НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ
LXII, 1 (2017), 9–21

Б. Варга Јожеф

ГРЕШКЕ У РЕШАВАЊУ МАТЕМАТИЧКИХ ЗАДАТАКА

Errare humanum est (Људски је грешити)
Латинска изрека

Циљ проучавања грешака је да се смање грешке у решавању математичких задатака, као и грешке уопште. У овом раду тражи се одговор на питања:

- Каква грешка је начињена?
- Због чега је дошло до те грешке?
- Како убудуће смањити број таквих грешака или их сасвим елиминисати?

Примери из историје

Пример 1. Египћани су рачунали површину четвороугла на следећи начин: половину збира две наспрамне странице множили су половином збира друге две странице. Формула је, наравно, погрешна – тачна је само за правоугаоник. Но, да ли су Египћани имали бољу формулу? [1]

Пример 2. У Кини је за време династије Хан било наложено коришћење јединственог мерног система. Овај посао радио је астроном Лиу Ксин око почетка нове ере. Тако се десило (у историји први пут) да је вредност броја π била законом одређена, и то као $\pi = 3{,}1547$. То је мало више од π, но у то време то није било битно. [2]

Пример 3. Еуклидов пети постулат дуго је био тема истраживача. Написано је пуно доказа, код којих се касније испоставило да су на неки начин коришћена тврђења, која су еквивалентна овом постулату, и која се не могу извести из осталих Еуклидових постулата и аксиома. Тачка на серију „доказа“ Еуклидовог петог постулата стављена је настанком хиперболичке геометрије. [3]

Пример 4. De Havilland DH 106 Comet био је први млазни авион серијске производње. Његов пробни лет био је 27. јула 1949. године. Редовно коришћење почело је 1952. године, да би се након годину дана десиле серијске несреће. Детаљна анализа олупина показала је да је у ћошковима правоугаоних прозора замор материјала много већи од очекиваног, јер је напетост била три пута већа од онога што је израчунато. Од тада се прозори авиона праве углавном овалног облика. [4]

Пример 5. The Tacoma Narrows Bridge се налази на путу број 16, у држави Вашингтон. Мост се срушио 7. новембра 1940. године, само 4 месеца након примопредаје, услед резонанције коју је изазвала олуја. Детаљније о томе, као и филмски снимак несреће видети на [5].

Више о наведеним грешкама и њиховим последицама писано је у чланку [6]. У њему су обрађене и грешке у постављању првих авионских писти на носачима авиона, случај ноћног клуба Coconut Grove, једна грешка у несрећи Титаника, проблем нула при прелазу у 2000. годину на рачунарима.

Интересантан је и следећи историјски „контрапример“.

Пример 6. Претпоставка математичког знања потрошача скупо је коштала амерички A&W–ланац брзе хране. Осамдесетих година прошлог века покушали су да новим „бургером“ конкуришу McDonald's-у, где је најбоље продавани производ у то време био "Quarter Pounder" (четвртфунтни) бургер. Тај бургер био је $1/4\,\mathrm{lbm} = 453,59237\,\mathrm{g}/4 \approx 115\,\mathrm{g}$. A&W је избацио на тржиште бургер масе $1/3\,\mathrm{lbm} \approx 151\,\mathrm{g}$, којег су назвали "Third Pounder" (трећинафунтни). Овај бургер је био укуснији, већи, јефтинији од McDonald's-овог Quarter Pounder-а, добро рекламиран, али ипак се није могао продати. Зашто?

Кад су, не жалећи новац, хтели да сазнају разлог неуспеха, испоставило се да су све добро испланирали и тестирали – изузев имена, у шта су били сувише сигурни. Како у имену њиховог хамбургера фигурира тројка, а у McDonald's-овом четворка, потрошачи, потенцијани купци овог производа су помислили да је McDonald's-ов бургер већи! А зашто да плаћају скоро исто за мањи производ?! [7, 8, 9]

Пример 7. Годину 1993. памтимо по хиперинфлацији у Југославији. Пре тога је било исплативо узети динарски кредит, но не и после, а девизни ни пре ни после. Али је доста људи то ипак чинило. Камате на те кредите (углавном су узимани од зеленаша!) биле су велике.

