бима, пројектора и другог школског прибора у школама (јер је количина поменуте опреме у школама у највећем броју случајева ограничена). Код прављења распореда испита сваки испит мора имати свој термин одржавања, при чему факултет жели да организује што више испита у исто вријеме тако да за сваки испит буде слободних учионица, а све у циљу смањења броја термина у којима ће се одржавати испити. Будући да студенти могу полагати више од једног испита у испитном року, распоред мора бити такав да они буду у могућности да изађу на сваки испит који су слушали, дакле два испита не могу имати исти термин полагања, ако је постојао бар један студент који је слушао оба испита. Сваком чвору i се додељује боја h , ако је испит i заказан у термину h , при чему су два чвора сусједна ако одговарајући испити не могу бити распоређени у исто вријеме (јер постоји бар један студент који је слушао оба испита). Сваки термин има максимални капацитет који одговара броју слободних учионица. Проблем прављења распореда контролних и писмених задатака за мјесец дана, полугодиште или за цијелу школску годину је VMCP. чворови представљају предмете, гране су минимална растојања између контролних или писмених из различитих предмета у одређеном временском пе-

риоду, док боје представљају датуме (тј. дане) одређене за контролне и писмене задатке. Води се рачуна да ученици немају два или више писмених задатака у истој недељи и два или више контролна задатка у току дана из различитих предмета. Такође се води рачуна о размаку писмених и контролних задатака из једног истог предмета. За овај проблем је доказано да је NP-тежак у општем случају, мада могу постојати одређени специјални случајеви када је проблем полиномске сложености. То је случај када граф бојимо само са двије боје [5].

Подјела студената у групе

Многи колеџи и универзитети захтијевају да студент одбрани завршни испит. Да би се ово реализовало, сваки студент мора да припада једној и само једној катедри (лабораторији). Зато је неопходно студенте подијелити према катедрама. Студент жели да буде додијељен оној катедри коју преферира. С друге стране, свака катедра жели да прихвати само студенте који одговарају њеној специјалности. Сваки студент предаје листу својих преференци које се тичу избора катедре, а свака катедра процјењује склоности студената који јој највише одговарају и, у складу с тим, одређује њихове рангове. Ово се узима у разматрање приликом груписања. Додатно ограничење је што сваки студент треба да буде додијељен једној и само једној катедри. Тавише, број студената додијељених једној катедри ограничен је њеним капацитетом. Капацитети варирају од катедре до катедре. Циљ катедре треба да буде задовољен након задовољења циља студента. Јако је тешко добити разумно груписање (решење) које одговара захтјевима и студената и катедри, посебно када има много и студената и катедри. Нумерички резултати случајно генерисаних проблема показују да вријеме израчунавања расте скоро линеарно са порастом броја студената и катедри. У [6] се овај проблем решава као транспортни, примјеном MODI методе и њене модификације.

Класификација стилова учења код е-учења

Бројна истраживања су учињена у циљу повећања квалитета наставе у окружењима за е-учење. Истраживачи су идентификовали адаптивно (прилагођено) учење као критичан захтјев за промовисање перформанси учења. Адаптивно учење обезбјеђује адаптивне материјале за учење, стратегије учења и курсеве прилагођене студентовом стилу учења. Стил учења је индикатор како студент учи или воли да учи и како инструктор предаје како би се успјешно изашло у сусрет потребама индивидуалних студената. Први корак за реализацију адаптивних окружења за учење је да се идентификују стилови учења студената. Предложено је неколико модела за дефинисање и мјерење стилова учења, а бројна су истраживања на тему обезбјеђивања механизма за детектовање и идентификацију стилова учења. Ови механизми треба да буду засновани на великом узорку студената. Процес прикупљања овог узорка захтијева много времена и обрада је компликована. Сваки стил учења укључује различите особине понашања које се могу прикупити и анализирати из понашања студената приликом учења. Неки модели идентификују нпр. конвергентне, дивергентне, асимилаторе и прилагођене стилове учења, док се у другим разликује чак 32 стила учења. У [7] је дат

механизам за класификацију стилова учења, а затим за њихову идентификацију. Како се наводи у раду, једна од најпопуларнијих техника је тзв. класификација k -најближег сусједа (k -nearest neighbour – k -NN).

