Др Милосав Марјановић

КАКАВ ТРЕБА ДА БУДЕ КУРС МАТЕМАТИКЕ НА УЧИТЕЉСКИМ ФАКУЛТЕТИМА

Ово излагање почећемо једном информацијом о настојању Одбора за образовање Председништва Српске академије наука и уметности да се анализира начин образовања наставника, посебно са фокусом на универзитетско образовање, на свим наставничким факултетима (у које убрајамо учитељске, природно-математичке, филозофске и филолошке факултете). Ово ће бити један дугорочни задатак овог Одбора, а томе су биле посвећене и две међународне конференције ISDTF 2011 и ISDET 2013 (видети чланак *Савремени изазови*, Просветни преглед, 5. децембар, 2013). На конференцији ISDET 2013 планирана је дискусија за округлим столом која би била посвећена настави предмета *Математика* и *Методика математике* на учитељским факултетима у региону. Учесницима је био послат следећи текст (написан, и овде преведен са енглеског, од стране М. Марјановића):

„У Србији као што је такође то било у већини суседних земаља учитељи су се образовали на високим школама које су имале искључиво педагошку оријентацију. Почев са раним 1990-тим ове школе су биле интегрисане у универзитете и њихов образовни систем је измењен да би се прилагодио вишим академским захтевима. Нема сумње да је ова реформа допринела бољем образовању учитеља али је такође могуће да су садржаји појединих курсева који су се нашли на новом курикулуму академски претенциозни и да прелазе реалне професионалне потребе овог типа наставника. С друге стране ми бисмо морали бити изразито свесни такве врсте проблема имајући у виду да наставу у нижим разредима основне школе чине основни садржаји из више предмета и да је учитељ брижни саговорник деци у свом разреду.

Ова дискусија за округлим столом је планирана да се усредсреди на курсеве *Математике* и *Методике математике* чије садржаје треба изанализирати и чије добре и лоше ставке треба истаћи.

Аутономија универзитета даје право сваком факултету да планира своје програме. Тако шест учитељских факултета у Србији имају знатно различите курсеве математике и методике математике, које обично саставља пар наставника на тим факултетима.

Ово је први чланак на тему могуће реформе наставе математике на учитељским факултетима. Наредни бројеви „Наставе математике“ садржаће још чланака о тој теми.

Заинтересовани учесници из Србије и суседних земаља се најлепше моле да узму учешће у овој дискусији и да се тако детаљно размотри ово стање ствари у образовању учитеља. Све дискусије биће ограничене на 10 минута а ваше писмене белешке су такође добродошле и биће постављене на сајту Академије.“

Овај текст са позивом за учешће у дискусији био је послат свим учесницима конференције из секције *Математика са информатиком*, свим учитељским факултетима у Србији и свим наставничким факултетима на Универзитету у Београду. Могло се очекивати да ће за ову дискусију бити најзаинтересованији наставници на учитељским факултетима који предају курсеве *Математика* и *Методика математике*, али нико се од њих није одазвао. Но, окупила се бројна група стручњака који су или учествовали у овој дискусији или су били заинтересовани да је прате. Предвиђено време (петак, 25. октобар од 15:00–18:00 часова) није било довољно да би се дотакле обе горе наведене теме за дискусију, па је цео састанак био посвећен разматрању само курса математике. Сви дискутанти (укључујући и оне из Бугарске и Македоније) били су у једном сагласни – да су сви курсеви математике на учитељским факултетима на један или други начин претенциозни и да су били формирани према моделима постојећих универзитетских курсева више математике и да, при том, премашују потребе учитеља да знају ону математику која би била основа за њихово квалитетно извођење наставе из овог предмета.

У случају Србије, поменут је Калкулус као садржај који заузима велики део курса математике. Поменуто је такође да су састављачи програма за овај курс најчешће имали у виду курсеве математике на техничким факултетима, не водећи рачуна да је то доста сложен садржај који одузима велики део времена, а при томе уопште не доприноси дубљем разумевању процедура ране школске наставе математике нити, пак, води кларификацији појмова који се у тој настави јављају. Мотивација да се предаје „виша“ математика може бити знак романтичне сујете, али за ову врсту студената који морају да је уче без икаквих видљивих ефеката је велико и непотребно оптерећење.

