

Др Бранислав Боричић, др Мирјана Илић

**НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ НА ЕКОНОМСКОМ ФАКУЛТЕТУ
У БЕОГРАДУ ОД ОСНИВАЊА ДО ДАНАС**

Настава¹ математике, статистике и ширег спектра квантитативних економских дисциплина које се изучавају на Економском факултету Универзитета у Београду од 1963. године до данашњих дана везује се за Катедру за статистику и математику, када је ова катедра и основана. Од 1951. до 1963. године квантитативне дисциплине су неговане при Катедри за статистику и економику предузећа, а пре тога, у оквиру Катедре за планирање, статистику и евиденцију (в. [1] и [2]). Еволуција присуства математичких садржаја у наставним програмима Економског факултета могла би се пратити кроз најмање четири сегмента: настава математике, настава статистике, настава примењене математике у економији, и настава рачунарства и информатике. У овом чланку ћемо приказати развој првог сегмента, дакле, наставе чистих математичких дисциплина, које су, по правилу, имале своје место као претходница примене богате математичке апаратуре у све захтевнијим економским разматрањима. Експанзију примене математике у XX веку доследно прати њена примена у економској науци (в. [6--9]). Штавише, уколико посматрамо интеракцију између математике и осталих наука, могло би се рећи да је економска проблематика допринела развоју математике у XX веку, бар онолико колико и физика у XVIII веку. Просто, желимо да истакнемо да су друштвене науке пред математику поставиле толико нових изазова да су проузроковале стварање целих нових математичких дисциплина и метода. Истакнимо и то да је Економски факултет једини факултет из поља друштвено-хуманистичких наука Универзитета у Београду на којем се негују и изучавају математички садржаји у оквиру обавезних предмета.

Први наставни план Економско-комерцијалне високе школе основане у Београду 1937. године, из које је, десет година касније, настао Економски факултет Универзитета у Београду, садржао је од квантитативних предмета предмете: Теоријска статистика, Привредна статистика, Трговачка рачуница, Пословна статистика и Привредна рачуница (в. [1, 2, 4]). Нажалост, нису нам били доступни документи на основу којих би било могуће реконструисати и наставне садржаје ових предмета.

Први послератни наставни план садржи предмете: Статистика, Наука о кредитима и осигурању, Привредна математика I (трговачка математика) и Привредна математика II (политика и банкарска рачуница) (в. [1, 2, 4]). Школске

¹ Рад на овом чланку је делом финансирано Министарство за науку и технологију Републике Србије, пројекти број 179005 и ОН 174026.

1951/52. године реализован је нови наставни план у којем се појављују и предмети: Статистика (на I и на II години студија), Привредна математика (на I години), Математска статистика (на III години) и Финансијска математика (на IV години) (в. [1, 2, 4]).

Од школске 1956/57. године у наставним плановима се појављују предмети: Општа статистика, Економска статистика, Математика за економисте, Привредна математика, Математичка статистика, а од школске 1958/59. године, на оба студијска одсека, Одсеку опште економије и Одсеку економије предузећа, имамо предмете Статистика и Математика, где се први пут у наставним садржајима из Математике појављују елементи диференцијалног и интегралног рачуна функција једне промеливе, као и елементи линеарне алгебре (в. [1, 2, 4]).

Од 1960/61. године организују се магистарске и специјалистичке студије као редован облик факултетске наставе. Тада имамо и прве студенте уписане на студијски програм Операциона истраживања.

Почев од школске 1966/67. године у наставном плану имамо већ јасно конципиране са савременим садржајима предмете: Математика I (са фондом часова предавања 60 и вежби 90), Статистика I (90+60), Математика II (60+60), Статистика II (60+60), Економско-математички методи и модели (60+60), Кибернетика (60+60), Статистика III (60+60), Операциона истраживања (60+60), Програмирање за електронске рачунаре (30+30). Тим наставним планом је формиран и смер Економске статистике и кибернетике, који је био изразито квантитативно оријентисан (в. [1, 2, 4]). Од 1971/72. године успоставља се на магистарским студијама програм Статистичка анализа у економији, који, под другим, али сличним називима, егзистира до данашњих дана.

