Вера Јоцковић

ТЕЖИШНЕ ДУЖИ ТРОУГЛА – ПРИМЕНА ПИТАГОРИНЕ ТЕОРЕМЕ

Час додатне наставе у 7. разреду основне школе при Математичкој гимназији

За Математичку гимназију ова година је јубиларна. Много простора би се морало употребити чак и за пуко набрајање свих успеха наше, по много чему изузетне, школе. Са моје тачке гледишта, једна од важнијих заслуга Математичке гимназије је увођње, 2004. године, огледних одељења 7. и 8. разреда основне школе за ученике са склоностима за математику и физику. С једне стране, био је приличан подухват да се од стране просветних институција добије дозвола за такав корак, а с друге стране је било храбро направити школу унутар школе (средња и основна школа функционишу по различитим законским одредбама). У сваком случају, показало се да је Оглед у свим својим сегментима оправдао своје постојање, и преко очекивања, па је престао да буде Оглед и добио је редован статус, не само у Математичкој гимназији у Београду већ и у другим градовима Србије који испуњавају одређене услове.

У чему је предност ученика који 7. и 8. разред основне школе похађају у Математичкој гимназији у односу на њихове вршњаке? Очекивало би се да је то појачан курс математике, физике и информатике. Међутим, тај ниво наставе је могуће постићи и у обичној школи изузетним залагањем наставника и ученика или у добро организованом индивидуалном раду, али је тешко избећи замке других фактора. Показало се да на успешност утиче највише окружење вршњака сличних интересовања и измештање из средина које мање-више негују осредњост, просечност, где се, најчешће, више времена троши на нерадне, незаинтересоване … него на радне и заинтересоване ученике.

Програм математике у 7. и 8. разреду основне школе у Математичким гимназијама се реализује кроз два предмета, алгебру – 3 часа и геометрију – 3 часа. Дакле, то је 50% више часова него у осталим школама, али ако се детаљније погледају садржаји, то је само око 10% више наслова него што пише у садржају програма осталих основних школа. Делује парадоксално, али та привидно нелогична разлика даје могућност да се садржаји суштински добро и темељно обраде. Такав начин рада је истовремена припрема за такмичења и за полагање пријемног испита за наставак школовања у Математичкој гимназији. То не искључује потребу за додатном наставом која се одвија паралелно са редовном, током целе школске године.

Наравно да ученици имају више обавеза и раде више од осталих вршњака, али то се односи и на њихове професоре који детаљно и правовремено припремају наставу. При томе се подразумева усклађеност садржаја алгебре и геометрије. Као илустрацију начина рада наводимо час додатне наставе из Геометрије у 7. разреду у оквиру наставне теме Питагорина теорема.

Наставна јединица је: Примена Питагорине теореме – тежишне дужи троугла.

За реализацију овог садржаја потребно знање:

- из геометрије: Питагорина теорема, особине паралелограма, особине тежишних дужи;
- из алгебре: реални бројеви, сређивање, сабирање и множење полинома.

Циљ часа је утврђивање Питагорине теореме и сређивања алгебарских израза.

На редовном часу или као домаћи задатак урађени су примери:

1. Дужине катета правоуглог троугла ABC са правим углом код темена C су $a = 6\,\mathrm{cm}$, $b = 8\,\mathrm{cm}$. Израчунај дужине тежишних дужи.
2. Тачка A_2 је симетрична са теменом A троугла ABC у односу на средиште A_1 странице BC. Докажи да је ABA_2C паралелограм.

Садржај часа

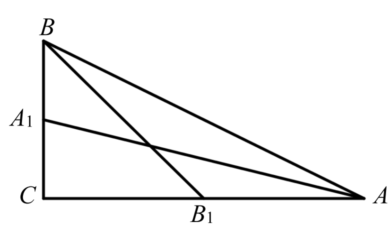
После кратког подсећања на особине тежишних дужи раде се следећи примери:

1. Угао ACB троугла ABC је прав, а дужине тежишних дужи су $t_a = 15\,\mathrm{cm}$, $t_b = 20\,\mathrm{cm}$. Израчунај обим тог троугла.

Решење. Обележавамо са A_1 и B_1 редом средишта катета BC и AC и примењујемо Питагорину теорему на правоугле троуглове AA_1C и BB_1C. Тада следе једнакости:

$$t_a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2 \quad \text{и} \quad t_b^2 = a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2,$$

односно $225 = \dfrac{a^2}{4} + b^2$ и $400 = a^2 + \dfrac{b^2}{4}$.



