НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ
LIX, 4 (2014), 1–16

Др Милосав М. Марјановић

ЈЕДАН ПРИСТУП ИЗВОЂЕЊУ НАСТАВЕ АРИТМЕТИКЕ, IV

Апстракт. У овом, четвртом наставку нашег чланка, проширује се блок бројева до 20 на блок бројева до 100. Поступак проширења иде редом, по десетицама прве стотине, па се збировима са већ утемељеним значењем, додељуују цифарски записи са којима се једначе: $20 + 1 = 21$, $20 + 2 = 22$, ..., $20 + 10 = 30$, итд. Поступци сабирања и одузимања двоцифрених бројева темеље се на иконичким представама које сугеришу активности са слагалицама којима представљамо ове бројеве. Инспирисани идејама Џ. Брунера, ове поступке реторички изражавамо у виду наративних правила – сабирамо јединице са јединицама, а десетице са десетицама и одузимамо јединице од јединица, а десетице од десетица.

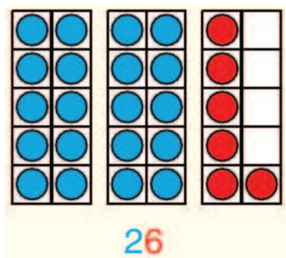
Разумевање рачунских поступака захтева њихово разлагање на више корака, а ти кораци се изражавају симболички и реторички. Аутоматско извођење захтева компресију тих корака, што прати врло сажето изражавање, најчешће у виду унутрашњег говора. Истраживања Л. Виготског особина и функција унутрашњег говора инспиришу нас да улогу тог говора сагледамо у настави математике и да скренемо пажњу наставника на значај тог упрошћеног изражавања.

У основи множења као операције стоји мултипликативна схема уз коју се формулише задатак множења и то изражава састављањем одговарајућег производа. Главни дидактички задатак техничке природе у овом блоку је изградња таблице множења, а што ми овде разрађујемо са свим потребним детаљима. Уместо притиска на ученике да меморишу таблицу множења, ми предлажемо учење поступака којима се ова таблица изграђује. Дакле, кад ученик не памти вредност неког производа, умеће да то брзо израчуна.

11. Блок бројева до 100. Сабирање је стекло свој смисао прво у оквиру блока бројева до 10 а затим и у блоку до 20, као активност која почиње уочавањем (стварањем представе о) два дисјунктна скупа чију бројност записујемо цифарски, а бројност чије уније записујемо као збир та два цифарска записа. Тако записи као што су $17 + 15$, $20 + 10$, $20 + 20$ итд. стекли су одређен смисао, на пример, $17+15$ је запис који везујемо за представу о два дисјунктна скупа (две гомилице, две слагалице) од којих један (једна) има 17 а други (друга) 15 елемената, док са $17 + 15$ означавамо број елемената њихове уније (њихових унија). Но, наравно, у оквиру блока бројева до 20, за број који означавамо са $17 + 15$ немамо његов цифарски запис, па је одређивање бројевне вредности таквог израза (тј. једначење таквог израза са његовим цифарским записом) ван пакета дидактичких задатака везаних за овај блок. Зато се записи са вредношћу ван блока бројева до 20 (а то је раније био случај и са блоком бројева до 10) систематски изостављају. Присетимо се да смо збирове облика $10+1$, $10+2$, ... краће (цифарски) записивали као 11, 12, ... и читали као једанаест, дванаест, ... што је био начин како смо формирали блок бројева до 20 као проширење блока бројева до 10.

Код проширења блока бројева до 20 јавља се следећа дилема – да ли прво проширивати десетицама (30, 40, ... , 100) или збировима облика $20+1$, $20+2$, ... , $20+10$. У првом случају рачунање са десетицама је аналогно рачунању са бројевима из блока до 10, док се у другом случају проширује поступак бројања као најосновнији вид оперисања са бројевима. Опредељујући се за овај други начин проширивања као онај који је донекле природнији и директно везан за адитивну структуру блока бројева до 20, изложићемо детаље скицирајући тако дидактичке процедуре које би биле одговарајуће у реалној настави.

Збирове $20+1$, $20+2$, ... , $20+10$ означавамо краће као 21, 22, ... , 30 и ове записе читамо двадесет један, двадесет два, ... , тридесет. Једначењем два записа истих бројева пишемо $20+1=21$, $20+2=22$, ... , $20+10=30$. Представљајући слагалицама, на пример, број 26:



Слика 39

видимо да га чине *2* десетице и **6** јединица, а што је укупно 26 јединица. Да бисмо јаче, а не само местом писања, истакли цифру која означава број десетица писаћемо је *курзивом* (као замена за плаво), а ону која означава број јединица „**масно**“ (као замена за црвено).

На сличан начин, уз учешће ученика, наставник обрађује бројеве 31, 32, ... , 40 а затим преостале десетице обрађује у виду питања и вежби. Читање бројева 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 мора бити правилно јер се ти називи скраћују и тако неправилно изговарају у свакодневном говору. Типичне вежбе уз ову врсту садржаја биле би попут ових:

(а) *Број 78 састоји се од ___ десетица и ___ јединица. Реци како замишљаш слагалицу којом представљамо овај број.*

(б) *Број 80 састоји се од ___ десетица и ___ јединица. Реци како замишљаш слагалицу којом представљамо овај број.*

Итд.

Најједноставнији случајеви сабирања у овом блоку су једначења збирова десетица и јединица са њиховим цифарским записима. Затим долази сабирање самих десетица Ту се путем слагалица илуструју десетице као декадне јединице чије је сабирање аналогно сабирању јединица у блоку бројева до 10. Ову аналогију истичу вежбе у којима се спарују збирови десетица и одговарајући збирови бројева до 10. То би биле вежбе попут ових:

$4 + 3 = \_\_\_$, $40 + 30 = \_\_\_$, $5 + 4 = \_\_\_$, $50 + 40 = \_\_\_$, итд.

Док се сабирају десетице говори се, на пример, 4 десетице и 3 десетице су 7 десетица, 5 десетица и 4 десетице су 9 десетица, итд. Слично се обрађује и одузимање десетица.