У k -NN класификацији узорак се представља као тачка у n -димензионом простору. Ако два слична узорка припадају истој класи њихово растојање је краће од растојања од осталих узорака који припадају некој другој класи. На основу овога се врши одабир припадности класи. Увиђањем варијабли везаних за овај проблем, прављењем математичког модела и примјеном k -NN класификације, идентификоване су слабости овог начина решавања проблема, као што су комплексност израчунавања приликом разматрања великог броја особина понашања приликом учења и утрошак времена када постоји велики број узорака. Да би се наведене слабости превазишле, у раду је представљен генетски алгоритам за издвајање особина понашања приликом учења. Добијени експериментални резултати говоре да је предложени механизам класификације ефикасно класификовао и идентификовао стилове учења студената.

Проблем додјеливања асистената у настави

Флананско Министарство образовања обезбјеђује специјалну подршку дјечи са посебним потребама. У актуелном систему оваква дјеца примају амбулантну помоћ од асистената у настави. Сваки ученик који прима помоћ додијељен је асистенту у настави који га посјећује у његовој школи, једном или два пута мјесечно. Сваког јутра асистент у настави одлази из своје куће и путује од школе до школе да би посјетио ученике који су му додијељени тога дана. На крају радног дана враћа се својој кући. На почетку школске године сваки асистент у настави добија списак у ком, за сваки дан у недељи, пише којим ученицима помаже и по ком редоследу. Асистенти у настави возе сопствени ауто и добијају финансијску компензацију по пређеном километру. Компензација је главни финансијски фактор за институцију која обезбјеђује помоћ. Из тог разлога менаџменту је потребан распоред који минимизује укупно растојање које сви асистенти у настави треба да пређу.

Израда распореда обухвата три услова које треба задовољити истовремено: ученици морају бити додијељени асистенту у настави, ученици додијељени датом асистенту у настави треба да буду расподијељени дуж његових различитих радних дана и треба да буде одређен редослед по ком ће асистенти у настави посјећивати ученике сваког дана. Овај оптимизациони проблем зове се проблем додјеливања (рутирања) асистената у настави [8].

При решавању овог проблема треба узети у обзир још неколико ограничења:

- да ли ће неки асистент у настави помагати одређеном ученику зависи од степена његовог образовања, од врсте ученикових потреба и од врсте школе коју ученик похађа (медицинска, основна, средња школа),
- број недељних радних сати асистента у настави је различит из разлога што неки раде само повремено, као и због законских одредби које одређују да број сати асистената у настави који имају пуно радно вријеме зависи од

врсте његове дипломе. то већи степен дипломе има, асистент у настави мање ради током недеље,

- ученици којима је помоћ потребна примају је два пута недјељно и то у два различита дана који нису узастопни.

Додатно, потребно је удовољити специфичним захтјевима самих асистената у настави (доступност, преференције), а њихов број зависи од менаџмента института.

У [8] је дата нова метахеуристика за решавање проблема која се састоји од двије фазе: хеуристика за проналажење иницијалног могућег решења за којом слиједи фаза побољшавања метахеуристичком промјенљивих околина. Проблем је представљен графовском структуром гдје чворови одговарају кућама асистената у настави или школама које ученици похађају, док гране представљају путеве који спајају сваки пар чворова. Проблем је формулисан преко проблема линеарног цјелобројног програмирања, а ријешен хеуристички, комбиновањем тзв. аукцијског алгоритма и методе променљивих околина.

Проблем састављања оптималних персонализованих е-курсева

Брз развој Интернета условио је широку употребу апликација за е-учење. Студенти имају могућност стицања новог знања без обзира на вријеме, мјесто и остала ограничења. Иако многи системи за е-учење обезбјеђују обиље наставног материјала, многи системи не могу обезбиједити адаптивне материјале који одговарају студентовим способностима. Заправо, обезбиједити адаптивно окружење за е-учење представља важан посао за инструкторе. Персонализовано адаптивно учење има за циљ да обезбиједи материјал за учење који одговара потребама индивидуалних ученика. Велики је број интелигентних туторских система који се базирају на карактеристикама и разликама у циљу обезбјеђивања одговарајућег материјала и стратегија учења.

Међутим, састављање оптималног персонализованог е-курса из великих база података је ограничено у смислу израчунљивости, тачније, представља NP-тежак проблем. Предложени су многи алгоритми за његово решавање, од којих се неки базирају на PSO (Particle Swarm Optimization), генетским алгоритмима (за идентификацију путева учења), комбинацији k -најближег сусједа и генетског алгоритма и сл. Даље, проблем састављања тестова је проблем комбинаторне оптимизације за који такође не постоји алгоритам полиномијалне временске сложености који проналази оптимално решење. За комбинације тестова су коришћени еволутивни алгоритми засновани на PSO у циљу одабира одговарајућих питања за сваког ученика из банке широког опсега узорака који задовољавају вишеструке услове.