Слика 1

Сабирањем последње две једнакости добијамо $625 = \dfrac{5}{4}(a^2+b^2)$, па је $500 = c^2$. Дужине катета добијамо из једнакости

$$225 = \frac{a^2}{4} + \left(\frac{b^2}{4} + \frac{3b^2}{4}\right) = \left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}\right) + \frac{3b^2}{4} = \frac{c^2}{4} + \frac{3b^2}{4},$$

$225 = \dfrac{125}{4} + \dfrac{3b^2}{4}$, $b = 5\sqrt{\dfrac{31}{3}}\,\mathrm{cm}$. Дужина катете a се може добити на сличан начин из једнакости $400 = a^2 + \dfrac{b^2}{4}$ или применом Питагорине теореме на полазни троугао, тј. $a^2 = c^2 - b^2 = 500 - \dfrac{775}{3} = \dfrac{725}{3}$, па је $a = 5\sqrt{\dfrac{29}{3}}\,\mathrm{cm}$.

Тражени обим троугла је $\left(5\sqrt{\dfrac{29}{3}} + 3\sqrt{\dfrac{31}{3}} + 10\sqrt{5}\right)\mathrm{cm}$. $\triangle$

2. Изрази дужине страница правоуглог троугла ABC у функцији дужина тежишних дужи t_a и t_b које одговарају катетама a и b.

Решење. Обележавамо са A_1 и B_1 редом средишта катета BC и AC и примењујемо Питагорину теорему на троуглове AA_1C и BB_1C. Тада следе једнакости:

$$t_a^2 = \frac{a^2}{4} + b^2 \quad \text{и} \quad t_b^2 = a^2 + \frac{b^2}{4}.$$

Сабирањем ове две једнакости добијамо $t_a^2 + t_b^2 = \dfrac{5}{4}(a^2 + b^2) = \dfrac{5}{4}c^2$, па је $c = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}\sqrt{t_a^2 + t_b^2}$. Дужину катете b изражавамо из прве од једнакости, тј.

$$t_a^2 = \frac{a^2}{4} + \left(\frac{b^2}{4} + \frac{3b^2}{4}\right) = \left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}\right) + \frac{3b^2}{4} = \frac{c^2}{4} + \frac{3b^2}{4} = \frac{\frac{4}{5}(t_a^2 + t_b^2)}{4} + \frac{3b^2}{4},$$

па је $\dfrac{3b^2}{4} = t_a^2 - \dfrac{\frac{4}{5}(t_a^2 + t_b^2)}{4}$, односно $b^2 = \dfrac{4}{15}(4t_a^2 - t_b^2)$, $b = \dfrac{2}{15}\sqrt{15}\sqrt{4t_a^2 - t_b^2}$.

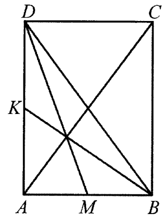
На аналоган начин је $a = \dfrac{2}{15}\sqrt{15}\sqrt{4t_b^2 - t_a^2}$. $\triangle$

3. Докажи да важи $t_a^2 + t_b^2 + t_c^2 = \dfrac{3}{2}c^2$ ако су c, t_a, t_b и t_c, редом, хипотенуза и тежишне дужи правоуглог троугла ABC.

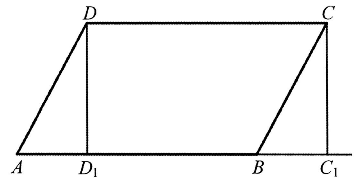
Упутство. Решење задатка следи непосредно из претходног задатка и чињенице да за хипотенузину тежишну дуж и хипотенузу важи $t_c^2 = \dfrac{c^2}{4}$. Остаје да ученици то ураде за домаћи. $\triangle$

4. Тачка M је средиште странице AB правоугаоника $ABCD$. Ако су дијагонале правоугаоника по $\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$, а дуж DM је $1{,}5\,\mathrm{cm}$, израчунај дужину дужи BK где је K средиште странице AD.