Наставни план од 1977/78. године укључује Математику за економисте (60+90), Основе статистичке анализе (60+60), Економску статистику (60+60), Пословну статистику (30+15), Линеарну алгебру и теорију вероватноће (60+90), Економско-статистичку анализу (60+60), Увод у кибернетику (30+30), Економетрију (60+60), Математичке методе и моделе (60+60), Теоријску статистику (60+60), Програмирање за електронске рачунаре (60+60), Финансијску математику (30+30), Операциона истраживања (60+60), Економску кибернетику и теорију информација (60+60), Теорију узорака и планирање експеримената (60+60), Анализу временских серија (30+15), Статистичку контролу квалитета (30+15), Истраживање тржишта (30+30), Кибернетска организација електронског рачунског центра (60+60), Теорија динамичких серија (30+15), Финансијско математичка анализа (30+15) и Актуарска математика (60+60) (в. [3--5]). Овом приликом долази и до иновирања градива на магистарским студијама када се у програме математичких предмета уносе садржаји из Теорије мере и Теорије непокретне тачке.

Модификације овог наставног плана, које су уследиле школске 1987/88, 1997/98, 2000/01. године доносе као нове квантитативне предмете: Кибернетика (60+30), Пројектовање информационих система (45+30), Математичка економија (60+30), Анализа временских серија, и мултиваријациона анализа (60+15), Пословна информатика (60+30), Теорија система (60+30) (в. [10, 11, 12]).

Данашњи студијски програми основних академских студија су базирани на наставном плану из 2000/01. године, модификованом 2006/07. и 2013/14. године (в. [10--14]), и садрже теме које раније нису биле део стандардних курсева за студенте економије. Наиме, стални растући захтеви економске теорије, доводе до тога да се и садржај математике, која се изучава на основним студијама, према томе, стално унапређује.

У оквиру предмета Математика, који је обавезан за студенте свих модула и похађа се у првом семестру прве године студија, са фондом часова $60 + 60$, обрађују се следеће теме: Основни појмови математике, Елементи линеарне алгебре, Низови и редови, Увод у теорију реалних функција једног аргумента, Елементи диференцијалног рачуна, Неодређени, одређени и несвојствени интегрални, Функције више променљивих, Двојни интегрални, Диференцијалне једначине, Елементи теорије вероватноће и Елементи финансијске математике. Садржаји ових тема, по правилу су конципирани тако да знања и вештине стечене на овом нивоу, омогућу лако праћење и разумевање економске проблематике на вишим нивоима студија. Даћемо неке примере.

У економским моделима, описаним системом линеарних једначина, веома важан податак је када такав систем има решења и када је то решење јединствено. Општи услови за постојање и егзистенцију решења система линеарних једначина, најједноставније су изражени појмом линеарне независности, уз који иде и појам ранга матрице. Ове идеје, као и последице које оне имају на решавање система линеарних једначина (Кронекер-Капелијева теорема), уз Гаусову, Матричну методу и Крамерово правило за решавање система линеарних једначина, чине низ тема које се обрађују у оквиру садржаја: Елементи линеарне алгебре.

У рачунима интереса, основни математички појмови су појам бројног низа и појам бројног реда. У оквиру теме: Низови и редови, осим дефиниције ових појмова, уводе се и појмови конвергенције и обрађују се неки важнији критеријуми конвергенције низова и редова.

Функције представљају централни појам у готово свим областима чисте и примењене математике, укључујући и примену математике у економији. Због тога изучавање функција заузима централно место у оквиру предмета Математика. Уводе се појмови граничне вредности и непрекидности функције, а затим се, кроз појмове првог извода и диференцијабилности функције, дају основни елементи диференцијалног рачуна. Осим правила диференцирања, логаритамског диференцирања, геометријске интерпретације извода и основних теорема диференцијалног рачуна, које укључују Фермаову, Ролову, Лагранжову, Кошијеву и Лопиталову теорему, обрађује се и испитивање функције помоћу извода и скицирање графика функције. Како је код испитивања понашања сложених функција често корисно апроксимирати функцију полиномом, за који је веома важно знати и грешку те апроксимације, даје се Тејлорова теорема, као један од најважнијих резултата у тој области. Будући да се осим експлицитно задатих функција, у економским моделима функције дефинишу и имплицитно и параметарски, студенти економије уче и поступак за диференцирања овако задатих функција.