У случају рачунања збирова и разлика произвољних бројева из блока до 100, ослањаћемо се на два правила о чијој је природи потребно нешто више рећи, а чему посвећујемо наш следећи параграф.

11.1. Наративне форме. Инспирисани идејама Џ. Брунера изложеним у његовим књигама: J. Bruner, The Acts of Meaning, Harward Universiti Press, 1990 и J. Bruner, The Culture of Education, Harward University Press, 1996, ми ћемо називати *наративним правилима* оне реторичке облике који описују нека својства или процедуре на један сугестиван али не и сасвим прецизан начин. Овде ћемо навести два наративна правила која се односе на сабирање и одузимање двоцифрених бројева и служе да се ове оперције на тај начин подстичу, нарочито у случајевима кад се оне изводе у компресираном облику.

Тако кад формулишемо правило: сабирамо јединице са *јединицама и десетице са десетицама*, ми подстичемо поступке рачунања као што је, на пример,

$$34 + 52 = (30 + 50) + (4 + 2) = 80 + 6 = 86.$$

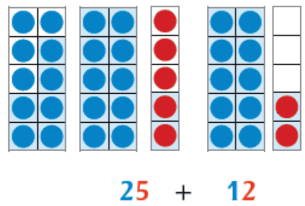
Али овај поступак остаје недоречен у случајевима кад преносимо десетицу, а остају недоречени и други међукораци чије би истицање успоравало ову процедуру и сметало њеном аутоматском извођењу. На пример, код збира $34 + 52$ изостаје међукорак где се сабирци разбијају на збирове: $34 + 52 = (30 + 4) + (50 + 2)$, па затим долази здруживање сабирака где се назначи сабирање десетица са десетицама а јединица са јединицама, тек одакле почиње примена овог правила.

Слично сабирању, код извођења поступка одузимања у компресираном облику, руководимо се правилом: *одузимамо јединице од јединица и десетице од десетица.*

Опет нагласимо да операције сабирања и одузимања имају перманентно исто значење које се темељи на идеји о адитивној схеми и задацима сабирања или одузимања који је прате, па те операције не треба поистовећивати са техничким поступцима путем којих збирове и разлике бројева до 100 изражавамо цифарски.

11.2. Обрада поступака сабирања и одузимања у блоку бројева до 100. У реалној настави увек је добро почињати са илустрацијама поступака рачунања који се обрађују, јер видети значи разумети на најбољи начин. Почнимо са неким примером, рецимо одређивањем цифарског записа за збир $25 + 12$ (сл. 40).

Наставник усмерава пажњу ученика на слагалице и коментарише: „Прво погледајмо слагалице где једна представља број 25 као 2 десетице и 5 јединица а друга број 12 као 1 десетицу и 2 јединице. Заједно, оне представљају збир $25+12$. Кад групишемо „десетице“ са „десетицама“ и „јединице“ са „јединицама“ , имамо 3 „десетице“ и 7 „јединица“, а то је 37 кружића“. (Наводници стоје уз термине десетице и јединице да означе слагалице кружића а не бројеве).



Слика 40

Интерпретирање сликом и изражавање поступка симболички писањем низа једнакости (као уз сл. 41) води потпуном разумевању овог поступка. У реалној настави тако би се рачунали збирови, прво у случајевима кад се не преноси десетица и кроз примере који би били програмирани (са захтевом да ученик испуњава празна места означена држачима):

$$46 + 33 = (40 + 30) + (6 + 3) = \underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad},$$

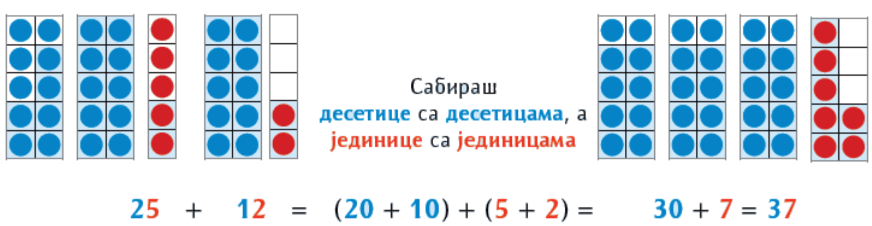
итд. до примера где се само назначавају места за испуњавање и тако саставља схема поступка, као на пример:

$$54 + 35 = (\underline{\quad} + \underline{\quad}) + (\underline{\quad} + \underline{\quad}) = \underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}, \text{ итд.}$$

Овакво рашчлањивање сигурно води већем разумевању рачунских поступака али, познато је да ученици лакше усвајају поступке где се међукораци компресују , па се јавља дилема да ли и у коликој мери инсистирати на потпуном разумевању. Неко могуће опредељење мора бити зависно од плана и програма али, начелно, и од тога журимо ли и зашто да што пре научимо ученике да добро рачунају.

Ми се о питањима зависним од спољних фактора нећемо овде бавити, него ћемо изложити један пример обраде овог поступка са сажимањем међукорака. У овом случају разумевање се веже за слике (тј. оно је употпуности на нивоу интиуције) па обрађујући исти предходни пример имамо:

Посматрај слику:



Слика 41

Коментар наставника може да иде овако: „Видимо две слагалице, једна представља број 25 као 2 десетице и 5 јединица а друга број 12 као 1 десетицу и 2 јединице, док заједно оне предствљају збир 25 + 12. Групишемо „десетице“ са „десетицама“ па их имамо 3 и „јединице“ са „јединицама“ па их имамо 7. Нова слагалица представља број 37. Гледа се једнакост

$$\mathit{2}\mathbf{5} + \mathit{1}\mathbf{2} = \mathit{3}\mathbf{7}$$

па се каже: „**5** јединица и **2** јединице су **7** јединица (пишемо **7**), *2* десетице и *1* десетица су *3* десетице (пишемо *3*)“.