Решење. Нека је тачка O пресек дијагонала правоугаоника $ABCD$, слика 2. С обзиром да се дијагонале правоугаоника узајамно полове и да су тачке M и K средишта страница AB и AD, то су дужи AO, DM и BK тежишне дужи правоуглог троугла ABD и на основу једнакости доказане у претходном задатку следи $AO^2 + DM^2 + BK^2 = \dfrac{3}{2}BD^2$,односно $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 1{,}5^2 + BK^2 = \dfrac{3}{2}\sqrt{3}^{\,2}$, па је $BK = \dfrac{\sqrt{6}}{2}\,\mathrm{cm}$. $\triangle$



Слика 2



Слика 3

5. Нека је $ABCD$ паралелограм. Докажи да важи

$$AC^2 + BD^2 = 2\,AB^2 + 2\,BC^2.$$

Решење. Нека су дужи CC_1 и DD_1 висине паралелограма из темена C и D, при чему је распоред тачака, на пример, као на слици 3. Троуглови BCC_1 и ADD_1 су подударни (став УУС), па следи да је $BC_1 = AD_1$. Применимо Питагорину теорему на троугао ACC_1, па је

$$(1)\quad AC^2 = AC_1^2 + CC_1^2 = (AB + BC_1)^2 + CC_1^2 = AB^2 + 2\cdot AB\cdot BC_1 + BC_1^2 + CC_1^2.$$

Применимо Питагорину теорему на троугао BDD_1 и добијамо

$$(2)\quad BD^2 = BD_1^2 + DD_1^2 = (BD - AD_1)^2 + DD_1^2 = BA^2 - 2\cdot BA\cdot AD_1 + AD_1^2 + DD_1^2.$$

Сабирамо једнакости (1) и (2):

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + 2\cdot AB\cdot BC_1 + BC_1^2 + CC_1^2 + BA^2 - 2\cdot BA\cdot AD_1 + AD_1^2 + DD_1^2.$$

Сада је очигледно да је $2\cdot AB\cdot BC_1 = 2\cdot BA\cdot AD_1$, а из подударних правоуглих троуглова ADD_1 и BCC_1 следи $AD^2 = AD_1^2 + DD_1^2$, односно $BC^2 = BC_1^2 + CC_1^2$, па је даље

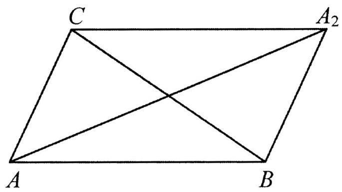
$$\begin{aligned} &AC^2 + BD^2 \\ &\quad = AB^2 + 2\cdot AB\cdot BC_1 + BC_1^2 + CC_1^2 + BA^2 - 2\cdot BA\cdot AD_1 + AD_1^2 + DD_1^2 \\ &\quad = AB^2 + BC^2 + BA^2 + AD^2, \end{aligned}$$

тј. $AC^2 + BD^2 = 2\,AB^2 + 2\,BC^2$, што је и требало доказати. $\triangle$

6. Докажи да за троугао ABC важи:

$$4t_a^2 = 2c^2 + 2b^2 - a^2,\quad 4t_b^2 = 2c^2 + 2a^2 - b^2,\quad 4t_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2,$$

где су a, b, c дужине страница, а t_a, t_b, t_c дужине одговарајућих тежишних дужи тог троугла.



Слика 4

Решење. Одреди се тачка A_2 симетрична са теменом A у односу на средиште A_1 странице BC. Четвороугао ABA_2C је паралелограм. [*Доказ ове чињенице су ученици урадили као домаћи задатак и на овом месту се само усмено наводе кораци тог доказа.*]

У једнакости $AC^2+BD^2 = 2\,AB^2+2\,BC^2$ доказаној у претходном задатку се уводе смене у складу са датим подацима, па добијамо $AA_2^2+BC^2 = 2\,AB^2+2\,AC^2$, односно $(2t_a)^2+a^2 = 2c^2+2b^2$, тј. $4t_a^2 = 2c^2+2b^2-a^2$, што је и требало доказати.

Друга и трећа једнакост остају за домаћи задатак. Сугерише се да за домаћи провере да ли доказане једнакости важе и у специјалним случајевима, тј. за правоугли и једнакостранични троугао.

Централни део часа су 5. и 6. задатак. Једнакости доказане у 6. задатку се могу користити у разним задацима, а ако се забораве лако се изводе.

7. За било који троугао важи $t_a^2+t_b^2+t_c^2 = \dfrac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$, где су a, b, c дужине страница, а t_a, t_b, t_c дужине одговарајућих тежишних дужи тог троугла.

