## ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

**Др Зоран Каделбург, Милош Ђорић**

# 19. ЈУНИОРСКА БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

### Београд, 24–29. јуна 2015. године

Србија је ове године по трећи пут била домаћин Јуниорске балканске математичке олимпијаде (19. по реду), која је одржана од 24. до 29. јуна. Организатор такмичења било је, као и претходна два пута (Београд, 1997. и Нови Сад, 2004), Друштво математичара Србије, а такмичење је одржано у Студентском одмаралишту „Радојка Лакић" у подножју Авале. Овај објекат је у ту сврху уступило на коришћење Минситарство просвете, науке и технолошког развој Србије. Председник Организационог одбора био је *проф. др Зоран Каделбург* (Математички факултет, Београд), заменик *др Ненад Вуловић* (Факултет педагошких наука, Јагодина), а секретар *Милош Ђорић* (Математички факултет, Београд).

У званичној конкуренцији учествовале су шесточлане екипе из 11 балканских земаља (Албанија, Босна и Херцеговина, Бугарска, Грчка, Кипар, Македонија, Молдавија, Румунија, Србија, Турска и Црна Гора), док је у незваничној конкуренцији било још 8 екипа (Азербејџан, Казахстан, Киргистан, Саудијска Арабија, Србија Б, Таџикистан, Туркменистан и Француска).

Екипе су стигле у Београд у среду, 24. јуна, и смештене су у Студентском одмаралишту. Наредног дана састао се Жири Балканијаде, који су чинили руководиоци свих екипа, а којим је председавала *проф. др Мирјана Ђорић* (Математички факултет, Београд), именована, према Правилнику, од стране организатора. На том састанку, од задатака које је, из пристиглих предлога, одабрала комисија у саставу *проф. др Ратко Тошић*, *проф. др Бранислав Поповић* и *Јожеф Б. Варга*, одређена су 4 задатка за само такмичење. Они су затим преведени и умножени тако да сваки такмичар, осим званичне енглеске верзије, добије текст и на свом језику.

Балканијада је свечано отворена у петак, 26. јуна у Студентском одмаралишту „Радојка Лакић". Такмичаре, пратиоце и госте су поздравили *проф. др Александар Липковски*, председник Друштва математичара Србије, и *проф. др Владимир Мићић*, председник Организационог одбора прве ЈБМО, одржане у Београду 1997. године. Након кратке церемоније, такмичари су се распоредили по унапред предвиђеним радним местима, где су у периоду од 4 сата и 30 минута решавали постављене задатке.

У току послеподнева истог дана, руководиоци екипа прегледали су радове својих такмичара, док су копије тих радова истовремено прегледали координатори које је именовао организатор. Затим су, у суботу, руководиоци екипа и координатори усаглашавали оцене тих радова. Важно је нагласити да овом приликом није био ниједан случај несагласности између руководилаца и координатора (за такве случајеве је према Правилнику предвиђено да их решава читав Жири), што сведочи о врло квалитетном избору координатора које је учинило Друштво математичара Србије. То су потврдили и сви руководиоци делегација; илустрације ради наводимо део електронске поруке турског лидера коју је послао по повратку.

> Once again I wish to thank you and all of your team for very good organization of 2015 JBMO. The coordination which is a most important part of the Olympiads was very smooth and fair.
>
> Many thanks,
>
> *Azer Kerimov*

Координатори су били: *Ратко Тошић* (председник), *Ђорђе Дугошија*, *Јован Вукмировић*, *Милош Арсеновић*, *Небојша Икодиновић*, *Владимир Божин*, *Миљан Кнежевић*, *Ђорђе Кртинић*, *Ђорђе Баралић*, *Јожеф Б. Варга*, *Соња Чукић*, *Душан Дробњак*, *Максим Стокић*, *Катарина Лукић*, *Лазар Радичевић* и *Мирјана Катић*.

За време координације, за такмичаре је организовано разгледање Београда. Том приликом, као и током читаве Балканијаде, њих су пратили водичи ("guides"), које су, по једног за сваку екипу, одредиле Математичка и Филолошка гимназија. Треба истаћи да су сви они врло предано и са великом одговорношћу обавили овај не баш лак посао. У недељу, 28. јуна, сви учесници ЈБМО били су на излету на којем су посетили Тополу (са Опленцем) и Крагујевац (Акваријум, Тополивница и Шумарице).