Прве вежбе могу бити са цифрама „у боји“:

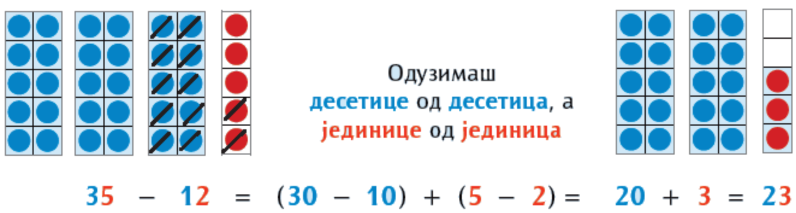
$$\mathit{2}\mathbf{2} + \mathit{4}\mathbf{7} = \_\,\_,\ \mathit{4}\mathbf{3} + \mathit{4}\mathbf{5} = \_\,\_, \text{ итд.}$$

а затим се даје одређен број вежби типа:

$$61 + 28 = \_\_\_,\ 56 + 33 = \_\_\_, \text{ итд.}$$

Код одузимања, прво се увежба одузимање десетица: $7 - 4 = 3$, $70 - 40 = 30$, итд. да би се прешло на поступак одузимања без позајмљивања десетице. Обрада је слична случају сабирања:

Посматрај слику:



Слика 42

Наставник коментарише: „Видимо да од слагалице коју чине 3 „десетице“ и 5 „јединица“ треба да се одузме слагалица коју чине 1 „десетица“ и 2 „јединице“ Уклањамо 2 „јединице“ од 5 „јединица“ па остају 3 „јединице“ , а затим од 3 „десетице“ 1 „десетицу“, па остају 2 „десетице“, а то су 23 кружића.“

Кад овај поступак одузимања записујемо симболички са свим међукорацима, он би био представљен овако:

$$35 - 12 = (30 + 5) - (10 + 2) = (30 - 10) + (5 - 2) = 20 + 3 = 23,$$

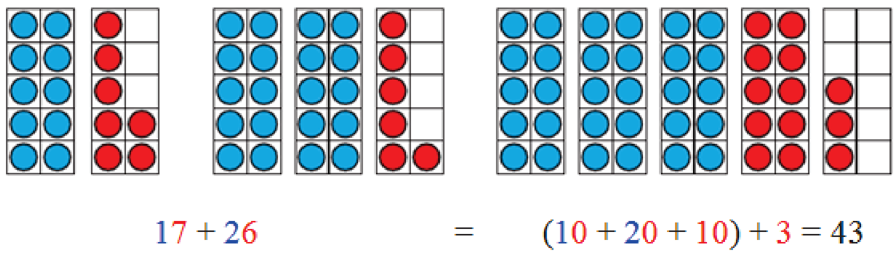
где би се примењивало правило одузимања збира од збира, а што не би било врло прихватљиво да ученике оптерећујемо једним таквим правилом.

Кад се сабирају два двоцифрена броја чији је збир јединица 10 или више, а то изражавамо симболички, два пута ћемо применити наративно правило – сабирамо јединице са јединицама а десетице са десетицама. На пример, један такав збир овако рачунамо:

$$17 + 26 = (10 + 20) + (7 + 6) = 30 + 13 = (30 + 10) + 3 = 40 + 3 = 43.$$

Овакав поступак није најбоља основа да га компресујемо, па је његово илустровање коришћењем слагалица бољи пут обраде. Посматрајмо преслагање које слагалице у примеру на слици 43 илуструју.

Коментар наставника вербално уобличава овај поступак: „Прве две слагалице представљају збир $\mathit{1}\mathbf{7} + \mathit{2}\mathbf{6}$, па кад „јединице“ скупимо заједно добијамо **1** црвену „десетицу“ и **3** „јединице“. Укупно „десетица“ ће бити $\mathit{1} + \mathit{2} + \mathbf{1}$, а то су 4 „десетице“ и још имамо 3 „јединице“ , па је $17 + 26 = 43$.



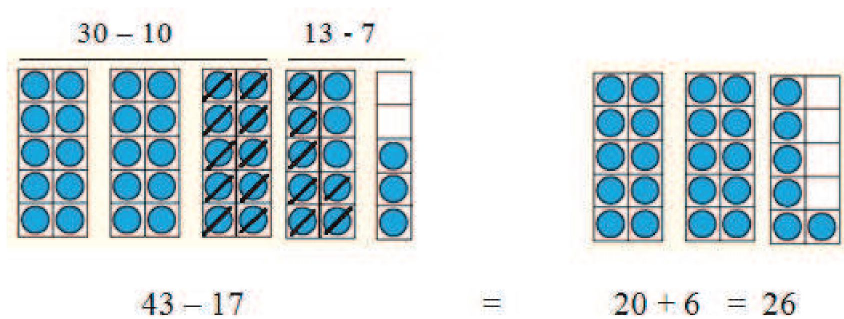
Слика 43

Један број вежби сабирања са хоризонталним записивањем збирова треба урадити:

$$24 + 48 = \_\_\_,\ 24 + 46 = \_\_\_,\ 58 + 33 = \_\_\_, \text{ итд.}$$

а брзом рачунању са компресијом међукорака посветићемо параграф 11.3.

Одузимање са позајмљивљњем десетице интерпретира се слагалицама на следећи начин:



Слика 44

Пратећи коментар би био: „Видимо да је умањеник представљен са 4 „десетице" и 3 „јединице", док умањилац представљају 1 „десетица" и 7 „јединица" (прецртани кружићи). Како не можемо да одузмемо 7 од 3, позајмљујемо 1 „десетицу" од умањеника тј. видимо је као 10 „јединица" па од 13 „јединица" одузимамо њих 7: $13 - 7 = 6$. У умањенику остаје 1 „десетица" мање, па се од преосталих 3 одузима 1 „десетица" умањиоца". Записујући овај поступак, имамо:

$$43 - 17 = (30 - 10) + (13 - 7) = 20 + 6 = 26.$$

Један број програмираних вежби, као што су:

$$52 - 38 = (40 - 30) + (12 - 8) = \_\_\_ + \_\_\_ = \_\_\_,$$

$$64 - 47 = (50 - \_\_\_) + (14 - \_\_\_) = \_\_\_ + \_\_\_ = \_\_\_,$$

$$81 - 55 = (\_\_\_ - \_\_\_) + (\_\_\_ - \_\_\_) = \_\_\_ + \_\_\_ = \_\_\_, \text{ итд.}$$

служи потпунијем усвајању ове методе.

