**Ивана Радуловић**

# КАКО ПРЕДАВАТИ ФУНКЦИЈЕ У 8. РАЗРЕДУ ОСНОВНЕ ШКОЛЕ

Обрада појма функције у 8. разреду основне школе предвиђена је за четири школска часа. У овом чланку дат је могући начин презентације за прва два часа.

## Први наставни час

На првом наставном часу ученицима дајемо описну дефиницију функције (као закон, правило и сл). У циљу поступног увођења појма функције, добро је најпре подсетити се онога што је о функцијама учено у ранијим разредима.

Полазимо од задатка у коме се уочава зависност величина.

Пример 1. У следећој таблици је приказано како се мења пређени пут при кретању једног пешака.

| време (h) | 0 | 1 | 2 | 3 | 3,5 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| пут (km) | 0 | 5 | 10 | 15 | 17,5 | 20 |

Ученици лако уочавају да је зависност одређена формулом $s = 5t$, да са променом времена долази до промене дужине пута, да једној одређеној вредности времена одговара и једна одређена вредност дужине пута. Ово се другачије исказује као: *пут је функција од времена.* То је само један пример када је *једна величина функција друге величине.*

Има много примера ове врсте:

- површина квадрата је функција дужине његове странице ($P = a^2$);
- хидростатички притисак $P$ је функција висине $h$ стуба течности ($P = \rho g h$);
- обим правилног осмоугла је функција његове странице ($O = 8a$);
- површина круга је функција полупречника кружнице ($P = r^2\pi$).

У многим проблемима врло је значајно откривати такву функционалну зависност једне величине од друге. Али како функција не мора увек да буде дата неком формулом, наводимо погодне примере функција где је функција дата другачије, односно законом, прописом, договором, правилом и слично.

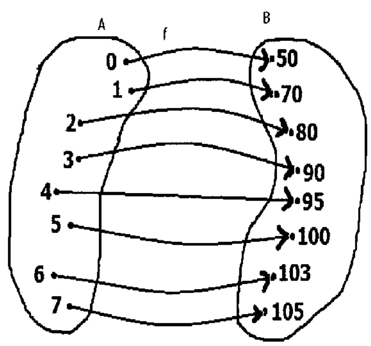
Пример 2. У медицини се на многобројним примерима мерењем утврдило да се висина детета мења (просечно) од рођења до навршене седме године живота на следећи начин:

| година | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| висина (у cm) | 50 | 70 | 80 | 90 | 95 | 100 | 103 | 105 |

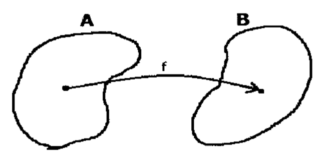
Природно је да кажемо: висина детета је функција од године живота. Ма како покушавали да нађемо одговарајућу формулу (на нивоу знања ученика основне школе) по којој би елементима скупа $A$, скупа временских тренутака, придружили одређену вредност елемената скупа $B$, скупа позитивних бројева, дужина, нећемо успети, јер је функционална зависност одређена биолошким законом.

На овом примеру није тешко уочити да сваком елементу скупа $A$ одговара по тачно један елемент скупа $B$. То је, у ствари, најважније у појму функције. То је основа, темељ, тзв. описне дефиниције функције.

*Нека су $A$ и $B$ ма какви скупови и нека је неким договором, правилом, законом $f$ сваком елементу скупа $A$ додељен тачно по један елемент скупа $B$. Тада кажемо да је $f$ функција која скуп $A$ пресликава у скуп $B$.*




Слика 1



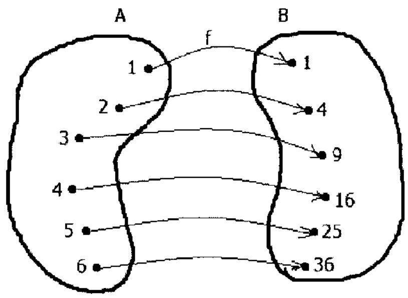

Слика 2

Наставник ће претходни пример представити и помоћу Венових дијаграма (сл. 1), где смо са $f$ означили природни, биолошки закон. Уопште, ако било који елемент скупа $A$ обележимо ознаком за променљиву $x$, а било који елемент скупа $B$ ознаком за променљиву $y$, претходну скицу можемо заменити оном на слици 2.