Не може се тако брзо рећи шта је математика коју студенти на учитељским факултетима треба да уче, али чуло се мишљење да би то требало да буде рекапитулација школских тема укључујући старије разреде основне школе, при чему би се ишло на продубљивање тих садржаја без превеликог настојања да се развију технике решавања задатака. Такво продубљивање захтева посебне видове излагања теорије скупова чији језик изражава феноменологију на којој се заснива аритметика, основа математичке логике чији језик доприноси чистоти изражавања предметних садржаја и помаже наставнику да јасно разликује семантичка и синтактичка значења, релевантних чињеница из историје математике везаних за развој бројевних система и симболичне алгебре, итд. Све ово може бити суптилније да се излаже с мером и знањем чему је то потребно за формирање доброг наставника разредне наставе од већ одавно ушетаних начина излагања диференцијалног и интегралног рачуна. Рекапитулација школских тема на продубљен начин је идеја која се често има у виду кад се разматра припрема овог типа наставника, али је све оно што служи да се продубе ти садржаје знатно сложеније да се сад овде *ad hoc* обухвати. Овај чланак и они који ће се јавити као реакције на њега, односно као даљи наставци дискусије коју овде почињемо помоћи ће да се са критике постојећег стања пређе на конструктивнији део – промишљање бољег курса математике за студенте учитељских факултета.

Даље, у овом чланку наводимо (уз мала сажимања) садржај курса математике на Учитељском факултету у Београду а затим, анализирањем његових ставки, разматрамо да ли и колико оне доприносе професионалном формирању учитеља. Уз потпуно негативан осврт на поједине од тих ставки подразумева се, наравно, да ми сугеришемо њихово изостављање у целости али уз то, такође, наводимо неке друге садржаје истичући њихов формативни значај, па тако тиме сугеришемо њихово укључивање у програм овог курса.

1. Садржај курса математике на Учитељском факултету у Београду

1.1. Математика I – курс на првој години са 2 часа предавања и 2 часа вежби у првом и 1 час предавања и 2 часа вежби у другом семестру

1. Елементи математичке логике (искази, сложени искази, таутологије, предикатске формуле)
2. Елементи теорије скупова (теорија скупова као аксиоматска теорија, скуповне операције и релације, појмови функције и операције)
3. Алгебарске структуре (групоид, семи-група, група, прстен, тело, поље)
4. Реални бројеви (аксиоме за скуп реалних бројева, извођење главних алгебарских својстава из ових аксиома, природни, цели, рационални и ирационални бројеви, експонент реалног броја)
5. Линеарне једначине и неједначине (детерминанте реда 2 и 3, системи линеарних једначина, Cramer-ова правила, Gauss-ов метод)
6. Еуклидска геометрија (формулација свих група аксиома и извођење њихових последица, геометријски објекти: праволинијски сегмент, угао, полигон, полиедар, мерење дужина, површина и запремина, координатни системи у равни и простору).

1.2. Математика II – курс на другој години са 2 часа предавања и два часа вежби у оба семестра

1. Комплексни бројеви (поље комплексних бројева, модул комплексног броја, конјуговани комплексни број)
2. Полиноми (алгоритам дељења полинома, полиномијалне функције, основна теорема алгебре, Viéte-ова правила, алгебарске једначине)
3. Низови реалних бројева (гранична вредност низа, алгебарске комбинације граничних вредности, монотони низови)
4. Реалне функције једне променљиве (елементарне функције, гранична вредност функције у тачки, непрекидне функције)
5. Извод функција једне променљиве (правила диференцирања, изводи вишег реда, L'Hospital-ова правила, примена извода на скицирање графика функција)

6. Појам неодређеног интеграла (методе рачунања: парцијална интеграција, интеграција сменом, интеграција рационалних функција, одређени интеграл и његова својства, одређени интегал као функција горње границе, Newton-Leibnitz-ова формула, примене одређеног интеграла на рачунање дужине лукова, површине равних фигура и запремине тела)
7. Аналитичка геометрија (алгебра вектора, скаларни и векторски производ два вектора и мешовити производ три вектора, једначине правих линија и равни, међусобни положај правих линија и равни, појам криве линије и површи)