Напоменимо да вербално уобличавање оваквих поступака рачунања не треба схватити као наметање њиховог начина извођења јер је то опис онога што се види као једна активност, а то је реторичко изражавање које иде паралелно са симболичким. Оно је такође основа која, упрошћавањем, прелази у унутрашњи говор који прати аутоматско извођење операција, а о чему говоримо у наредном параграфу.

11.3. Унутрашњи говор и аутоматско извођење рачунских операција. Према Л. Виготском, егоцентрични говор детета не нестаје него се трансформише у *унутрашњи говор*. Тако се назива то нечујно везивање мисли и речи које тече у нама у виду упрошћене верзије реалног говора у којој се често изостављају субјекти, „огољују“ предикати и такве крајње поједностављене форме говора везују се за ситуације о којима се говори. (Видети књигу Лав Виготски, Мишљење и говор, Нолит, Београд, 1977).

Налазимо да и у математици, а овде посебно у аритметици, аутоматско извођење рачунских поступака такође прати унутрашњи говор на чији развој треба утицати у токовима наставе. Права места за то, у оквиру овог блока бројева, су вертикално сабирање и одузимање, а што су традиционални термини за поступке сабирања и одузимања двоцифрених бројева кад сабирке, односно умањеник и умањилац пишемо један испод другог са цифрама јединицама у једној а цифрама десетицама у другој колони. Узећемо један пример сабирања и један одузимања и пратити упрошћавање говора којим описујемо ове поступке све до његових елиптичних форми које служе за подстицање ових поступака.

Узмимо, на пример:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 37 \\ +\,28 \\ \hline 65 \end{array}$$

кад наставник коментарише: „Сабирамо 8 јединица и 7 јединица, па је то 15 јединица, односно 5 јединица (пишемо 5 у колони јединица) и 1 десетица (коју преносимо у колону десетица). Сабирамо десетице – 2 десетице плус 3 десетице и плус 1 десетица коју смо пренели су 6 десетица (пишемо 6 у колони десетица).“ Спонтано упрошћавајући, од примера до примера, описе овог поступка сабирања долази се до његове крајње елиптичне форме: 8 и 7 су 15, пишемо 5, а 1 преносимо, 2 и 3 и 1 су 6, пишемо 6. Ову форму ученици исказују гласно или у себи док брзо рачунају, а у писаним материјалима овакав текст треба да буде уоквирен и атачиран уз пример на који се односи. Сврставајући га тако у категорију унутрашњег говора, не бринемо кад испадне недоречено то на шта се односи или кад такав текст испадне граматички неправилан.

Случај одузимања пратићемо такође узимајући један пример:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 81 \\ +\,47 \\ \hline 34 \end{array}$$

кад наставник коментарише: „Одузимамо јединице од јединица – 7 од 4 не можемо да одузмемо, па позајмљујемо 1 десетицу умањеника да бисмо имали 11 јединица. Одузимамо 7 од 11 па добијамо 4 (и пишемо 4 у колони јединица). Од 7 десетица (1 десетица је позајмљена) одузимамо 4 десетице, па су то 3 десетице (пишемо 3 у колони десетица)." Поступним упрошћавањем овакво вербално изражавање овог поступка води његовом елиптичном изражавању: 7 од 1 не може, 7 од 11 је 4, 4 од 7 (1 је позајмљен) је 3.

Већ смо скренули пажњу читаоцу да не поистовећује операције сабирања и одузимања са поступцима путем којих збир или разлику два двоцифрена броја изражавамо у виду децималног записа (тј. цифарски). Ми сматрамо да ове поступке треба учити у оквиру овог блока бројева, јер ће касније сабирање и одузимање троцифрених и вишецифрених бројева бити разумљивије.

На крају истакнимо досад изграђену структуру блока бројева до 100. То је пре свега скуп S_{100} првих 100 природних бројева заједно са нулом који сви иају свој цифарски запис и који се пореде по величини (путем релације „$<$") и међусобно везују, три по три, операцијама сабирања („$+$") и одузимања („$-$"). Кад представљамо ту ситуацију симболички, пишемо

$$(S_{100}, +, -, <).$$

Но, ову структуру даље обогаћујемо уводећи операције множења и дељења, а што ћемо третирати у нашем наредном параграфу.

11.4. Множење у блоку бројева до 100. Често се каже да је множење поновљено сабирање тј. онај случај сабирања кад су сви сабирци међусобно једнаки бројеви. У томе нема ничег погрешног, али би такав приступ обради операције множења био формалан без визуелних представа о ситуацијама у којима реагујемо изводећи операцију множења (а уз то, неподесно је оперисати са збировима који имају већи број сабирака). Истина, као предигра множењу обично се дају вежбе рачунања збирова, као на пример: $8+8+8$, $5+5+5+5$, итд. Сличне су и вежбе бројања по 2, по 3, по 4, итд. Код таквог бројања, рецимо по 5, усменим путем се ређају бројеви 5, 10, 15, … где се сваки следећи добија из претходног додавањем броја 5, а уствари, тако се ређају производи $5\cdot 1$, $5\cdot 2$, $5\cdot 3$, …, па се тако имплицитно везује множење за сабирање. Уствари, тиме се вежбају поступци рачунања производа преко збирова у блоку бројева до 100, али тиме операцији множења не дајемо оно фундаментално значење које ће се преносити даље при ширењу бројевних блокова.