Упутство. Једнакост је непосредна последица трију једнакости доказаних у претходном задатку. *Такав коментар обично дају ученици. Задатак остаје за домаћи.*

За домаћи ученицима остаје и следећи задатак.

8. Ако је T тежиште троугла ABC, докажи да важи једнакост
$$AT^2+BT^2+CT^2 = \frac{1}{3}(AB^2+BC^2+CA^2).$$

9. Ако за катете a и b правоуглог троугла ABC важи да је $b = a\sqrt{11}$, одреди размеру $t_a : t_b$ где су t_a и t_b одговарајуће тежишне дужи.

Решење. $t_a^2 = b^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2$, $t_b^2 = a^2+\left(\dfrac{b}{2}\right)^2$, односно $4t_a^2 = 4b^2+a^2$, $4t_b^2 = 4a^2+b^2$. Даље је
$$\frac{t_a^2}{t_b^2} = \frac{4t_a^2}{4t_b^2} = \frac{4b^2+a^2}{4a^2+b^2} = \frac{4\,\dfrac{b^2}{a^2}+1}{4+\dfrac{b^2}{a^2}} = \frac{4\left(\dfrac{b}{a}\right)^2+1}{4+\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}.$$
Како је $\dfrac{b}{a} = \sqrt{11}$, то је $\left(\dfrac{b}{a}\right)^2 = 11$, па је
$$\frac{t_a^2}{t_b^2} = \frac{4\cdot 11+1}{4+11} = \frac{45}{15} = 3.$$
Дакле, $t_a : t_b = \sqrt{3}$.

10. Нека су A, B и C три различите тачке на правој p, тако да је тачка B између тачака A и C. Нека су тачке M и O с једне стране праве p, а тачка

K с друге стране те праве, такве да су троуглови ABM, BCO и ACK једнакостранични. Докажи да су тежишта тих троуглова темена једнакостраничног трогла.

Упутство. Нека су a, b и c редом дужине страница троуглова ABM, BCO и ACK, а тачке D, E и F редом тежишта тих троуглова. Уочимо нормале из тачака D, E и F на праву p и обележимо са D_1, E_1 и F_1 редом њихове пресеке са правом p. Тада важе једнакости:

$$DD_1 = \frac{a\sqrt{3}}{6}, \quad EE_1 = \frac{b\sqrt{3}}{6}, \quad FF_1 = \frac{c\sqrt{3}}{6} = \frac{(a+b)\sqrt{3}}{6}.$$

Даље се примењује Питагорина теорема и доказује да су дужине дужи DE, EF и FD једнаке.

Напомене.

- *Све време се инсистира на темељном записивању и на цртању одговарајућих слика, јер је то веома битно. Трансформације алгебарских израза се изводе детаљно, јер спадају у тек обрађене алгебарске садржаје.*
- *Показало се да ученици не разликују упутство, скицу решења и решење, па на то треба обратити пажњу.*
- *Час је ефикаснији ако ученици добију писани материјал пре часа, нпр. на крају претходног редовног часа.*

Математичка гимназија, Краљице Наталије 37, Београд
E-mail: jockovic.vera@gmail.com

ОБАВЕШТЕЊА

20. ЈУНИОРСКА БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Двадесета Јуниорска балканска математичка олимпијада (JBMO) одржана је од 23. до 29. јуна ове године у Слатини (Румунија). Учествовало је 11 екипа у званичној конкуренцији, као и 8 гостујућих. Србију су представљали:

1. *Јелена Иванчић*, Математичка гимназија, Београд,
2. *Ирина Ђанковић*, Математичка гимназија, Београд,
3. *Јован Тороманови*ћ, Математичка гимназија, Београд,
4. *Милош Милићев*, Математичка гимназија, Београд,
5. *Вукашин Михајловић*, Математичка гимназија, Београд,
6. *Илија Узелац Бујишић*, Математичка гимназија, Београд.

Руководиоци екипе били су *др Ненад Вуловић*, Педагошки факултет, Јагодина и *Милош Ђорић*, Математички факултет, Београд.

Наши такмичари су остварили одличан резултат. Јелена је освојила златну медаљу, а сви остали сребрне. Екипно су заузели 3. место. Најбољи су били такмичари из Румуније.

Наредна, 21. JBMO, одржаће се у Бугарској