2. Анализа наведених ставки програма

M.I,1. „Елементи математичке логике“ је тема која има своје право место у курсу математике за ову врсту студената. Овако како је формулисана то сугерише један формалан приступ њеној обради (прво се јављају искази и посматрају операције са њима, а у реалној настави прво се појављују пропозиционе функције (формуле које изражавају разне услове) па наставу логике с њима треба и почети и везивати их путем интерпретације за садржаје теорије скупова). Учећи основе логике наставник ће имати чистији стручни језик и, на пример, неће користитити везнк „и“ на месту где треба да буде везник „или“ и обрнуто или, пак, неће мешати „израз“ са „релацијом (формулом)“, итд. Појмове логике треба интерпретирати примерима који постоје у основношколској математици а њихово вербално одређивање (не мислимо формално дефинисање) може бити наслоњено и на значење неких речи из природног језика. На пример, можемо рећи да је израз комбинација бројева (константи) и слова (променљивих) формиран помоћу операцијских знакова. Додајући таквој вербалној одредници примере као што су

$$1, \quad x, \quad 3+x, \quad 12:4, \quad 10-(3+x), \quad \text{итд},$$

тим путем ће значење синтактичког термина „израз“ бити прилично добро осмишљено.

Логичка функција везника „и“, „или“, „ако ... тада ... “ треба да буде везана за истиносне скупове реченица које они спајају и са одговарајућим скуповним операцијама, одн. инклузијом као релацијом. Из овог истог разлога ми сматрамо да тема „Основи теорије скупова“ треба да претходи теми „Елементи математичке логике“.

Напоменимо да ми сугеришемо тзв. „прежвакане основе математичке логике“, а то значи дидактичку обраду која је намењена посебној врсти студената и која се разликује од уобличења таквих садржаја кад је логика схваћена као научна дисциплина. Кад се ова разлика не прави и кад се научни аспект види као једино исправан, тада се могу губити из вида главни дидактички циљеви наставе.

M.I,2. Будући да припадају самим основама математике, елементи теорије скупова су драгоцена тема и за наставника разредне наставе. Посебно, то је језик који описује дискретне реалности чије доживљавање ствара у уму менталне представе на које се опире учење аритметике. Ако могу постојати неке резерве око коришћења скуповног језика у актуелној настави математике у њеном раном периоду, тај језик са свом својом општошћу значења, доприноси јасноћи излагања садржаја из дидактике математике.

На крају додајмо да у овом курсу говорити о аксиоматској теорији скупова и тиме оптерећивати ову врсту студената, симптом је потпуне дидактичке „бахатости“.

M.I,3. Има основа да се сматра корисним да учитељ буде упознат са основним алгебарским структурама: групом, прстеном, пољем и уређеним пољем (док су појмови групоида и семи-групе од мањег значаја). Ови појмови помажу учитељу да схвати процесе структурисања бројевних система и смисао њихових проширења, али наравно, претпоставља се да све то буде изложено на један „прежвакан“ начин. Кад је покренут проблем логичког оправдања операсања са словним изразима, почев са 1830-тим (A. Peacock, A. De Morgan, и др), својства операција са бројевима узимана су апстрактно за било које друге операције које задовољавају та иста својства. Овај историјски пут конвертовања алгебре бројева у апстрактну алгебру мора се обрадити са извесном пажњом.

Уочимо да већ од самог почетка наставе математике извесно структурисање је присутно као вид кохерентног излагања садржаја – конструкција бројевних блокова до 10, 20 100, 1000 уз поступно изражавање правила операсања, па се то даље продужава на формирање и проширење бројевних система природних, целих, рационалних и реалних бројева.

Логичко прочишћавање које даје сагледавање на вишем нивоу (овде се мисли на бројевне системе виђене и као апстрактне структуре) комбиновано са представама о историјском развоју тих идеја продубљује наставниково поимање ових централних садржаја школске математике.