Мој бивши колега узео је кредит од 4000 марака. Са каматама је то износило око 8000. Део је успео да врати, али је посао у који је уложио каснио са финансијским резултатом. На крају је за отплату морао продати стан вредан 20000 марака по знатно нижој цени, да би отплатио дуг. Није требало прецизно израчунати колико ће новца требати за отплату дуга. Требало је само грубо проценити. Или неког замолити да процени.

Ово је само један из низа сличних случајева.

Класификација појављивања грешака

Грешке, прецизније појављивање грешака, можемо класификовати по више принципа, односно особина. Две од тих особина показују временску димензију. Наиме, порекло грешке показује на прошлост у односу на време прављења грешке, а значај грешке је последица, тј. може се оценити тек после, након што се грешка појавила.

Неке од могућности су следеће.

Класификација по значају

- Битне
- Мање битне
- Дискутабилне

Класификација по врсти грешака

- Суштинске (садржајне)
    - Грешке у логичком расуђивању
        - Погрешна логичка форма
            - Коришћење тврђења које заправо треба доказати
            - Коришћење још недоказаног (додуше тачног) тврђења као премисе
            - Коришћење нетачног тврђења као премисе
        - Коришћење погрешне или неодговарајуће формуле, односно исказа
            - Коришћење формуле/исказа која је иначе исправна, али није одговарајућа за то решење
            - Коришћење нетачне формуле/исказа
    - Грешке у операцијама
        - Грешке у коришћењу таблица операција
        - Грешке у алгоритмима операција
    - Коришћење нетачних података
    - Непрецизност
- Формалне (синтаксне)

Класификација по пореклу грешака

- Незнање
    - Непознавање теорије
    - Неувежбаност
- Непажња
- Немогућност акцептирања

Класификација по приметљивости

- Евидентне
- Лако приметљиве
- Теже приметљиве
- Скривене

Уместо самих грешака, класификује се појављивање грешке: наиме, иста грешка у различитим ситуацијама може се сврстати у разне класе.

На пример, грешка $6 \times 9 = 48$, може бити последица тога:

- да неко не зна таблицу множења;
- да неко у 20% случајева уместо $6 \times 9 = 54$ рачуна $6 \times 9 = 48$;
- да је неко због одвлачења пажње случајно погрешио;
- да неко 6×9 није прочитао исправно, већ је прочитао као 6×8.

Ово су уједно примери класификације по пореклу грешака.

И по осталим аспектима могу се наћи примери грешака који у различитим ситуацијама улазе у различите класе.

Класификација по значају

- Грешка је битна ако има негативне последице (на пример, сруши се зграда или мост, предузеће или појединац има значајне финансијске губитке, један бод мање на тесту, на писменом задатку или на испиту и слично)
- Грешка је мање битна ако нема негативних последица
- Грешка је дискутабилна, ако је неки сматрају грешком, а неки не. Ненавођење мерних јединица у неким случајевима може бити битна грешка, али у ученичким радовима је то скоро увек грешка од веома малог значаја, тј. дискутабилна.

Постоје два показатеља који могу бити мере величине грешака по овој класификацији. Први се може сматрати континуалним, а то је финансијска штета проузрокована том грешком, приказана у некој адекватној мерној јединици. Други показатељ се јавља само код битних (и то код значајно битних!) грешака, а то је број људских жртава. Претпостављам да читаоцима не представља проблем да упореде и класификују горње примере по овим показатељима.

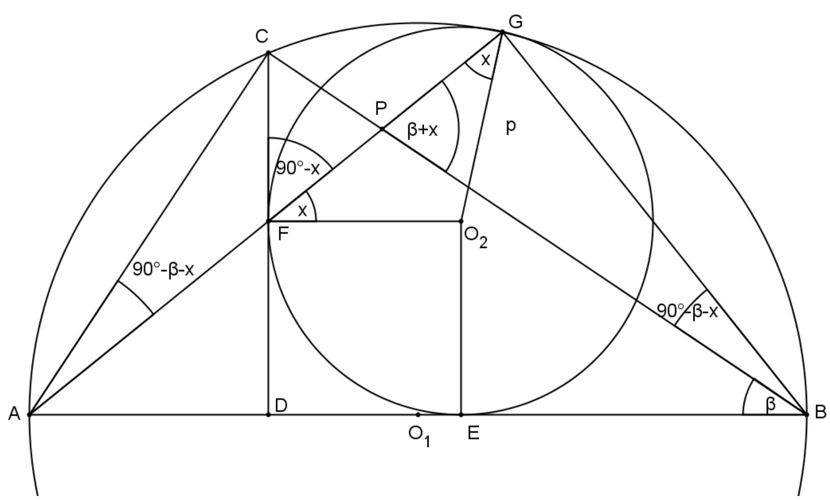
Класификација по врсти грешака

Коришћење тврђења које заправо треба доказати

Пример 8 (Српска математичка олимпијада ученика основних школа, 2016).