Услови који треба да буду задовољени приликом састављања е-курсева су:

- тежина материјала за е-учење,
- концепти учења материјала за е-учење,
- вријеме потребно за ишчитавање материјала за е-учење,
- очекивано вријеме за читање и

- ниво способности ученика.

Проблем постаје сложенији када се повећава број материјала за е-учење јер се повећава сложеност израчунавања, као и када је у систему велики број студената. Након математичке формулације, у [9] је дат генетски алгоритам за решавање поменутог проблема који користи концепт тзв. легалног форсирања популације, назван GA*.

Уређење наставних програма у персонализованом систему за е-учење

Едукативни материјал у форми хипермедије мотивише ученике да истражују алтернативне путеве у различитим изворима знања. Оваква знања обично су презентована на сличан начин, без обзира на хетерогене циљеве, искуство, претходно знање, узраст, професију и мотивацију ученика. Секвенцирање наставног програма је веома добро развијена технологија на пољу интелигентних туторских система (ITS). Идеја је у генерисању индивидуализираног курса за сваког студента динамичким одабиром оптималне наставне операције (презентације, примјер, питање, проблем) у датом моменту. Под оптималном наставном операцијом подразумијева се она која међу свим допустивим операцијама доводи ученика најближе крајњем циљу учења. У већини случајева циљ је научити захтијевани скуп знања до одређеног нивоа у најкраћем времену. Други циљ учења може, на примјер, бити минимизовање учесталости грешака у решавању проблема.

Већина постојећих ITS може секвенцирати само једну врсту наставних операција. Неки од њих могу да манипулишу редоследом проблема или питања или само лекцијама. Они најнапреднији могу да секвенцирају неколико врста наставних операција, као што су презентације, примјери, праћења. Секвенцирање је тренутно најпопуларнија технологија у Web-базираним ITS. Приступ предложен у [10] базира се на пред-тесту у циљу сакупљања нетачних концепата учења ученика кроз компјутеризовани адаптивни тест. Након тога, користе се генетски алгоритам и резонавање засновано на случају (case based reasoning) да би се конструисао близу-оптимални пут учења на основу ових некоректних узорака добијених на пред-тесту. Систем функционише тако што се студентима, након учења прве лекције, израчунавају успјех, поени и анализира се њихова ситуација. Ако не успију да достигну одређени ниво, систем препоручује персонализовано секвенцирање наставног програма које се базира на генетском алгоритму. Тако студенти могу да уче исте концепте путем различитих секвенци наставног програма и материјала у корективним активностима. Затим се приступа поновној процјени успјеха које покрива исту тему, али не садржи иста питања, што осигурава да се неће учити напамет. Овакво секвенцирање се памти у циљу збирног процјењивања након неколико лекција. Циљ је генерисати одговарајући програм базиран на захтјевима индивидуалног ученика и помоћи им да уче што ефикасније. Персонализовани пут учења се креира помоћу генетског алгоритма, при чему функција циља говори о квалитету генерисаног пута учења. Пут учења се добија генетским алгоритмом на основу наставних програма за које ученик добије негативне пред-тест резултате.

Организација наставних програма

У [11] су развијене технике за начине повезивања лекција, као и за одређивање њихових тежина, заснованих на објективним показатељима и субјективним процјенама професора. Тиме је постигнуто да се читав курс представи као повезан тежински граф, чиме се проблем подјеле лекција унутар курса моделира и решава математички. Ако се лекције придруже одговарајућим тематским цјелинама у оквиру једног курса, креира се фамилија подскупова читавог скупа лекција. Ако је потребно лекције разбити у два дисјунктна подскупа тако да у оба та подскупа буде покривено што више тематских цјелина, тада се наведени проблем своди на решавање проблема максималне подјеле скупа.

Показало се да подјела лекција једног курса на два дијела тако да тежина тих дјелова буде колико је год могуће више уједначена, заједно са захтјевом да се дефинише повезаност лекција, може да се моделира математички. Проблем који му је еквивалентан познат је као проблем проналажења максималне повезане партиције у графу. Подјела лекција на два дијела при чему се користи груписање лекција у тематске цјелине тако да што више тематских цјелина буде присутно у оба дијела, своди се на проблем проналажења подјеле скупа на двије партиције [11].