M.I,4. Кад се дају аксиоме за неки бројевни систем, треба их схватити као минимум својстава из којих се сва друга позната својства операција са бројевима и променљивим могу извести. Треба се задржати на једном броју таквих извођења али ни са тим не треба претеривати.

Значење реалних бројева као магнитуда које су представљене праволинијским сегментима чији је један крај у тачки O која је почетак а њихове суме, разлике, производи и количници се конструишу на начин како је то Descartes радио у почетку свог дела "La Géométrie" врло је инструктивно и то не треба замаглити формалним поступцима децималног представљања реалних бројева и прокламовањем да са њима можемо операсати као да су рационални. У сваком курсу математике за наставнике тог предмета овај Descartes-ов геометријски модел који је затворен за све четири операције и где су сегменти носиоци значења броја као величине, треба да претходи сваком другом виду обраде система реалних бројева. Кад се овај модел пореди са још увек операсањем са магнитудама присутним у делима Viéte-a, види се какав је огромни корак у развоју апстрактне идеје реалног броја направио Descartes. За студента, учећи на овај начин, реални бројеви стичу значење мера и тако су нешто садржајније него ли само ознаке у виду бесконачних децималних разломака.

M.I,5. Кад се врши рекапитулација, линеарне једначине и неједначине треба везивати за граф функције $y = ax + b$. Не види се разлог због кога се овај садржај издваја као посебна тема, нарочито кад је реч о рекапитулацији што је увек друкчији процес него што је учење по први пут.

M.I,6. Третирати Еуклидску геометрију аксиоматски у овој врсти курса је једна очигледна претенциозност, па треба напоменути да су увек сви школски курсеви геометрије били врло упрошћене верзије Еуклидових „Елемената“. С друге стране учење геометрије у почетним разредима је процес запажања појединих видљивих облика. То је период интелектуалног развоја кад деца нису заокупљена доказивањем, јер тада „истина је у оку посматрача“ (а ово је варијација на енглеску изреку „лепота је у оку посматрача“).

Можемо бити помало запањени мотивима оних који су планирали „Еуклидску геометрију“ на овај начин.

Неке основне идеје о конвексним скуповима имале би своје место у овом курсу. Могао би се дефинисати појам повезаног симплицијалног комплекса у димензијама 1, 2 и 3, а затим полигона као посебне уније симплекса 2-комплекса односно, полиедра као посебне уније симплекса 3-комплекса.

M.II,1. „Комплексни бројеви“ су типична тема школске математике а њено обнављање у овом курсу свакако има свој разлог.

M.II,2. Обнављање полинома такође има своје место у овом курсу, али чињеница да свака алгебарска једначина има корен у пољу комплексних бројева и да, у општем случају, оне реда већег од 4 нису решиве у радикалима може да буде само историјски осврт на једну велику авантуру људског ума. Квадратне једначине и Viéte-ове формуле су наравно прави материјал за обнављање у овом курсу.

Напоменимо да се често каже да је алгоритам дељења природних бројева ништа више до ли дељење полинома. Тачно је да се сваки природни број може написати као полином по „10“ али „позајмљивање“ и „преношење“ чине овај алгоритам сложенијим него ли је то дељење полинома.

M.II,3–6. Иако је Калкулус срж многих универзитетских курсева, не види се никакав прави рационални разлог да се његов садржај може користити за професионално формирање овог типа студената. Зато, нећемо ни разматрати све ове садржаје.

M.II,7. Рекапитулација извесних садржаја из аналитичке геометрије у равни: једначина праве, канонички облици једначине круга, елипсе и параболе, итд. могу бити од извесног интереса и користи. Све друго је једно непотребно оптерећивање студената без видљивих образовних ефеката.

3. А какав би курс математике требало да буде на учитељским факултетима

Ми не намеравамо да се тако брзо опредељујемо који садржаји требају да буду укључени у овај курс математике. Уместо тога навешћемо један број захтева за које постоји велика вероватноћа да су општеприхватљиви.