Све наведене активности у вези смештаја и излета веома успешно су координирали професори *Славољуб Милосављевић* (ОШ „Чегар", Ниш), *Мирјана Катић*, *Гордана Зарић* и *Бојана Матић* (Математичка гимназија, Београд).

Званичне резултате Балканијаде усвојио је Међународни жири на свом завршном састанку, одржаном у суботу, 27. јуна. Том приликом су, у складу са Правилником, одређене границе на основу којих су додељене медаље – златне, сребрне и бронзане. Укупно је у званичној конкуренцији додељено 7 златних медаља (за освојених 32–40 поена), 14 сребрних (23–30 поена) и 22 бронзане (12–22 поена), као и 4 похвале (за бар један у потпуности решен задатак). Гостујући такмичари добили су такође медаље, према истом критеријуму као званични (уз назнаку ''као гост''), тако да су њима додељене 1 златна, 6 сребрних и 26 бронзаних медаља.

Екипа Србије за ову Балканијаду одређена је на основу резултата Јуниорске српске математичке олимпијаде која је одржана у Ваљеву 23. маја ове године. Њу су сачињавали:

1. *Иван Пешић*, осми разред ОШ при Математичкој гимназији у Београду,
2. *Срђан Кузмановић*, осми разред ОШ „Светозар Марковић Тоза“, Нови Сад,
3. *Ирина Ђанковић*, седми разред ОШ при Математичкој гимназији у Београду,
4. *Павле Мартиновић*, осми разред ОШ при Математичкој гимназији у Београду,
5. *Александар Милосављевић*, осми разред ОШ при гимназији „Светозар Марковић“ у Нишу,
6. *Алекса Милојевић*, осми разред ОШ при Математичкој гимназији у Београду.

Руководиоци екипе били су *др Ненад Вуловић* (Факултет педагошких наука у Јагодини) и *Милош Ђорић* (Математички факултет у Београду).

Наша екипа остварила је врло добар успех – освојили су 3 сребрне и 3 бронзане медаље. Сребрне медаље освојили су *Иван Пешић*, *Павле Мартиновић* и *Ирина Ђанковић*, а бронзане *Срђан Кузмановић*, *Александар Милосављевић* и *Алекса Милојевић.*

Друга екипа Србије такође је одређена на основу резултата Јуниорске српске математичке олимпијаде. Њу су сачињавали:

1. *Богдан Раонић*, први разред Математичке гимназије у Београду,
2. *Вукашин Михајловић*, седми разред ОШ при Математичкој гимназији у Београду,
3. *Лазар Корсић*, осми разред ОШ при Математичкој гимназији у Београду,
4. *Матеја Здравковић*, осми разред ОШ при Првој крагујевачкој гимназији, у Краљеву,
5. *Јован Тромановић*, седми разред ОШ при Математичкој гимназији у Београду,
6. *Марина Васиљевић*, осми разред ОШ при Математичкој гимназији у Београду,

Заменик руководиоца екипе била је *Милица Мисојчић* (Математичка гимназија, Београд).

Они су (као гости) освојили пет бронзаних медаља (*Лазар Корсић*, *Вукашин Михајловић*, *Богдан Раонић*, *Матеја Здравковић* и *Јован Тромановић*).

Медаље су на завршној свечаности, одржаној такође 28. јуна, уручили председница Жирија и председник Друштва математичара Србије. Након тога је уследила, у изузетно пријатној атмосфери, традиционална опроштајна вечера за све учеснике.

Детаљнији подаци о 19. ЈБМО могу се наћи на званичном сајту

`www.dms.rs/jbmo`

који је такође високо оцењен од стране гостујућих учесника. Администратор сајта био је *Велибор Милосављевић* из Ниша. *Милица Бабић* и *Биљана Ћами-*

*ловић*, запослене у Друштву математичара Србије, успешно су обавиле, као и обично, велики део техничког посла на припреми.

Све похвале заслужује и особље Студентског одмаралишта, на челу са управником *Зораном Спасојевићем*, које је на изузетно љубазан и професионалан начин угостило учеснике.

Практично једина примедба коју смо чули од учесника Балканијаде односила се на чињеницу да се ни у једном тренутку (ни на отварању ни на затварању ЈБМО) није појавио ниједан званични представник Министарства просвете, што је сасвим неуобичајено на оваквим манифестацијама.