Први део 1. задатка је гласио: Дат је троугао ABC са правим углом код темена C. Нека је D подножје висине троугла из темена C, а k кружница која додирује дуж BD у тачки E, дуж CD у тачки F и описану кружницу троугла ABC у тачки G. Доказати да су тачке A, F и G колинеарне.

Један ученички доказ је гласио:



1. $\angle BAG = \angle BCG$ (периферијски углови над BG)
2. $\angle BDC = 90^\circ$
3. $\angle DBC = \beta$
4. У $\triangle DBC$ је $\angle DCB = 180^\circ - \angle BDC - \angle DBC = 90^\circ - \beta$
5. Претпоставимо да је $G \in p$, $F \in p$ и $A \notin p$
6. Нека је $\angle O_2GF = x$
7. У $\triangle O_2FG$ је $O_2F = O_2G = r$
8. Следи $\angle O_2GF = \angle O_2FG = x$
9. Следи $\angle O_2FC = 90^\circ$
10. $\angle GFC = \angle O_2FC - \angle O_2FG = 90^\circ - x$
11. $\angle FPC = 180^\circ - \angle PFC - \angle FCP = \beta + x$
12. $\angle AGC = \angle ABC = \beta$ (периферијски углови над AC)
13. $\angle BGA = 90^\circ$ (угао над пречником AB)
14. $\angle BGO_2 = \angle BGA - \angle O_2GF = 90^\circ - x$
15. $\angle BPG = \angle FPC = \beta + x$ (унакрсни углови)
16. $\angle CBG = 180^\circ - \angle BPG - \angle BGP = 90^\circ - \beta - x$
17. $\angle FAC = \angle CBG = 90^\circ - \beta - x$ (периферијски углови над GC)
18. $\angle DCA = \angle ABC = \beta$ (углови са нормалним крацима)
19. $\angle CFA = 180^\circ - \angle FAC - \angle FCA = 90^\circ + x$
20. Следи $\angle CFA + \angle CFG = 180^\circ$, па $A \in p$
21. па су A, F и G колинеарне тачке.

У 14. и у 17. реду се индиректнио користи тврђење да су тачке A, F и G колинеарне. Наиме, исправно би било $\angle BGO_2 = \angle BGA - \angle O_2GA = 90^\circ - x$ и $\angle GAC = \angle CBG = 90^\circ - \beta - x$ (треба A уместо F), тј. тврђења под 14. и 17. су тачна онда и само онда ако су A, F и G колинеарне. Са исправљеним тврђењама доказ је још увек непотпун. Напоменуо бих да читалац у горњем доказу може наћи још неке мање битне грешке.

Коришћење још недоказаног тврђења

Пример 9 (Државно такмичење из математике ученика основних школа, 2016. године, 3. задатак за ученике 8. разреда). Дата је коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$ чија је запремина $1000\,\mathrm{cm}^3$. Нека су E, F, G, H, I, J редом средишта ивица BC, CD, DD_1, D_1A_1, A_1B_1, B_1B. Докажи да тачке E, F, G, H, I, J припадају једној равни и израчунај површину и запремину пирамиде $AEFGHIJ$.

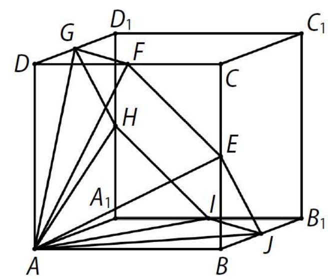
Један ученик је „доказао“ компланарност на следећи начин: Права EF сече праву AB пошто су у једној равни и нису паралелне. Нека је K њихова пресечна тачка. Праве AB и IJ такође се секу у таки K. Аналогно се доказује да се секу и праве EF и HG у тачки L као и HG и IJ у тачки M. Значи, тачке E, F, G, H, I, J налазе се на страницама троугла KLM, тј. у једној равни.