- Будући учитељ треба да добро познаје математику у оном оквиру који ће му омогућити успешно праћење дидактичке анализе главних наставних тема. Таква анализа треба да покаже не само како се појмови креирају и рачунски поступци заснивају у оном градиву које ће учитељ предавати него такође како се они развијају даље у вишим разредима основне школе.
- Учећи наново одређене садржаје то неће бити само њихово освеживање него такође гледање на те садржаје историјски, кад се виде *in statu nascendi*, а потом и на начине њиховог савременог излагања и структурисања. За ту сврху послужиће идеје о математичким структурама које се формирају у настави о скуповима.
- Потреба да се прецизно протумаче неке дидактичке чињенице може да захтева посебна знања математике. На пример, према Piaget-у, карактеристична својства видљивих облика класификују се као тополошка, пројективна и метричка (Еуклидска), а деца их интуитивно усвајају тачно овим редом. Али кад се учи математика, прво се обрађују метричка својства у школској геометрији, док се пројективна и тополошка срећу знатно касније у универзитетским курсевима пројективне геометрије и топологије. Да стекне неке за ову сврху довољне идеје шта су пројективна и тополошка својства, студенти учитељских факултета не би требало да покушавају да то науче из књига које су намењене овим курсевима јер ће оне њима бити недоступне. Уместо тога на прву врсту ових својстава треба да гледа као на она која се чувају при пројектовању из тачке а на другу као на она која се чувају при непрекидним деформацијама. На овај начин су третирана ова својства у добро познатој књизи Courant–Robbins. Излагање на овај начин је пример великог мајсторства и кад је год могуће такве садржаје укључити у курс математике, то свакако треба чинити.

Напоменимо да су појмови отворене и затворене линије (који су у програму математике првог разреда основне школе) тополошки и да формално одговарају појмовима тополошког лука и тополошког круга.

- Као што се види овај аутор је склон да замишља одговарајући курс математике на учитељским факултетима као кратку рекапитулацију школске математике, проширену садржајима битним за курс дидактике математике. Понекад, да би се обухватиле неке чињенице са довољном математичком прецизношћу, могу се користити само неке идеје, а не цела једна теорија, као што ће то следећи пример показивати.

Биће сигурно интересантно јасно математички третирати круг као затворену линију свуда подједнако закривљену и да је закривљенији онај круг чији је полупречмок мањи (а зашто је, формално узевши, потребно знати бар пола курса калкулуса који је у постојећем програму предвиђен у другој години). Узимајући за меру закривљености износ промене правца тангенте дуж датог лука види се да је тај износ исти на свим луковима једног круга који су исте дужине и да тај износ расте кад се полупречник круга смањује.

- Један врло инструктивни садржај који доприноси развоју идеје о променљивој је погађање члана неког započетог низа бројева који ће се наћи на датом месту (хиљадитом или неком другом недоступном простом ређању члан по члан). Кад се тражи састављање формуле општег члана тада је тај задатак посебно инструктиван. Овакве вежбе технички прилагођене узрасту, јављају се и у књигама за 4. разред основне школе. Такав садржај захтева да је наставник упознат са појмом низа као пресликавања чији је домен скуп природних бројева. Кад се ради о коначним низовима онда се они уплићу у разне комбинаторне ситуације. Чест случај је захтев да се испишу сви могући распореди неке групе елемената и одреди њихов број. Ето зашто би комбинаторика била прави садржај за рекапитулацију у овом курсу математике.

Комбинујући оне критичке осврте са овим што је речено у овој тачци, могу се назирати контуре једног једногодишњег курса математике. Оставићемо то за дискусије и сугестије које ће надамо се следити, па ће тада бити и боља прилика да се осврнемо на детаљнији приказ таквог курса.

На крају морамо и то рећи да формални математичар често има илузију да је апстрактни и логички добро спаковани садржај супериорнији не правећи тако разлику између дидактичких трансформација и обликовања за научне сврхе. И најзад напоменимо и то да ми радо користимо племениту реч учитељ и говоримо о учитељским факултетима имајући у виду да је учитељ наставник разредне наставе, а поред осталог и наставник математике на нивоу прва четири разреда основне школе.

Српска академија наука и уметности, Кнеза Михаила 35, Београд
E-mail: milomar@beotel.net