Балканске олимпијаде нису екипна такмичења, те се на њима пласман екипа не проглашава. Међутим, према укупном броју освојених поена и распореду медаља, може се (и уобичајено је) извршити њихово рангирање. На тај начин долази се до следећег пласмана.

| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | $\Sigma$ | златне | сребрне | бронзане | похвале |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | Турска | 40 | 40 | 30 | 27 | 23 | 17 | 177 | 2 | 3 | 1 | |
| 2. | Румунија | 35 | 30 | 28 | 26 | 25 | 24 | 168 | 1 | 5 | | |
| 3. | Бугарска | 35 | 32 | 30 | 20 | 18 | 14 | 149 | 2 | 1 | 3 | |
| 4. | Србија | 30 | 28 | 23 | 22 | 20 | 18 | 141 | | 3 | 3 | |
| 5. | С. Арабија | 36 | 30 | 17 | 15 | 12 | 12 | 122 | 1 | 1 | 4 | |
| 6. | Казахстан | 29 | 25 | 20 | 20 | 12 | 12 | 118 | | 2 | 4 | |
| 7. | Грчка | 34 | 34 | 14 | 13 | 11 | 11 | 117 | 2 | | 2 | 1 |
| 8. | Азербејџан | 23 | 22 | 20 | 18 | 11 | 9 | 103 | | 1 | 3 | |
| 9. | Молдавија | 21 | 20 | 14 | 14 | 14 | 11 | 94 | | | 5 | 1 |
| 10. | Србија Б | 21 | 18 | 16 | 14 | 12 | 11 | 92 | | | 5 | |
| 11. | Туркменистан | 25 | 20 | 19 | 11 | 10 | 0 | 85 | | 1 | 2 | 2 |
| 12. | Таџикистан | 24 | 15 | 12 | 12 | | | 83 | | 1 | 3 | |
| 13. | Француска | 20 | 19 | 14 | 12 | 12 | 2 | 79 | | | 5 | |
| 14. | Кипар | 25 | 22 | 12 | 9 | 4 | 0 | 72 | | 1 | 2 | |
| 15. | БиХ | 16 | 14 | 14 | 8 | 6 | 4 | 62 | | | 3 | |
| 15. | Македонија | 16 | 15 | 9 | 9 | 7 | 6 | 62 | | | 2 | |
| 17. | Албанија | 14 | 11 | 11 | 10 | 10 | 3 | 59 | | | 1 | 2 |
| 18. | Црна Гора | 29 | 9 | | | | | 38 | | 1 | | |
| 19. | Киргистан | 5 | 1 | 1 | 1 | | | 8 | | | | |

Можемо да констатујемо да је 19. Јуниорска балканска математичка олимпијада била изузетно успешна, како у организационом, тако и у такмичарском смислу.

Следе задаци са Балканијаде и њихова решења.

## Задаци

**1.** Одреди све просте бројеве $a, b, c$ и природне бројеве $k$ који задовољавају једначину

$$a^2 + b^2 + 16c^2 = 9k^2 + 1.$$

[Грчка]

**2.** Нека су $a, b, c$ позитивни реални бројеви такви да је $a + b + c = 3$. Одреди минималну вредност коју може имати израз

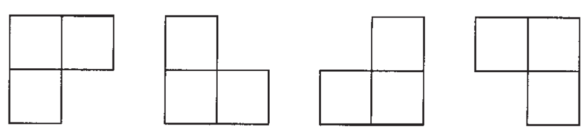
$$A = \frac{2-a^3}{a} + \frac{2-b^3}{b} + \frac{2-c^3}{c}.$$

[Молдавија]

**3.** Нека је $ABC$ оштроугли троугао. Праве $l_1$ и $l_2$ су нормалне на $AB$ у тачкама $A$ и $B$, редом. Нека је тачка $M$ средиште дужи $AB$. Нормале повучене из тачке $M$ на праве $AC$ и $BC$ секу $l_1$ и $l_2$ у тачкама $E$ и $F$, редом. Ако је $D$ пресек правих $EF$ и $MC$, докажи да је $\measuredangle ADB = \measuredangle EMF$.

[Кипар]

**4.** L-фигура је фигура која може да има један од четири облика са слике (свака фигура се састоји од 3 јединична квадрата):



Дати су табла $5 \times 5$ која се састоји од 25 јединичних квадрата, природни број $k \leqslant 25$ и неограничен број L-фигура.