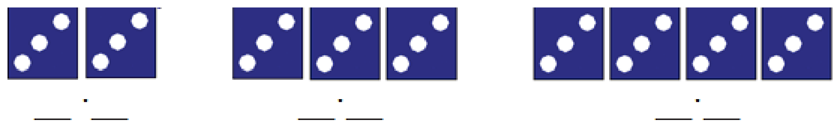
Почињући обрађивати множење, у реалној настави почињемо са издвајањем визуелних представа за које везујемо записе у виду производа два броја. На пример,

– на 1 руци је 5 прстију, на две руке су $2\cdot 5$ прста (а запис $2\cdot 5$ читамо: два пута пет),

– на 1 аутомобилу су 4 точка, на 3 аутомобила су $3\cdot 4$ точка,

– на 1 домини су 4 тачкице, на 5 таквих домина је $5\cdot 4$ тачкица, итд.

Гледај слике и пиши шта треба:



Читај записе које си написао/написала.

Сл. 45

Наравно, ситуације наведене у таквим примерима морају бити илустроване а ученици уведени у вежбе кад сами пишу, уз дате слике, одговарајуће производе. Таква би била вежба на слици 45.

Овај поступак придруживања сликама записа у виду производа треба за неко време одвојити од питања „*а колико је то*“, јер се у почетку акценат ставља на препознавању схема на које реагујемо множећи. Примери који се тако обрађују дају смисао том типу схема, а који ћемо касније одредити на прецизан начин (што ће бити део излагања намењеног наставнику, ради прецизнијег разумевања ове дидактичке процедуре). У традиционалној настави те схеме су описиване као представе где „на m места имамо по n елемената“ и кад укупан број елемената означавамо као $m \cdot n$. Користећи језик теорије скупова, таква схема се може описати као фамилија коју чини m дисјунктних скупова од којих сваки има по n елемената, а која се зове *мултипликативна схема*.

У почетку је потребно водити рачуна о редоследу писања чинилаца m и n у производу $m \cdot n$, будући да они имају различито значење – први означава број скупова (места), а други број њихових елемената (број елемената на тим местима).

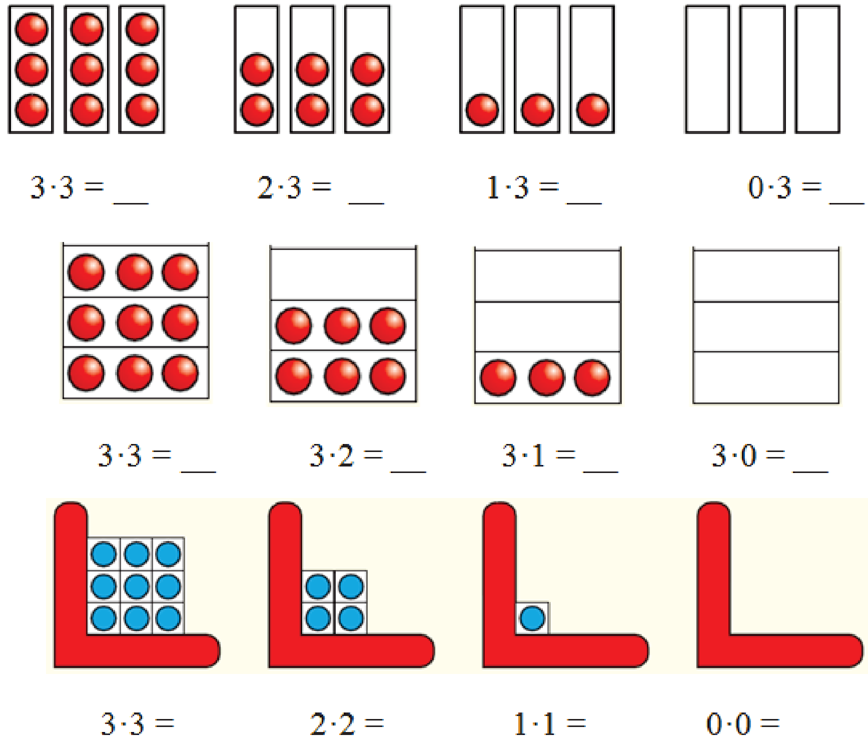
Ученицима се саопшти да се записи као што су $3 \cdot 4$, $2 \cdot 6$, $4 \cdot 5$, итд. називају *производи*, а бројеви који у њима фигуришу *чиниоци*, тачније први писани број назива се *први чинилац* а други писани број *други чинилац*.

У овом почетном периоду, ученици кад рачунају вредност производа који су придружени одређеним схемама, пишу и одговарајуће збирове и једначе различите записе за исте бројеве. На пример, уз схеме илустроване на сл. 45, једначили би производе и збирове на следећи начин: $2 \cdot 3 = 3 + 3$, $3 \cdot 3 = 3 + 3 + 3$, $4 \cdot 3 = 3 + 3 + 3 + 3$ и рачунали вредност производа рачунајући вредност збирова.

Посебне лекције треба наменити производима у којима се као чиниоци јављају 0 и 1. И једна и друга врста таквих производа најприродније се осмишљава у серијама примера у којима се смањује број места, односно на истом броју места смањује се број елемената. Наравно, све то иде са одговарајућим илустрацијама. Примери за ту сврху се бирају да буду једноставни и да се број елемената „брзо види“, односно може да се брзо одреди бројањем.

Уз помоћ наставника, ученици раде вежбе попут следеће:

Гледај слике и пиши шта треба

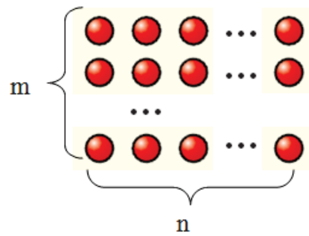


Сл. 46

Празни рамови на сл. 46 представљају празан скуп. На пример кад се посматрају кутије са кликерима, празна кутија представља празан скуп. На овај начин празан скуп стиче значење (а кад се каже да је празан скуп „апсолутно ништа“, ништа ни немамо од тог значења). Наставник може „оживљавати“ одговарајуће представе и говорити, на пример, у 3 кутије по 3 кликера, у 3 кутије по 2 кликера, у 3 кутије по 1 кликер, док је кад се каже у 3 кутије по 0 кликера мало усиљено изражавање. Поготову је $0 \cdot 3$ незгодан израз за неку реалну интерпретацију (а може се рећи да нигде нису стављена 3 кликера, али је и то претерано форсирање значења, које је непотребно). Зато су слике које прате низове оваквих производа најбољи носиоци значења.