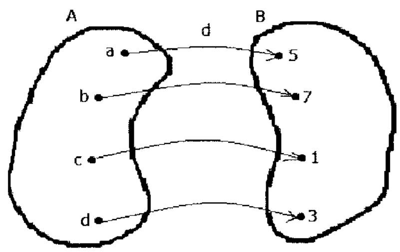
Елемент скупа $B$ који одговара елементу $x$ скупа $A$ зове се његова слика и обично се означава $f(x)$ (читати „еф од икс“). Рецимо: $f(1) = 70$, $f(5) = 100$, $f(7) = 105$.

Пример 3. Нека је $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и $B = \{1, 4, 9, 16, 25, 36\}$. Нека је даље $f$ правило представљено на слици 3. Лако је уочити да се елементи скупа $B$ добијају квадрирањем елемената скупа $A$, $f(1) = 1^2$, $f(2) = 2^2$ и слично. Можемо и овако рећи: функција $f$ је одређена формулом $f(x) = x^2$.

Међутим, као што смо из примера 2 видели, није неопходно да функцији одговара одређена формула.




Слика 3




Слика 4

Примедба. Појам функције се, наравно, не може схватити само на основу три претходно наведена примера. Наставницима се оставља слобода да сами, по свом нахођењу одреде број примера за први час. Примера има доста, а корелација са другим наставним предметима треба да дође до пуног изражаја. Навешћемо још неколико примера функција.

- Дужина, површина и запремина као придруживање бројева дужима, површима и телима.

Рецимо: дужина дужи $a$ је 5, дужина дужи $b$ је 7, дужина дужи $c$ је 1, дужина дужи $d$ је 3. Овом примеру одговара скица на којој смо са $A$ означили скуп дужи, са $B$ скуп њихових дужина, а са $d$ уочену функцију, којом се од дужи прелази на њен мерни број, односно дужину (сл. 4).

- Функција која скуп свих река пресликава у скуп свих сливова. Рецимо:

| река | Дунав | Вардар | Неретва |
|---|---|---|---|
| Слив | Црноморски | Егејски | Јадрански |

**Други наставни час**

Други час је час увежбавања.

Пример 4. Нека је $A=\{0,1,2,3,4,5\}$, $B=\{0,2,4,6,8,10\}$ и нека договорно елементи скупа $B$, по реду навођења, буду слике елемената скупа $A$, по реду навођења.

$1^\circ$ Којом формулом је дефинисана функција $f$ скупа $A$ у скуп $B$?

$2^\circ$ Одреди $f(0)$, $f(2)$, $f(4)$, $f(5)$.

*Решење.* $1^\circ$ Лако је уочити да формула гласи: $y=2x$, по којој од сваког елемента $x\in A$ прелазимо на одређени елемент $y\in B$. $2^\circ$ $f(0)=0$, $f(2)=4$, $f(4)=8$, $f(5)=10$.

Пример 5. Функције $f$ и $g$ су дате таблицама:

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 |

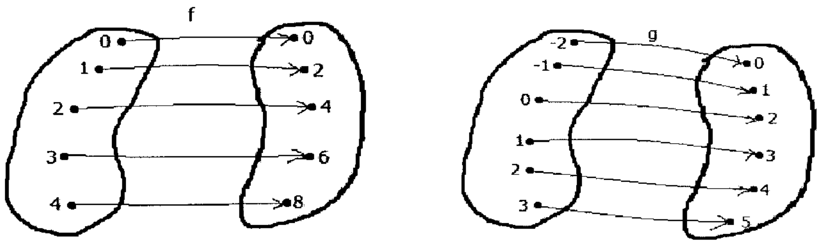
| $x$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

1° Одредити $f(1)$, $f(4)$, $g(-2)$, $g(0)$, $g(2)$.

2° Одредити све вредности $x$ такве да је $f(x) = g(x)$.

3° Одредити $f(f(0))$, $f(g(2))$, $g(g(-1))$, $g(f(1))$.

*Решење.* Функцијама $f$ и $g$ одговарају скице на слици 5.