У оквиру теме Неодређени, одређени и несвојствени интегрални, најпре се

уводе појмови одређеног, неодређеног интеграла и примитивне функције, дају се таблица неодређених интеграла и основна правила интеграције, и обрађују се методе за решавање неодређених и одређених интеграла: непосредна интеграција, метода смене и метода парцијалне интеграције. Све ове методе, затим се примењују на интеграцију рационалних, неких тригонометријских и неких ирационалних функција. За одређени интеграл даје се геометријска интерпретација и веза са неодређеним интегралом (Њутн-Лајбницова формула), а примена се излаже кроз примере израчунавања површина ликова. На крају се дефинишу несвојствени интегрални критеријум, илуструје примена несвојственог интеграла на испитивање конвергенције редова.

Функције које се изучавају у економији зависе од више променљивих, бруто домаћи производ, на пример. Због тога је једна значајна тема посвећена функцијама више променљивих и двојним интегралима. Студенти се најпре упознају са појмом Еуклидовога n -димензионог простора, у којем се дефинишу отворени и затворени скупови, а затим и функције више променљивих. Појмови граничне вредности и непрекидности се проширују и на функције више променљивих, а затим се дефинишу парцијални изводи и уводе се појмови диференцијабилности и тоталног диференцијала првог и другог реда. Даје се и Тејлорова формула за функције више променљивих. Значајан део економске анализе заснива се на теорији оптимизације, што се у случају функције више променљивих, своди на проналажење локалних екстремних вредности функције и њених седластих тачака. У неким случајевима се захтева и да екстремне вредности задовољавају дате услове, тј. да припадају задатом скупу допустивих вредности. Тада је реч о условним екстремима. У оквиру анализе функција више променљивих, обрађују се оба поступка: поступак за проналажење локалних екстрема и поступак за проналажење условних локалних екстрема функције више променљивих. Разматрају се и двојни интегрални, њихове основне особине, а примена се илуструје кроз израчунавање површина ликова и запремине тела.

Економисти често проучавају промену вредности неке економске величине, кроз време. Те промене се обично задају помоћу једне једначине или више њих. Ако у једначинама фигурише непозната функција и њени изводи (у непрекидном времену), онда је реч о диференцијалним једначинама. Због тога се на самом почетку студија, у првој години, студенти економије упознају и са овим математичким појмом. Обрађују се диференцијалне једначине првог реда (једначина која раздваја променљиве, хомогена, линеарна и Бернулијева) и неки типови диференцијалних једначина другог реда.

Примена статистике у економији је незаобилазна. Као увод у ту проблематику, у оквиру предмета Математика, дефинишу се појмови случајног догађаја, вероватноће, условне вероватноће и независних догађаја, да би се на крају дала и Бајесова формула за вероватноћу хипотеза.

На самом крају курса, уводни економски појмови, попут капитала, интереса, номиналне и ефективне интересне стопе и стопе раста акумулације, сагледавају се кроз призму математичких модела у рачуну простих и рачуну сложених интереса.

Други предмет, Математика 2, похађа се током треће године студија, у зимском семестру, са фондом часова 60+60, и обавезан је предмет за студенте модула Статистика, информатика и квантитативне финансије. За праћење овог предмета неопходна су основна знања из математичке анализе и линеарне алгебре, стечена у оквиру предмета Математика. Иако неке теме, које се обрађују у оквиру предмета, нису део уобичајених програма Математике на економским факултетима, оне су уврштене у програм, јер се односе на математички апарат који је потребан за праћење и разумевање стручних предмета на вишим годинама студија овог модула. У оквиру предмета, обрађују се следеће теме: Основни појмови логике и алгебре, Напредније теме линеарне алгебре, Ојлерови интегрални, Теорија вероватноћа и Принцип непокретне тачке.