Грешка у овом доказу је то, што није доказано тврђење да је пресечна тачка правих EF и AB иста као и пресечна тачка правих IJ и AB.

Коришћење нетачног тврђења

Пример 10. Задатак из претходног примера други ученик је решавао овако:

$EF \parallel HI$ јер је $EF \parallel BD$, $HI \parallel B_1D_1$ и $BD \parallel B_1D_1$. На исти начин доказује се да је $IJ \parallel GF$ и $JE \parallel GH$. Како је $EF \parallel HI$, $IJ \parallel GF$ и $JE \parallel GH$, то тачке E, F, G, H, I, J припадају једној равни.



У овом доказу ученик је за премису користио тврђење: „Ако су наспрамне странице просторног шестоугла паралелне, онда је шестоугао равански." Да је ово тврђење погрешно, показује пример шестоугла $ABCC_1D_1A_1$ на истој коцки.

Грешке у примерима 8, 9, и 10 се могу описати формулама математичке логике према следећем:

Коришћење тврђења које заправо треба доказати: $((q \wedge p) \Rightarrow q)$ повлачи q

$[((q \wedge p) \Rightarrow q) \Rightarrow q$ није таутологија, док премиса $((q \wedge p) \Rightarrow q)$ јесте таутологија].

Коришћење још недоказаног (додуше тачног!) тврђења као премисе: $(p \Rightarrow q)$ повлачи q

$[(p \Rightarrow q) \Rightarrow q$ није таутологија].

Коришћење нетачног тврђења као премисе: $(\perp \Rightarrow q)$ повлачи q

$[(\perp \Rightarrow q) \Rightarrow q$ није таутологија, док је премиса таутологија $\perp \Rightarrow q$ звана "ex falso quodlibet"]. [10], [11], [12]

Коришћење погрешне или неодговарајуће формуле највише су обрађиване у досадашњим списима о грешкама. Следећи примери узети су из књиге „Где је погрешка?" аутора М. Крајновића [13].

Најпре дајемо пример коришћења формуле која је иначе исправна, али није одговарајућа за то решење.

Пример 11. Бициклист се на путу узбрдо од места A до места B кретао средњом брзином од 10 km на сат. Од места B до места A, тј. низбрдо, кретао се средњом брзином од 30 km на сат. Према томе, средња брзина на путу од A до B и назад је била 20 km на сат (аритметичка средина две брзине).

Да ли је тачно?

Није. Аритметичка средина се за израчунавање средње брзине може користити само у случају да су подаци о брзинама дати за једнаке временске а не путне интервале.

Доста примера за коришћење неодговарајуће формуле може се наћи и у ученичким радовима, кад се, на пример, уместо формуле за површину користе формуле за обим, или уместо формуле за запремину користи формула за површину, или се користи формула за Питагорину теорему, али се погрешно одабере страница за хипотенузу, итд.

Коришћење апсолутно нетачне формуле

Пример 12. Улази купац у продавницу и купује алат за 4000 динара. Сутрадан се враћа незадовољан у продавницу и тражи онај „бољи алат од 8000 динара“. Јефтинији алат враћа продавцу, узима скупљи и крене.

– А платити?! – виче продавац.

– Јуче сам вам платио 4000 динара, а данас сам вам дао алат од 4000 динара, па смо сад квит.

Да ли су стварно квит?

Нису. Коришћена „књиговодствена“ формула је:

	Купац дао	Продавац дао
1. дан	4000 динара	Алат вредан 4000 динара
2. дан	Алат вредан 4000 динара	Алат вредан 8000 динара

Или математички: $4000 + A_{4000} = A_{4000} + A_{8000}$, где A_{4000} и A_{8000} означавају алат, тачније вредност алата од 4000 односно од 8000 динара. Јасно је да формула није тачна.

Пример 13. Три пријатеља су вечерала у ресторану. Конобар наплаћује:

– Две хиљаде петсто динара молим!

Свако од три пријатеља даје конобару по 1000 динара. Конобар се извињава да је заборавио на музику, за шта треба да наплати још 200 динара и враћа сваком по 100 динара.