У [12] је, као стратегија учења, коришћена тзв. метода концептуалних графова у циљу подјеле активности за учење у неколико фаза. Структуру концептуалног графа креира наставник прије почетка курса. Архитектура графа слиједи план курса, укључујући садржај и редослед. Због поједностављења, наставници могу читав курс подијелити на индивидуалне јединице, које могу бити поглавља, секције или теме. Овакав граф је усмјерен са особином да сваки чвор представља концепт у одређеном наставном програму и садржи везу између концепата. Приликом креирања, наставници морају да узму у обзир редослед лекција тако да их на тај начин морају изучавати и ученици.

Дизајн наставних програма и одабир оптималне стратегије наставе и учења

Имајући у виду претходна три проблема, као и начин повезивања лекција, није тешко препознати још неке из класе NP при креирању наставних програма и одабиру оптималне стратегије наставе и учења.

Наиме, још увијек је актуелан проблем дизајна наставног програма [13], који се сматра тешким и изазовним, а којим би се на најбољи начин уредило учење градива по годиштима и направио план остваривања оптималног учења. Питање је шта треба да буде садржај наставног програма и како да се одабере и организује његова суштина. Овом приликом мора се узети у обзир и континуитет у достизању специфичних компетенција који мора бити осигуран цијелим путем школске путање, а не само циклусом. Ово из разлога што је примјећено да за велики број ученика који су похађали средњу школу прављење веза између претходног и наступајућег знања није компоненета њихове стратегије учења [14].

Познато је да је тзв. програмирана настава подигла просјек успјешности својим особинама по којима се градиво дијели на мале, логично распоређене и пове-

зане дионице које ученици самостално савлађују једну по једну, утврђеним редом, по унапријед добијеном упутству у ком је објашњен начин рјешавања и по ком се не може прелазити на следећу дионицу ако није потпуно савладана претходна [15].

Занимљиве теме које се тичу наставног програма су још и стратегије његове израде, управљање наставним програмом као и проналажење језгара, тј. основних, темељних знања. У Сингапуру [16], приликом реформисања наставних програма, задржане су теме које су идентификоване као језгро садржаја, а оне које су мање фундаменталне и нису повезане са осталим темама и које су се преклапале са оним које се уче на другим нивоима су уклоњене. Један од главних PISA 2003 резултата је да најмање 25% петнаестогодишњака који су тестирани није достигло ниво за који су експерти наставног програма вјеровали да је неопходан за успјешан завршетак ниже средње школе. Као један од неопходних корака за превазилажење проблема, препоручено је да је потребно дефинисати језгро (кључне) компетенције које су обавезне за све студенте. Ово захтијева да наставни програм заиста разрађује језгро које је централно у свим типовима школа. Проблем методологије његове израде постао је средишња тема научних истраживања дидактичара, посебно ако се разматра наставни програм из математике јер се зна да је учење математике секвенцијално и хијерархијски по природи. Према [17], најважнија особина наставног програма је кохерентност (повезаност, доследност). На тај начин студенти разумију како су математичке идеје међусобно повезане и граде се једна на другој да би произвеле кохерентну цјелину. Дакле, истовремено се ставља фокус на математички садржај и на математички процес. Наведено је и да је значајан фактор повезан са лошим перформансама студената у САД на TIMSS и PISA тестирању управо природа наставног програма у смислу дефинисања и покривања садржаја.

Познато је, такође [18], да ефикасност онлине учења може да варира према томе како је онлине курс дизајниран и како се врши настава. Интересантно је испитати да ли постоје особине онлине дизајна курса које значајно утичу на перформансе студената на курсу, које праксе и технике су типичне за високо квалитетне наспрот ниско квалитетним онлине курсевима, како организовати и презентовати курс? Показало се да су кључни елементи квалитета курса, између осталог, проширење до ког је курс добро организован и лак за навигацију, као и да је витално за успјех студената да им се дају инструкције у смислу гдје да иду и шта следеће да раде. У том смислу, потребно је пружити могућност и ученицима, али и одраслим полазницима курса, да изаберу свој пут учења.