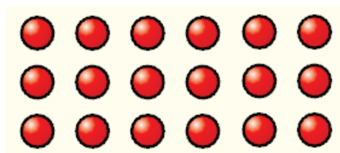
Изузетно правилне схеме везане за множење су оне које имају облик правоугаоних слагалица и где се у m редова налази n објеката (најчешће кружића). Таква схема је приказана на сл. 47, а њу можемо и симетрично видети као n колона у којима се налази по m објеката (кружића).

Користећи конкретније примере оваквих схема, ученици раде вежбе попут оне приказане на слици 48.



Слика 47

Гледај слику



Слика 48

Редова је 3, у сваком реду по 6 кружића. Кружића је $\_\_\_\cdot\_\_\_$, (пишу $3\cdot 6$).
Колона је 6, у свакој колони по 3 кружића. Кружића је $\_\_\_\cdot\_\_\_$, (пишу $6\cdot 3$).

Једначећи два различита записа за број кружића , пишеш $3\cdot 6 = 6\cdot 3$.

Називајући број који производ представља његовом вредношћу, из једног броја примера попут горњег индукује се правило: *заменом места чинилаца вредност производа се не мења.*

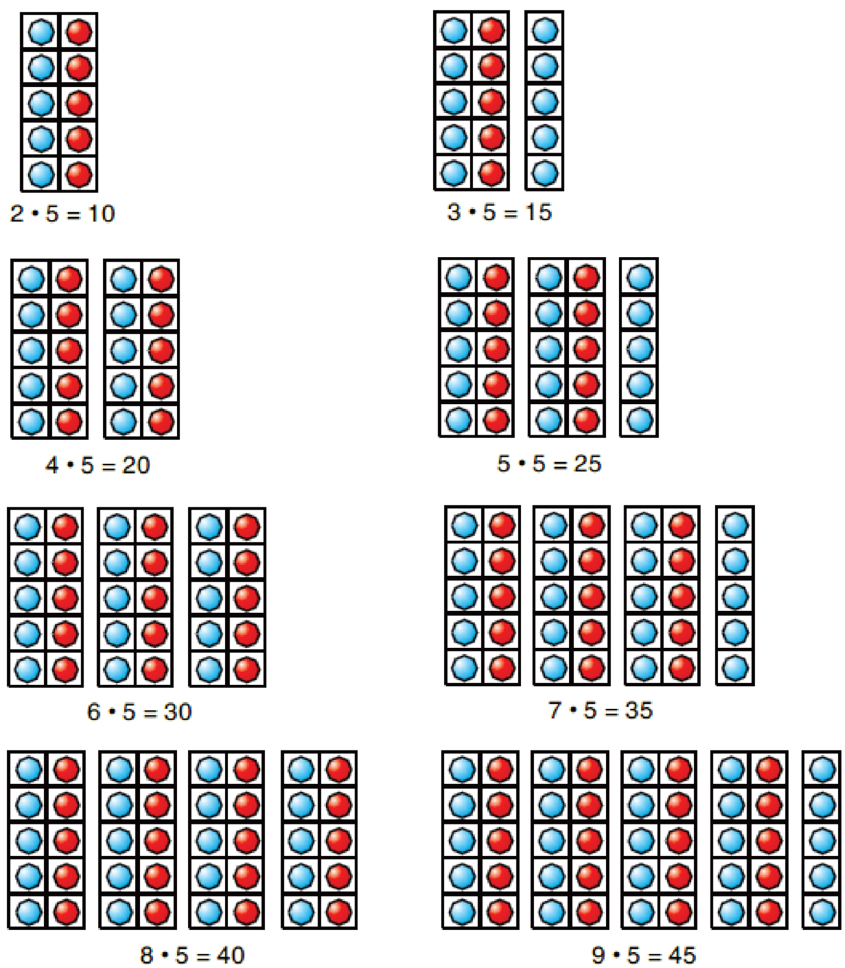
Главни дидактички задатак у оквиру блока бројева до 100 је састављање таблице множења (и тиме таблице дељења). У ту таблицу не укључују се производи са 1, јер је $n\cdot 1 = 1\cdot n = n$, али ни са 10, јер се јасно види и лако памти да је $2\cdot 10 = 20$, $3\cdot 10 = 30$, ... , $10\cdot 10 = 100$ и наравно $10\cdot 2 = 20$, $10\cdot 3 = 30$, ... , $10\cdot 9 = 90$. Претварајући производе у одговарајуће збирове, прво се саставља мала таблица множења

$\cdot$	2	3	4
2	4	6	8
3	6	9	12
4	8	12	16

која се доста брзо и спонтано памти (а кад треба сви улази у ту таблицу се лако усмено рачунају).

Запажа се да деца лако и брзо памте производе у којима је један чинилац број 5. Покажимо како на тим производима се гради таблица множења, јер ми сматрамо да не треба насилно инсистирати на запамћивању ове таблице него на рачунању, разбијајући сложеније производе на два лакша – једног са 5 као чиниоцем и другог са једним чиниоцем мањим од 4. Кад се овај поступак рачунања увежба и кад ученик не зна напамет неки производ, рецимо $7\cdot 8$, наставник га упућује на рачунање са стране (негде на рубу свеске) збира $7\cdot 5 + 7\cdot 3$. Ово што смо овде скицирали, разрадићемо у виду једног броја лекција ослоњених на иконичке представе у виду слагалица којима представљамо бројеве.

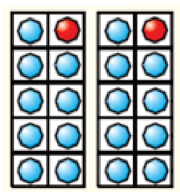
11.4.1. Производи кад је 5 један чинилац. Поређаћемо бројевне слике испод којих ће стајати једнакости које нам говоре како те слике видимо на два начина, са једне стране као одређен број „петорки“, а са друге као слагалицу којом представљамо тај број.