Рачунајмо: свако је платио 900 динара. То је 2700 динара. Ако се томе дода 200 динара за музику, коначан збир је 2900 динара. Где је још 100 динара?

Исправна књиговодствена формула:

Ресторан дао	Гости дали
Вечера од 2500 динара	3000 динара
Музика од 200 динара	
$3 \cdot 100$ динара	

Коришћена неисправна формула:

Ресторан дао	Гости дали
Вечера од 2500 динара	3000 динара
	$3 \cdot (-100)$ динара
	Музика од 200 динара

Пример 14. Две пријатељице, Цица и Мица, продају јабуке на пијаци.

Цица продаје две за евро, а Мица има јабуке лошијег квалитета па их продаје три за евро. Обе имају по 30 јабука, па ако све продају, Цица ће имати 15 евра а Мица 10, тј. укупно 25 евра.

Пре него што су ишта продале, Цица је морала оде, па је замолила Мицу да прода и њене јабуке. Кад је Цица отишла, Мица је размишљала овако: „Зашто да се ја петљам са две цене? Моје су три за евро, Цицине две за евро; помешаћу их и продавати пет за два евра!“ Тако је и урадила. Од 60 јабука направила је 12 гомилица по 5 јабука. За њих је добила 12 пута по 2 евра, тј. укупно 24 евра.

Кад се Цица вратила, посвађале су се због једног евра. Објасни!

Мицина погрешна формула је: $\dfrac{30}{3}+\dfrac{30}{2}=\dfrac{30+30}{3+2}\cdot 2$, односно $\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{d}=\dfrac{a+b}{c+d}\cdot 2$.

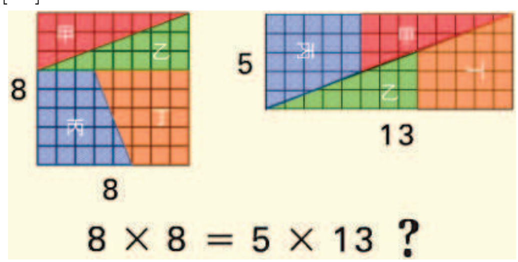
Другачије бисмо могли анализирати овако: пет јабука по њиховим ценама вреде тачно два евра једино у случају ако су међу тих пет три Мицине и две Цицине јабуке. Иначе ће бити или скупље, или јефтиније. То значи, да је Мица могла направити највише 10 „гомилица“ од пет јабука вредних два евра. Преостале две „гомилице“ садржаће само Цицине јабуке и њихова цена ће бити 2,5 евра.

Код ученика се често јавља коришћење (погрешних) формула

$$(a+b)^2=a^2+b^2, \quad \text{односно} \quad -(a-b)c=-ac-bc.$$

Уместо формуле може се јавити и другачији исказ, као у следећем примеру.

Пример 15. [14]



Где је грешка?

Овде је погрешан закључак $8\times 8=5\times 13$, односно $64=65$, а коришћена погрешна премиса може бити једна од следећих:

„Правоугаоник који се састоји од 5×13 квадратића квадратне мреже има дијагоналу која пролази кроз два чвора мреже унутар правоугаоника.“

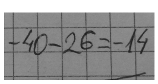
„Дијагонала правоугаоника димензија 2×5 заклапа исти угао са страницама правоугаоника као што дијагонала правоугаоника димензија 3×8 заклапа угао са страницама правоугаоника.“

„Права која садржи дијагоналу правоугаоника $ABCD$ димензија 3×8, поклапа се са правом која садржи дијагоналу правоугаоника $AEFG$ димензија 2×5, ако се праве AB и AE као и праве AD и AG поклапају.“

Наравно, ниједан од ових исказа у погрешном закључивању експлицитно није наведен.

Грешке у коришћењу таблица операција

Пример 16.