Два играча, $A$ и $B$, играју следећу игру. Игру почиње играч $A$. Играчи наизменично боје истом бојом по један јединични квадрат на табли који претходно није обојен. Игра је завршена када се обоји укупно $k$ јединичних квадрата.

Кажемо да L-фигуре *добро* прекривају необојене јединичне квадрате на табли ако се не преклапају и ако свака од њих покрива тачно три необојена јединична квадрата на табли.

Играч $B$ побеђује ако свако *добро* прекривање L-фигурама оставља непрекривена најмање три необојена јединична квадрата. Одреди најмању могућу вредност за $k$ за коју играч $B$ има победничку стратегију.

[Кипар]

## Решења

**1.** Како је $9k^2+1 \equiv 1 \pmod 3$, то је

$$a^2+b^2+16c^2 \equiv 1 \pmod 3, \quad \text{тј.} \quad a^2+b^2+c^2 \equiv 1 \pmod 3.$$

Како квадрати $a^2, b^2, c^2$ могу дати само остатак 0 или 1 при дељењу са 3, имамо следеће могућности:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a^2$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $b^2$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $c^2$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $a^2+b^2+c^2$ | 0 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 0 |

На основу ове табеле следи да су два од три проста броја $a, b, c$ једнака 3.

*Први случај.* $a=b=3$. Тада важи, редом, следеће:

$$9k^2-16c^2=17, \qquad (3k-4c)(3k+4c)=17,$$

$$\begin{cases} 3k-4c=1, \\ 3k+4c=17, \end{cases} \qquad \begin{cases} c=2, \\ k=3 \end{cases} \quad \text{и} \quad (a,b,c,k)=(3,3,2,3).$$

*Други случај.* $c=3$. Приметимо да, ако је $(3, b_0, c, k)$ решење дате једначине, тада је и $(b_0, 3, c, k)$ такође решење. Нека је, на пример, $a=3$. Тада дата једначина добија облик

$$9k^2-b^2=152, \quad \text{тј.} \quad (3k-b)(3k+b)=152.$$

Оба фактора су исте парности, па имамо само два могућа случаја:

- $\begin{cases} 3k-b=2, \\ 3k+b=76, \end{cases}$ дакле $\begin{cases} b=37, \\ k=13 \end{cases}$ и $(a,b,c,k)=(3,37,3,13)$;
- $\begin{cases} 3k-b=4, \\ 3k+b=38, \end{cases}$ дакле $\begin{cases} b=17, \\ k=7 \end{cases}$ и $(a,b,c,k)=(3,17,3,7)$.

Дакле, дата једначина има 5 решења:

$$\{(3,3,2,3), (3,37,3,13), (37,3,3,13), (3,17,3,7), (17,3,3,7)\}.$$

**2.** Трансформишимо $A$ као што следи:

$$\begin{aligned} A &= \frac{2-a^3}{a}+\frac{2-b^3}{b}+\frac{2-c^3}{c} = 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-a^2-b^2-c^2 \\ &= 2\cdot\frac{ab+bc+ca}{abc}-(a^2+b^2+c^2) \\ &= 2\cdot\frac{ab+bc+ca}{abc}-((a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)) \\ &= 2\cdot\frac{ab+bc+ca}{abc}-(9-2(ab+bc+ca)) \end{aligned}$$

$$= 2 \cdot \frac{ab+bc+ca}{abc} + 2(ab+bc+ca) - 9$$
$$= 2(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{abc}+1\right) - 9.$$

Користећи сада познату неједнакост $(x+y+z)^2 \geqslant 3(xy+yz+zx)$ са $x = ab$, $y = bc$, $z = ca$, добијамо да је $(ab+bc+ca)^2 \geqslant 3abc(a+b+c) = 9abc$, односно

(1) $$ab+bc+ca \geqslant 3\sqrt{abc}.$$

С друге стране, на основу АГ неједнакости, имамо да је

(2) $$\frac{1}{abc}+1 \geqslant 2\sqrt{\frac{1}{abc}}.$$

Множење обеју страна неједнакости (1) и (2) даје

$$(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{abc}+1\right) \geqslant 3\sqrt{abc}\cdot 2\sqrt{\frac{1}{abc}} = 6.$$

Дакле, $A \geqslant 2\cdot 6 - 9 = 3$, а једнакост важи ако и само ако је $a = b = c = 1$. Значи, тражена минимална вредност је 3.