Слика 49

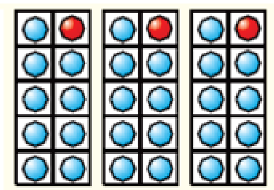
Уз сваку слагалицу пребројавају се „петорке“ а затим се читају производи и то се прво ради у колони где је први чинилац паран па затим у колони где је непаран. Увеличане слике ових слагалица требало би да стоје као постер на зиду учионице 2. разреда.

11.4.2. Производи кад је један чинилац 9. Ослоњени на лаке производе кад је један чинилац 10, лако се рачунају и лако памте производи кад је један чинилац 9.



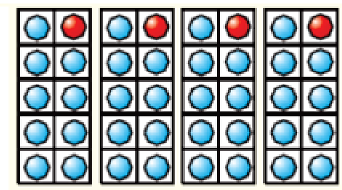
$2\cdot 9 = 2\cdot 10 - 2$

$2\cdot 9 = 20 - 2 = 18$



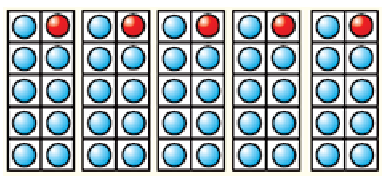
$3\cdot 9 = 3\cdot 10 - 3$

$3\cdot 9 = 30 - 3 = 27$



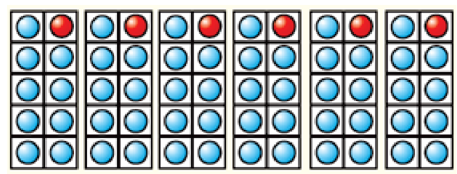
$4\cdot 9 = 4\cdot 10 - 4$

$4\cdot 9 = 40 - 4 = 36$



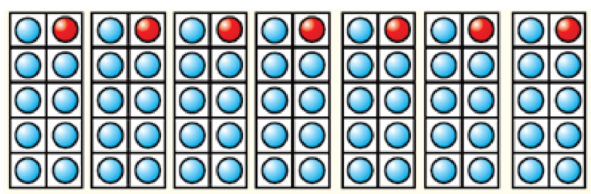
$5\cdot 9 = 5\cdot 10 - 5$

$5\cdot 9 = 50 - 5 = 45$



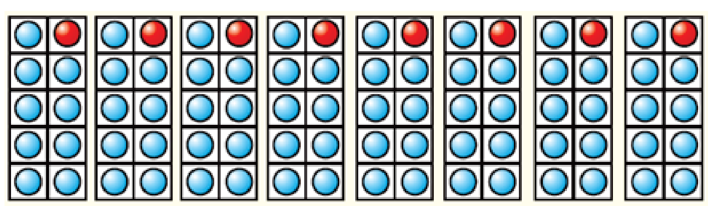
$6\cdot 9 = 6\cdot 10 - 6$

$6\cdot 9 = 60 - 6 = 54$



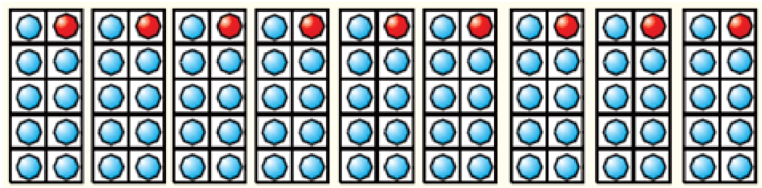
$7\cdot 9 = 7\cdot 10 - 7$

$7\cdot 9 = 70 - 7 = 63$



$8\cdot 9 = 8\cdot 10 - 8$

$8\cdot 9 = 80 - 8 = 72$



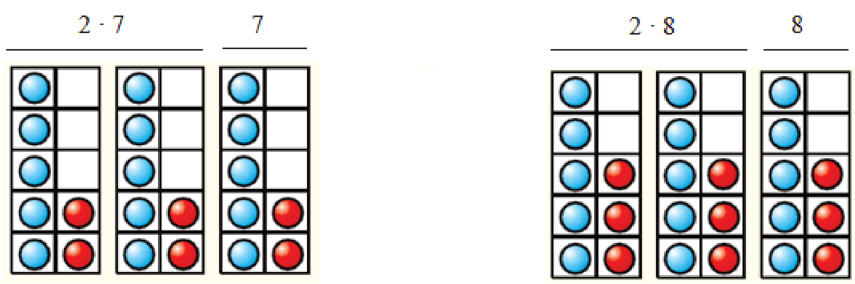
$9 \cdot 9 = 9 \cdot 10 - 9$

$9 \cdot 9 = 90 - 9 = 81$

Слика 50

Наставник подстиче праћење свих корака, па, рецимо, у случају производа $4 \cdot 9$ говори: „Допуњавамо „деветице“ са по **1** црвеним кружићем да добијемо „десетице“. Свих кружића је $4 \cdot 10 = 40$, а плавих је $40 - \mathbf{4}$, а то је *36*, итд. И ове увеличане илустрације треба да буду постер на зиду учионице 2. разреда.

11.4.3. Производи са чиниоцима 2 и 3. Лако се рачунају производи $2 \cdot 6$, $2 \cdot 7$, $2 \cdot 8$ јер се своде на збир два једнака сабирка. Лако се рачунају и производи са 3 као једним чиниоцем: $3 \cdot 6 = 12 + 6$, $3 \cdot 7 = 14 + 7$, $3 \cdot 8 = 16 + 8$ (сл. 51). Размењујући места чиниоцима, тако се рачунају и производи $6 \cdot 3$, $7 \cdot 3$ и $8 \cdot 3$, (а оне кад је један чинилац 9 већ смо обрадили у претходном параграфу).