Одговарајуће таблице се углавном не уче као таблице већ као правила, а могле би изгледати овако:

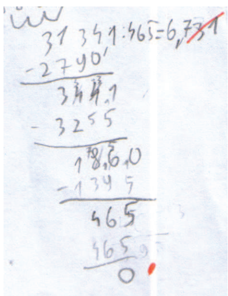
	$a+b$	$a-b$	$-a+b$	$-a-b$
$a>b$	$a+b$ (као код природних бројева)	$a-b$ (као код природних бројева)	$-(a-b)$	$-(a+b)$
$a<b$	$a+b$ (као код природних бројева)	$-(b-a)$	$b-a$	$-(a+b)$

У овом примеру коришћена је (погрешна) таблица у којој један део изгледа овако:

	$-a-b$
$a>b$	$-(a-b)$

Грешке у алгоритмима операција

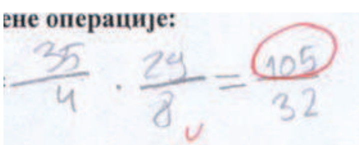
Пример 17.



3134,1:465=6,74
2790
3441
3255
1860
1860
0

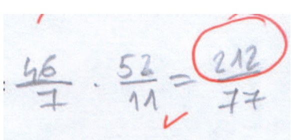
По алгоритму дељења, ако је остатак једнак или већи од делиоца, резултат треба кориговати (повећати за један!) што овде није учињено, већ је остатак даље дељен.

Пример 18.



$$\begin{array}{rcr} 5\cdot 9 & = & 45 \\ 3\cdot 2 & = & \underline{6} \\ & & 105 \end{array}$$

Пример 19.



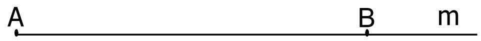
$$\begin{array}{rcr} 6\cdot 2 & = & 12 \\ 4\cdot 5 & = & \underline{20} \\ & & 212 \end{array}$$

У примерима 18 и 19 алгоритам за множење није исправан. Наиме, изостављени су производи јединица са десетицама.

Формалне (синтаксне) грешке

Пример 20 (Државно такмичење из математике ученика основних школа, 10. мај 2014, трећи задатак за шести разред). Требало је израчунати величину збира одређених углова.

Ученик је писао „$Am \in B$“ уместо „$B \in Am$“. На слици је било:

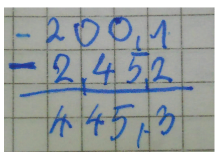


Класификација по приметљивости

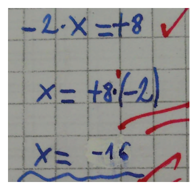
Евидентна грешка:

Пример 21. Слика 1.

Чињеница да у другом сабирку постоје два децимална зареза, одмах упућује на закључак да постоји нека грешка. Ако се установи по претходном тексту да је други сабирак 2,452, онда се види и врста грешке.



Слика 1



Слика 2

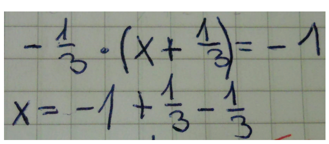
Лако приметљиве грешке

Пример 22. Слика 2.

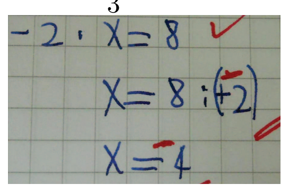
У другом реду уместо дељења коришћено је множење.

Пример 23. Слика 3.

У другом реду уместо дељења бројем $-\dfrac{1}{3}$ додато је $\dfrac{1}{3}$.



Слика 3



Слика 4

Пример 24. Слика 4.

Теже приметљива грешка

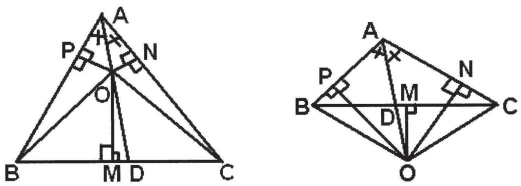
Пример 25.

На претходној слици је 15 патуљака. Ако се слика разреже на три дела и састави се поново као на наредној слици, биће само 14 патуљака. Где је грешка?

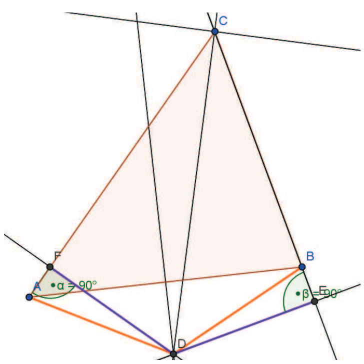
Оставља се читаоцу да сам дође до одговора.