На почетку курса студенти се упознају са основним појмовима математичке логике, појмовима исказа и предиката, а затим и појмом модела, који несумњиво има велику примену у свим емпиријским наукама, а посебно у економији. Уопштењем појма модела, природно се затим долази до појма алгебарске структуре и дефинишу се полугрупа, група, прстен, поље и Булова алгебра, као и најзначајнија пресликавања алгебарских структура, хомоморфизми. Затим се уводи појам пребројивости, са посебним освртом на небројивост скупа реалних бројева, и појмови ординала и кардинала. Како се последњих година убрзано развијају нове гране економије, које се у великој мери заснивају на Теорији израчунљивости, попут Израчунљиве економије, Израчунљиве теорије избора, Израчунљиве теорије игара, Израчунљиве макроекономије и микроекономије, на самом крају ове секције, дефинишу се и основни појмови у овој области, и то, појмови алгорита, израчунљивости и одлучивости.

С обзиром на значајну примену вектора у економији, а само једна од њих је, на пример, у проучавању стабилности система диференцијалних и диференцијалних једначина којима се, у економским моделима, описује промена вредности променљивих кроз време, део тема линеарне алгебре односи се на векторе и њихова својства. Уводе се појмови векторског простора, линеарне зависности вектора, базе и димензије векторског простора, скаларног производа, а у вези са тим и појмови ортогоналних вектора, ортогоналне трансформације и ортонормираних система. Многи практични проблеми, а посебно у динамичкој економији, захтевају израчунавања степена квадратних матрица великих димензија, односно израчунавање производа облика $A^n X$, где је A квадратна матрица, n природни број, а X не-нула вектор. Јасна је онда и мотивација за увођење појма сопственог вектора и сопствене вредности.

У економским моделима се често појављују и матрице великих димензија. Да би се сагледала структура таквих матрица и олакшао рачун у таквим моделима, користе се методе за деобу матрице на повољно изабране подматрице, такозване блокове. У оквиру ове секције, обрађује се подела матрица на блокове и, у вези са тим, и Кронекеров производ две матрице произвољног типа, чији је резултат једна таква, у блокове подељена матрица. Уводе се појмови симетричне, кососиметричне, идемпотентне, хермитске и ортогоналне матрице. С обзиром на важност питања оптимизације у многим економским моделима, који подразумева

проналажење екстремних вредности функције једне или више променљивих, а који је у вези са проблемом одређивања знака квадратне форме, на самом крају ове секције се, у вези са тим, дефинишу семидефинитне и дефинитне матрице и даје се поступак за диференцирање матрица.

Теорија вероватноћа је следеће поглавље које се изучава у оквиру предмета Математика 2. Након кратког репетиторијума уводних појмова, који се обрађују у оквиру предмета Математика, уводи се појам случајне променљиве дискретног и непрекидног типа и дефинише њена функција расподеле и функција густине вероватноћа. Затим се дефинише математичко очекивање, дисперзија и моменти, и дају неки типови расподела: Бернулијева, Пуасонова, хипергеометријска, геометријска, негативна биномна, униформна, експоненцијална и Гаусова нормална расподела. У вези са последњом, Гаусовом расподелом, је и Ојлеров интеграл друге врсте, односно гама-функција, због чега је неколико часова посвећено и Ојлеровим интегралима прве и друге врсте, дакле бета- и гама-функцији. У наставку ове секције, дефинишу се и функције генератрисе вероватноћа и функције генератрисе момената, као и карактеристична функција.

Мост између теорије вероватноћа и њене примене у реалном свету чини низ теорема, познатих под називом Граничне теореме. Оне дају услове за различите врсте конвергенције низа случајних променљивих. У оквиру ове секције, дају се Чебишевљева неједнакост, слаби, Борелов строги и Колмогоровљев строги закон великих бројева, као и Централна гранична теорема.

На крају курса, имајући у виду значај непокретне тачке у математичкој економији, дефинише се појам непокретне тачке функције и у вези са тим, даје се неколико теорема, које су највише заступљене у економији. Једна од њих, Браурова теорема, још је једно у низу математичких открића до којег се дошло изучавањем једног проблема, овде изучавањем тополошких разлика међу скуповима простора \mathbf{R}^n , за које се касније показало да има значајну примену и у другим областима, не само математике. Наиме, Браурова теорема се користи у доказу постојања еквилибријума у економији чисте размене.