Слика 5

1° $f(1) = 2$, $f(4) = 8$, $g(-2) = 0$, $g(0) = 2$, $g(2) = 4$.

2° Једино је $f(2) = g(2)$, па је тражена вредност $x = 2$.

3° $f(f(0)) = f(0) = 0$, $f(g(2)) = f(4) = 8$, $g(g(-1)) = g(1) = 3$, $g(f(1)) = g(2) = 4$.

Пример 6. Нека је $A = \{$ласта, теле, шаран, бор$\}$, $B = \{$животиња, птица, дрво, риба$\}$. Одредити једну на природан начин дефинисану функцију $f$ скупа $A$ у скуп $B$.

*Решење.* $f($ласта$) =$ птица, $f($теле$) =$ животиња, $f($шаран$) =$ риба, $f($бор$) =$ дрво.

Пример 7. Дати су скупови $A = \{$Београд, Сарајево, Скопље, Подгорица, Љубљана, Загреб$\}$, $B = \{$Србија, Хрватска, Босна и Херцеговина, Македонија, Словенија, Црна Гора$\}$. Одредити једну на природан начин дефинисану функцију $f$ скупа $A$ у скуп $B$.

Пример 8. Дат је скуп $A = \{1, 2, 3, \ldots, 20\}$. Функција $f$ додељује сваком броју из скупа $A$ број његових природних делилаца (укључујући 1 и сам тај број).

1° Представити функцију $f$ таблицом.

2° Одредити све елементе $x$ скупа $A$ за које је $f(x) = 2$.

*Решење.* 1°

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1 | 2 | 2 | 3 | 2 | 4 | 2 | 4 | 3 | 4 | 2 | 6 | 2 | 4 | 4 | 5 | 2 | 6 | 2 | 6 |

2° $x \in \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ (то су сви прости бројеви из скупа $A$).

Пример 9. Функције $f$ и $g$ дате су таблицама:

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1 | 0 | 3 | 2 |

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | 2 | 0 | 0 | 3 |

$1^\circ$ Одредити $f(1)$, $f(3)$, $g(0)$, $g(2)$.

$2^\circ$ Одредити све вредности $x$ такве да је $f(x) = g(x)$, тј. решити једначину $f(x) = g(x)$.

$3^\circ$ Одредити $f(f(0))$, $f(f(1))$, $g(g(0))$, $g(g(2))$, $f(g(2))$, $g(f(2))$, $f(g(0))$, $g(f(0))$.

Пример 10. Функција $f$ скупа $\mathbf{R}$ у самог себе дата је помоћу $f(x) = 2x+2$. Одредити $f(0)$, $f(1)$, $f(5)$, $f(f(0))$, $f(f(3))$, $f(f(-1))$, $f(f(x))$.

*Решење.* $1^\circ$ $f(0) = 2\cdot 0 + 2 = 2$, $f(1) = 2\cdot 1 + 2 = 4$, $f(5) = 12$, $f(f(0)) = f(2) = 2\cdot 2 + 2 = 6$, $f(f(3)) = f(8) = 18$, $f(f(-1)) = f(0) = 2$, $f(f(x)) = f(2x+2) + 2 = 2(2x+2) + 2 = 4x + 6$.

Пример 11 Нека је $f(x) = 3 - x$ и $g(x) = 2x$. Колико је $f(2x)$, $g(-x)$, $f(3-x)$, $f(g(x))$, $g(f(x))$?

*Решење.* $f(2x) = 3 - 2x$,

$g(-x) = 2(-x) = -2x$,

$f(3-x) = 3 - (3-x) = 3 - 3 + x = x$,

$f(g(x)) = f(2x) = 3 - 2x$,

$g(f(x)) = g(3-x) = 2(3-x) = 6 - 2x$. Приметити да је $f(g(x)) \neq g(f(x))$.

Уколико се процени да после ових примера ученици нису добро схватили појам функције, може се још један час посветити увежбавању тог појма. Посебно треба користити описну дефиницију, јер добро схваћен појам функције на тај начин омогућава лакше прихватање строге дефиниције.

Средња школа „Никола Тесла“, Лепосавић

E-mail: ivanaradulovic1974@gmail.com