Скривена грешка

Пример 26. Дат је троугао ABC. Нека је AD симетрала угла BAC. Нека је тачка M средиште странице BC. Нормала на страницу BC повучена кроз тачку M сече симетралу AD у тачки O (унутар или ван троугла). Нека је P тачка странице AB таква да је $OP \perp AB$, а N тачка странице AC таква да је $ON \perp AC$.



Имамо да је $OP = ON$, јер је O на симетрали угла BAC. $OB = OC$, јер је O једнако удаљена од крајева дужи BC. У правоуглим троугловима OPB и ONC, хипотенузе OB односно OC су једнаке и катете OP и ON су такође једнаке. По теореми ССУ троуглови BOP и CON су подударни. Следи: $BP = CN \ldots (1)$.



Правоугли троуглови ANO и APO су такође подударни, јер имају заједничку хипотенузу и једнаке катете OP и ON. Из тога следи $AP = AN \ldots (2)$.

Из (1) и (2) следи да је $AB = AC$, тј. да је ABC једнакокраки троугао. Закључак: сваки троугао је једнакокрак.

Где је грешка? [15]

Исправна слика, на основу које се грешка лако открије, дата је лево.

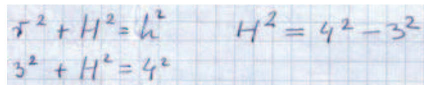
Класификација по пореклу грешака

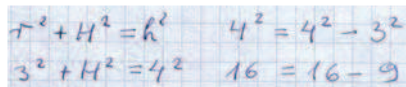
Примере за грешке због незнања и непажње нећемо овде наводити.

Проблем акцептирања: написано једно – прочитано друго

Пример 27. Писмени задатак у осмом разреду (реконструкција).

На следећим сликама су детаљи из задатака четири ученика.

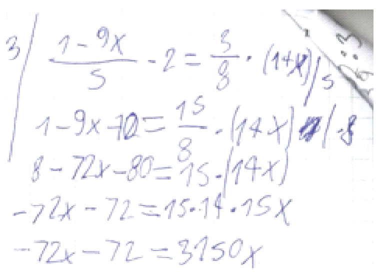




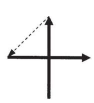
Претпостављам да је коментар сувишан.

Пример 28. (Пробни матурски 2015)

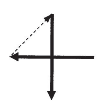
– Rešiti jednačinu: $\dfrac{1-9x}{5}-2=\dfrac{3}{8}\cdot(1+x)$



Од $1+x$ настало је $14x$. Ученик је писао знак $+$ на следећи начин:

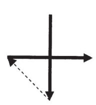


или

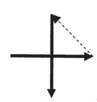


А како треба писати знак $+$?

Овако



или овако



ЛИТЕРАТУРА

[1] B.L. van der Waerden, *Egy tudomány ébredése*, Budapest, Gondolat, 1977. (strane 53 i 54)

[2] http://hu.wikipedia.org/wiki/Pi_%28sz%C3%A1m%29
[3] Д. Лопандић, *Геометрија*.
[4] https://en.wikipedia.org/wiki/De_Havilland_Comet
[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Tacoma_Narrows_Bridge_%281940%29
[6] В. Јаковљевић, *Математичке грешке и њихове последице*, Тангента, Друштво математичара Србије, број 80/4, 2014/15.
[7] http://www.nytimes.com/2014/07/27/magazine/why-do-americans-stink-at-math.html?_r=2#story-continues-7
[8] http://adventuresinfrugal.com/one-time-13-pound-burgers-failed-america-couldnt-figure-meat-quarter-pounder/
[9] https://www.youtube.com/watch?v=uYSt8K8VP6k
[10] V. Devide, *Matematička logika*, Beograd, Matematički institut, 1972.
[11] С. Б. Прешић, *Елементи математичке логике*, Београд, Завод за уџбенике и наставна средства, 1974.
[12] М. Прешић, С. Прешић, *Увод у математичку логику*, Београд, Математички институт, 1979.
[13] M. Krajnović, *Gdje je pogreška?*, Zagreb, Školska knjiga, 1962.
[14] http://www.urbanlegends.hu/2004/08/6465/
[15] http://www.invatasingur.ro/logica/index.php/Orice_triunghi_este_isoscel

ОШ „Петар Кочић“, Темерин
E-mail: bvj@parabolanet.com