На последипломским мастер студијама, студенти студијског програма Квантитативна анализа, модула Актуарство, Статистика, Економетрија, Информатика, Операциона истраживања и Демографија, похађају предмет Математика који покрива делове логике, апстрактне и линеарне алгебре, теорије мере, теорије диференцијалних и диференцијалних једначина, теорије специјалних функција и теорије непокретне тачке. Иако се неке теме, које се на основним студијама похађају у оквиру предмета Математика 2, појављују и као теме предмета Математика на мастер студијама, оне се, с обзиром на стечено знање из економије, на овом нивоу студија јасније повезују са решавањем захтевнијих економских проблема.

На почетку, студенти се кроз логичке системе и релацију дедукције, упознају са принципима формалног закључивања и указује им се на грешке које у економским моделима могу настати, ако се ти принципи не следе. Обрађују се и следеће теме логике: Независност аксиома, Класична логика исказа, Кардинални бројеви и Егзистенција непребројивог скупа, као и Елементи теорије израчунљивости. Дефинише се алгебра скупова и дају се модели алгебарских теорија, као и де-

финиције хомоморфизма и изоморфизма. Проширује се појам скупа и дефинишу се расплнати скупови, а затим и расплнуте релације и системи. Уводе се векторски простори, линеарни оператори, специјалне матрице, квадратне форме. Дају се основни појмови и својства Еуклидског n -димензионог простора, дефинише еуклидска норма, и у вези са тим, дају се основне неједнакости: Хелдера, Минковског и Коши-Буњакоковскиј-шварцова.

Теорија вероватноћа се темељи на теорији мере, због чега се студентима на овом нивоу студија, даје преглед основних елемената Теорије мере, закључно са одговарајућим појмом интеграла. Дефинишу се системи (фамилије) скупова, функције на тим системима, Лебегова мера, уз пример немерљивог скупа, уводе се појмови мерљиве функције, једноставне функције и дефинише њен Лебегов интеграл, и коначно, уводи се појам Лебеговог интеграла произвољне функције, на скупу коначне мере. Дефинише се ентропија и показује се да је она мера неодређености неког стохастичког система.

Многе економске категорије, попут дохотка, штедње, потрошње, прате се у неким фиксним временским интервалима (на пример, дневно, недељно, месечно, годишње). Једначине које описују ове промене у дискретним временским интервалима, су диферендне једначине. Са друге стране, диференцијалне једначине описују промене у непрекидном времену. У оба случаја, веома важно је питање егзистенције еквилибријума, односно стационарног стања. Оно одговара решењима једначине, која се не мењају кроз време. Дефинише се појам стабилности у непрекидном и дискретном окружењу, као и појам асимптотске стабилности диференцијалних и диференцијалних једначина.

На изразито математизираним мастер курсу из Квантитативних финансија, на којем се настава изводи на енглеском језику, у оквиру предмета Математика и моделирање у финансијама, обрађују се, поред стандардних тема из линеарне алгебре и теорије реалних функција једне променљиве, и проблеми оптимизације реалних функција више променљивих, као и елементи нумеричке анализе, при чему се сви ови концепти илуструју примерима примена у финансијској анализи.

На мастер и докторским студијама са изучава и предмет Методологија научног истраживања, чијим садржајем доминира материја из области Математичке логике и њених примена у економској науци. Централни појмови општег дела су појмови логичког система и непротивречности научне теорије, полазећи од свих предности аксиоматског метода. У примењеном делу обрађују се логике преференција Фон Рајта (G. H. von Wright) и теореме немогућности Ероуа (K. Arrow) и Сена (A. Sen). На докторским студијама постоји и предмет под називом 'Математика', чији се садржај прилагођава потребама и усмерењу кандидата. Поред тога, заступљени су и садржаји из Теорије вероватноћа, Теорије узорака и Статистике.