Приликом истраживања да ли путеви учења имају утицај на излазне резултате учења када ученици уче уз коришћење конвенционалних инструкција и када користе унапријед дефинисане путеве учења [19], потврђено је да су супериорнији били они који су учили по принципу путева учења. Путеви учења описани су као „LMS (learning management system) функционалност да поређа број објеката на такав начин тако да се добију мапе за ученике“. Кораци учења су структурирани на општи начин – као навигациона мапа или садржај код ког су објекти учења најважнији градивни блокови. Путеви учења могу бити креирати помоћу ауторских алата или их могу испрограмирати они који развијају софтвер. Оптимизација

путева учења показала се корисном јер студенти који су користили овакве путеве, посебно када су радили сами, су престигли студенте који су учили у другим условима.

Идеја рада је да се неки поменути проблеми моделирају одговарајућим познатим који припадају класи NP. Да би смо их лакше уочили, користићемо могућност представљања наставног материјала помоћу графа у ком би чвор била сама лекција, а грана између два чвора би постојала ако су лекције међусобно повезане по одређеним критеријумима (условљеност, уопштење и сл).

Размотримо следеће, у литератури [1], [4], [21] познате, NP-комплетне проблеме и могућност њихове примјене у настави и учењу.

- a) Скуп чворова графа G такав да никоја два чвора нису сусједна тј. никоја два чвора нису повезана граном назива се скуп независних чворова. *Максималан независан скуп* је онај за који не постоји други независан који га садржи.

Тематске цјелине на графу наставног програма које припадају овом скупу могле би да се искористи за идентификацију кључних (језгро) тема.

- b) Скуп доминантних чворова је подскуп S чворова графа G изабран тако да за сваки чвор x_j који није у S постоји грана из чвора у S до x_j . Доминантан скуп је минималан ако не постоји други доминантан који се у њему садржи.

Тематске цјелине на графу наставног програма које припадају овом скупу могле би се искористити за сажимање наставних програма само на ове лекције, јер оне покривају остале. Обрадом само ових лекција могло би се постигнути растерећење наставног програма и ученика, без губитка суштине. Такође, из ових области могу се бирати задаци за тестирање као области које се морају знати.

- c) *Хамилтонов пут* у графу је прости пут који садржи сваки чвор графа G тачно једном. Проблем је установити да ли у G постоји Хамилтонов пут.

Хамилтонов пут (ако постоји) на графу наставног програма може да представља препоручени, оптимални, пут учења. На овај начин може се утврдити редослед изучавања лекција ради очувања континуитета кроз које се мора проћи и не може се ићи на следећу ако се не савлада тренутна. Препорука стратегије за учење може бити учење овом путањом. Уколико такав пут не постоји, може се узети као парцијалан.

Узмимо за примјер материју из тригонометрије дату следећим цјелинама и редоследом, онако како је предвиђено наставним програмом:

- A. Дефиниција основних тригонометријских функција оштрог угла правоуглог троугла
- B. Неке вриједности тригонометријских функција оштрих углова
- C. Основни тригонометријски идентитети
- D. Мјерење углова радијанима
- E. Примјена тригонометријских функција у планиметрији
- F. Дефиниција тригонометријских функција произвољно задатог угла
- G. Свођење тригонометријских функција на вриједност функције оштрог угла

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
A		1	1		1	1				1							
B				1	1	1	1				1						
C					1	1											
D					1	1	1	1									
E									1								
F							1		1	1							
G								1	1	1							
H									1	1				1			
I																	1
J											1	1	1	1			
K												1		1			
L														1			
M														1			
N															1		
O																1	
P																	
Q																	

Уколико покушамо да нађемо Хамилтонов пут и дођемо у ситуацију да он не постоји, можемо се ограничити на парцијалне путеве. На овом графу, једно могуће решење изгледа овако:

I. $A - B - D - F - G - H - J - M - N - O - P$

II. $K - L$

III. $C - E - I - Q$

Добијени путеви могу се узети као предлог редоследа изучавања лекција с тим што се прво мора изучити пут I, а затим II па III.

Решења добијена у примјеру само су илустрација предложеног приступа и идеје. За графове са више чворова, уз одговарајућу математичку формулацију, за добијање решења могуће је креирати одговарајући програм. Генерално гледано, може се направити граф уопштења тематских цјелина (нпр. тригонометрија, полиноми, функције итд) чиме се добија смањење броја чворова, па се на њему разматрати исти проблеми како би се нпр. добиле кључне и доминантне области или путеви учења.

Иако је начин повезивања лекција субјективан, уобличавање наставног програма на овај начин добија на флексибилности и може се примењивати према тренутним потребама образовног система.