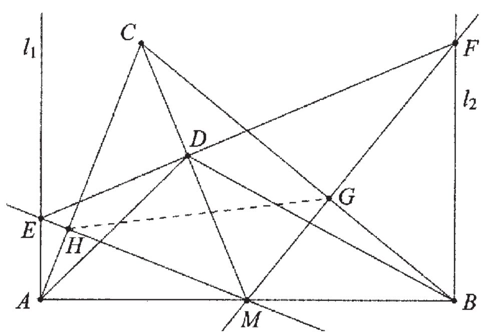
**3.** Означимо са $H$, $G$ пресечне тачке $ME$, $MF$ са $AC$, $BC$, редом (слика). Из сличности троуглова $MHA$ и $MAE$ добијамо да је $\dfrac{MH}{MA} = \dfrac{MA}{ME}$, дакле

(1) $$MA^2 = MH \cdot ME.$$

Слично се на основу сличности троуглова $MBG$ и $MFB$ добија да је

(2) $$MB^2 = MF \cdot MG.$$

Како је $MA = MB$, на основу једнакости (1) и (2) закључујемо да тачке $E$, $H$, $G$, $F$ припадају једној кружници.




Сл. 1

На основу тога имамо да је $\measuredangle FEH = \measuredangle FEM = \measuredangle HGM$. Такође је четвороугао $CHMG$ тетиван, па је $\measuredangle CMH = \measuredangle HGC$. Следи да је

$$\measuredangle FEH + \measuredangle CMH = \measuredangle HGM + \measuredangle HGC = 90^\circ,$$

дакле, $CM \perp EF$. Сада из тетивних четвороуглова $FDMB$ и $EAMD$ добијамо да је $\measuredangle DFM = \measuredangle DBM$ и $\measuredangle DEM = \measuredangle DAM$. Зато су троуглови $EMF$ и $ADB$ слични, па је $\measuredangle ADB = \measuredangle EMF$.

**4.** Показаћемо да играч $A$ побеђује ако је $k \in \{1, 2, 3\}$, али да играч $B$ побеђује за $k = 4$. Дакле, тражена најмања вредност за $k$ постоји и једнака је 4.

За $k = 1$ играч $A$ означава горњи леви угао квадрата и затим га попуњава као на слици лево.


Сл. 2

За $k = 2$ играч $A$ такође означава горњи леви угао датог квадрата. Које год поље да означи играч $B$, играч $A$ може да попуни дати квадрат на исти начин као у претходном случају, осим што не поставља L-фигуру која би покривала поље које је означио $B$. На тај начин играч $A$ побеђује јер је оставио само два поља неозначена.

У случају $k = 3$ играч $A$ побеђује следећи сличну стратегију. Када дођена ред да означи неко поље по други пут, он означава било које поље L-фигуре која (на левој слици) покрива поље које је означио играч $B$.

Покажимо сада да за $k = 4$ играч $B$ има победничку стратегију. Како на крају треба да остане 21 неозначено поље, играч $A$ би морао да све њих покрије са 7 L-фигура. Можемо да претпоставимо да играч $A$ у свом првом потезу није означио неко поље из два доња реда табле (иначе можемо само да таблу окренемо за 180°). У свом првом потезу играч $B$ треба да означи поље 1 на слици десно. Ако играч $A$ у свом другом потезу не означи ниједно од поља 2, 3 или 4, онда $B$ у другом потезу означава поље 3. Играч $B$ побеђује јер је на тај начин поље 2 остало неозначено, али не може да буде покривено неком L-фигуром.

Ако играч $A$ у свом другом потезу означи поље 2, тада играч $B$ означава поље 5. Тако играч $B$ побеђује јер је сада поље 3 неозначено, али не може да се покрије неком L-фигуром.

Најзад, ако играч $A$ у свом другом потезу означи поље 3 или 4, тада играч $B$ означава друго од та два поља. Играч $B$ побеђује јер је опет поље 2 остало неозначено, али не може да буде покривено.

Тиме су сви случају размотрени, те играч $B$ побеђује када је $k = 4$.

Математички факултет, Универзитет у Београду
kadelbur@matf.bg.ac.rs, milosdj@matf.bg.ac.rs