Својим непосредним ангажовањем у извођењу наставе Математике, као и писањем одговарајућих учила намењених студентима, подсећамо на непроцењиви допринос следећих математичара: Слободан Аљанчић, Милосав Марјановић, Славиша Прешаћ, Мирко Стојаковић, Ковина Ракочевић, Бранко Вулићевић, Рајко Ралевић, Миодраг Ивовић, Милица Анђелковић, Драган Симеуновић,

Бранислав Боричић, Љиљана Петровић, Слободан Вујосевић, Весна Мушички Ковачевић, Пава Животић, Велимир Павловић, Јаков Црнковић, Мирјана Борисављевић, Мирјана Илић, Ирена Спасић, Драган Аздејковић, Владимир Балтић, Јелена Станојевић, Весна Рајић, ...

Поред учешћа у настави чисто математичких дисциплина, што је централна тема овог рада, математичари су својим ангажовањем допринели и унапређењу других дисциплина које се негују на Економском факултету у Београду. Посебно је драгоцено њихово присуство у развоју статистике (Бранислав Ивановић, Томислав Зечевић, Небојша Марић, Владислав Милошевић, Љиљана Петровић, Миладин Ковачевић, Весна Рајић, Јелена Станојевић), математичког моделирања, финансија и актуарства (Видоје Веселиновић, Драгиша Стојановић, Рајко Ралевић, Милка Турки, Миодраг Ивовић, Бранислав Боричић, Бојан Поповић, Мирослав Павловић, Драган Аздејковић, Младен Стаменковић), као и рачунарства и информатике (Недељко Парезановић, Бранко Вулићевић, Јаков Црнковић, Раде Станкић, Драган Стевановић).

Овом приликом захваљујемо старијим колегама, професорима Миодрагу Ивовићу и Бранку Вулићевићу на драгоценим информацијама које су нам пружили током прикупљања грађе за овај чланак.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Б. Шошкић (ред.), *30 година Економског факултета у Београду*, Економски факултет, Београд, 1967.
- [2] Ж. Костић (ред.), *40 година Економског факултета у Београду*, Економски факултет, Београд, 1977.
- [3] *Информативни приручник*, Економски факултет, Београд, 1978.
- [4] Д. Радунковић (ред.), *50 година Економског факултета у Београду*, Економски факултет, Београд, 1987.
- [5] М. Милисављевић (ред.), *60 година Економског факултета у Београду*, Економски факултет, Београд, 1997.
- [6] В. Н. Baltagi, *The mathematical aspects of econometrics*, in: *Mathematics Unlimited—2001 and Beyond*, В. Engquist, W. Schmid (eds.), Springer, Berlin, 2001, pp. 67–81.
- [7] М. Davis, *Mathematics of financial markets*, in: *Mathematics Unlimited—2001 and Beyond*, В. Engquist, W. Schmid (eds.), Springer, Berlin, 2001, pp. 361–380.
- [8] Р. Hall, *Statistical science—evolution, motivation and direction*, in: *Mathematics Unlimited—2001 and Beyond*, В. Engquist, W. Schmid (eds.), Springer, Berlin, 2001, pp. 565–575.
- [9] С. Klüppelberg, *Development in insurance mathematics*, in: *Mathematics Unlimited—2001 and Beyond*, В. Engquist, W. Schmid (eds.), Springer, Berlin, 2001, pp. 703–722.
- [10] В. Ђолевић, Б. Церовић (ред.), *Студије на Економском факултету, Наставни план и програми*, Економски факултет, Београд, 2001.
- [11] *Последипломске студије*, Економски факултет, Београд, 2001.
- [12] Б. Боричић (ред.), *Наставни план и програм четворогодишњих студија*, Економски факултет, Београд, 2001.
- [13] Б. Церовић (ред.), *Економски факултет, Универзитет у Београду, 70 година, традиција и развој*, Економски факултет, Београд, 2007.
- [14] Б. Церовић (ред.), *Економски факултет, Универзитет у Београду, 75 година, традиција и развој*, Економски факултет, Београд, 2012.

Универзитет у Београду, Економски факултет, Каменичка 6, 11000 Београд

E-mail: boricic@ekof.bg.ac.rs; mirjanailic@ekof.bg.ac.rs