Знајући да програм математике посједује завидан степен кохерентности кроз разреде [22], наведена идеја се може искористити управо на овом примјеру, али се може употријебити и за остале предмете, као и на избор предмета за обраду уопште.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Живковић, *Алгоритми*, Универзитет у Београду, Математички факултет, 1999.
2. D. Pukljak Zoković, *Problem izrade sveučilišne satnice predavanja*, Fakultet elektrotehnike i računarstva, Sveučilište u Zagrebu, preuzeto 16.12.2016. sa https://www.fer.unizg.hr/_download/repository/KDI_Dubravka_Pukljak_Zokovic.pdf

3. Yen-Zen Wang, *An application of genetic algorithm methods for teacher assignment problems*, Expert Systems Appl. **22** (2002), 295–302.
4. N. Christofides, *Graph theory, An algorithmic approach*, Academic press, New York, London, San Francisco, 1975.
5. Ј. Фијуљанин, *Генетски алгоритам за решавање уопштеног проблема бојења графа са ограничењима ширине опсега и његова примена у настави*, дипломски-мастер рад, Универзитет у Београду, Математички факултет, Београд, 2010.
6. I. Miyaji, K. Ohno, H. Mine, *Solution method for partitioning students into groups*, European J. Operat. Res. **33** (1987), 82–90.
7. Yi-Chun Chang, Wen-Yan Kao, Chih-Ping Chu, Chiung-Hui Chiu, *A learning style classification mechanism for e-learning*, Comput. Edu. **53** (2009), 273–285.
8. P. Maya, K. Sörensen, P. Goos, *A metaheuristic for a teaching assistant assignment problem – routing problem*, Comput. Operat. Res. **39** (2012), 249–258.
9. Ting-Yi Chan Ng, Yan-Ru Ke, *A personalized e-course composition based on a genetic algorithm with forcing legality in an adaptive learning system*, J. Network Comput. Appl. **36** (2013), 533–542.
10. Mu-Jung Huang, Hwa-Shan Huang, Mu-Yen Chen, *Constructing a personalized e-learning system based on genetic algorithm and case-based reasoning approach*, Expert Systems Appl., 2006, Article in press.
11. Д. Магић, *Рјешавање неких проблема у настави примјеном метода комбинаторне оптимизације*, докторска дисертација, Универзитет у Београду, Математички факултет, 2013.
12. Teyi Chan, Chien-Ming Chen, Yu-Lung Wuc, Bin-Shyan Jong, Yen-Teh Hsia, Tsong-Wuu Lin, *Applying the genetic encoded conceptual graph to grouping learning*, Expert Systems Appl. **37** (2010) 4103–4118.
13. R. J. Parkes, *Challenges for curriculum leadership in contemporary teacher education*, Austral. J. Teacher Edu. **38**, 7, Article 8, 2013.
14. V. N. Nicolescu, T. C. Petrescu, *On the continuity mathematics curriculum between primary and secondary school*, Procedia - Social and Behavioral Sciences 180 (2015) 871–877, The 6th International Conference Edu World 2014 “Education Facing Contemporary World Issues”, 7th-9th November 2014.
15. М. Вилотијевић, Н. Вилотијевић, *Програмирана настава*.
16. V. Kaur, *Mathematics education in Singapore – An insider’s perspective*, IndoMS-JME, **5**, 1 (2014), 1–16.
17. W.H. Schmidt, R. T. Houang, *Curricular coherence and the common core state standards for mathematics*, Educ. Res., **41**, 8 (2012), 294–308.
18. Sh. Smith Jaggars, Di Xu, *How do online course design features influence student performance?*, Comput. Edu. **95** (2016) 270–284.
19. C. De Smet, B. De Wever, T. Schellens, M. Valcke, *Differential impact of learning path based versus conventional instruction in science education*, Comput. Edu. **99** (2016) 53–67.
20. М. Вујошевић, *Методе оптимизације у инжењерском менаџменту*, Факултет организационих наука, Београд, 2012.
21. M. R. Garey, D. S. Johnson, *Computers and Intractability. A Guide to the Theory of NP-Completeness*, W. H. Freeman and co., New York.
22. N. J. Gehrke, M. S. Knapp, K. A. Sirotnik, *In search of the school curriculum*, Rev. Res. Edu., **18** (1992), 51–110.

М. Зечевића 12/10, Беране, Црна Гора

E-mail: pd132006@alas.matf.bg.ac.rs