$3 \cdot 7 = 2 \cdot 7 + 7$

$= 14 + 7 = 21$

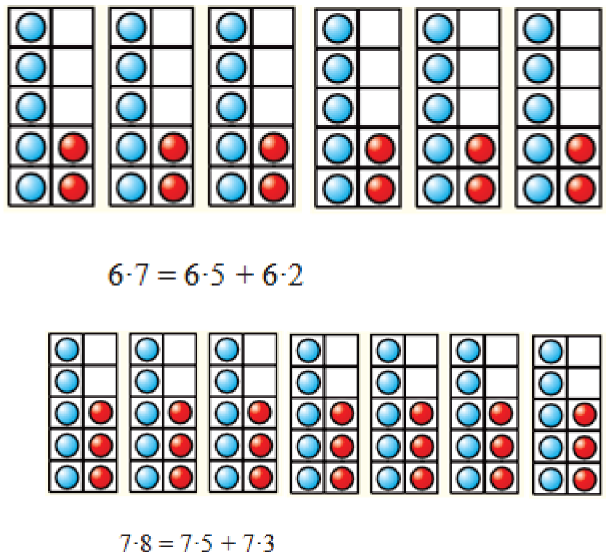
$3 \cdot 8 = 2 \cdot 8 + 8$

$= 16 + 8 = 24$

Слика 51

Начин рачунања ових производа јасно интерпретирају слагалице на сл. 51, али пре свега он се увежбава као вид усменог рачунања.

11.4.4. Производи $6 \cdot 6$, $6 \cdot 7$, $6 \cdot 8$, $7 \cdot 7$, $7 \cdot 8$ и $8 \cdot 8$. Остаје да још обрадимо производе наведене у овом наслову (а самим тим и оне који од њих настају разменом места чинилаца). Начин рачунања (у случајевима $6 \cdot 7$ и $7 \cdot 8$) представљамо слагалицама на слици 52. Наставник овде истиче да се 6 „седмица“ види као 6 „петорки“ и 6 „двојки“, односно 7 „осмица“ као 7 „петорки“ и 7 „тројки“.



Слика 52

Затим се ово рачунање мало шематизује:

$$6\cdot\underset{\substack{\bigwedge\\ 5\ \ 2}}{7} = 30+12=42 \qquad 7\cdot\underset{\substack{\bigwedge\\ 5\ \ 3}}{8}=35+21=56$$

сводећи тако ова множења на два лакша – једно са чиниоцем 5 а друго са чиниоцем мањим од 4.

Изградња таблице множења је главни дидактички задатак у блоку бројева до 100 и ми смо се определили за њено постепено и спонтано запамћивање. Под тим подразумевамо да ће ученици увежбати наведене поступле рачунања и да ће их временом усмено изводити све док таблица множења не постане део фонда који улази у трајну меморију.

11.4.5. Видови мултипликативних схема. У реалној настави и намењени ученицима, ређају се разни примери мултипликатаивних схема. Описивали смо их као ситуације кад на m места имамо по n елемената. Овакве формулације сугеришу значење, али то значење смо прецизно исказали користећи језик теорије скупова, па смо рекли да је *мултипликативна схема* фамилија од m дисјунктних скупова од којих сваки има по n елемената. Кад су дати бројеви m и n, а тражи се укупан број p елемената ових дисјунктних скупова, кажемо да је то *задатак множења* који прати ту мултипликативну схему (а број p зависно од бројева m и n означавамо пишући $m \cdot n$). Кад је дат број p и један од бројева m или n, а тражи се други од њих, тада кажемо да је то *задатак дељења* који прати ту мултипликативну схему. (У теорији скупова не бисмо експлицитно оперисали са природним бројевима, него бисмо говорили о коначној фамилији дисјунктних скупова од који су они сви коначни и исте кардиналности. Ово је контекст дидактике математике где о таквим финесама не водимо рачуна).

Као једну могућу материјализацију мултипликативне схеме можемо узимати m кутија, где се у свакој од њих налази n кликера. Уз овако схваћене схеме јавља се извесна асиметрија у погледу значења бројева m и n, јер први се односи на број скупова (број кутија), а други на број елемената тих скупова (број кликера у тим кутијама). Правоугаоне слагалице као што је она на сл. 47, имају више симетрије и њихове елементе можемо видети сврстане на два начина – у скупове које чини m редова слагалице, а сваки ред има по n елемената (кружића) или, пак, у скупове које чини n колона слагалице, а свака колона има по m елемената (кружића).

Кад скупове који чине једну мултипликативну схему поређамо у низ (A_i), $i = 1, 2, \ldots, m$ и кад такође елементе сваког скупа A_i поређамо у низ (a_{ij}), $j = 1, 2, \ldots, n$ тада су елементима уније скупова A_i придружени уређени парови (i, j), i припада скупу $\{1, 2, \ldots, m\}$ а j скупу $\{1, 2, \ldots, n\}$. Скуп свих тих парова је директни производ $\{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$, а придруживање о ком говоримо је обострано једнозначно.

Узимајући уместо скупа $\{1, 2, \ldots, m\}$ било који скуп A чија је кардиналност број m, а уместо скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ било који скуп B чија је кардиналност n, у теорији скупова се производ $m \cdot n$ дефинише као кардинални број скупа $A \times B$. (Ова се иста дефиниција производа $m \cdot n$ узима и кад су m и n произвољни кардинални бројеви).

Из ових разматрања видимо да бисмо као мултипликативну схему могли да узимамо директни производ скупова (а то је и рађено у периоду *New Math*-а). Међутим, имајући у виду реалну наставу, много је природније тај појам одређивати, користећи језик теорије скупова, онако како смо то урадили на почетку овог параграфа који је, иначе, намењен наставнику да му послужи да боље разуме све оне дидактичке поступке који служе разради операције множења на интуитивној основи.

Дакле, наставник треба да зна да поступку множења два броја претходи перцепција мултипликативних схема, затим долази схватање задатка множења, састављање производа, а тек потом одређивање његове вредности (тј. записивање тог производа у виду цифарског записа). У почетку обраде ове теме треба следити све ове кораке који су битни за учење са разумевањем. Посматрано са техничке стране, множење у блоку бројева до 100 углавном се своди на састављање таблице множења.

Напоменимо такође да део садржаја који овде излажемо ослања се на један рад у припреми овог аутора, др Александре Мандић и др Маријане Зељић.

САНУ, Београд, Кнеза Михаила 35
E–mail: `milomar@beotel.net`