Драгољуб Милошевић

ЈЕДНА ОСОБИНА ПРАВИЛНОГ $(3n+1)$-УГЛА

У чланцима [1] и [2] су доказана следећа тврђења.

Ако је $A_0A_1\dots A_6$ правилни седмоугао, онда је
$$\frac{1}{A_0A_1}=\frac{1}{A_0A_2}+\frac{1}{A_0A_3}.$$
Ако је $A_1A_1\dots A_{12}$ правилни тринаестоугао, онда је
$$\frac{A_0A_1}{A_0A_4}+\frac{A_0A_3}{A_0A_5}=1.$$

Овде ћемо доказати следеће уопштење наведених тврђења (која се добијају као специјални случајеви за $n=2$, односно $n=4$).

Ако је $A_0A_1\dots A_{3n}$ правилни $(3n+1)$-угао, онда је

(1) $$\frac{A_0A_1}{A_0A_n}+\frac{A_0A_{n-1}}{A_0A_{n+1}}=1.$$

Доказ. Обележимо са R дужину полупречника описане кружнице око правилног $(3n+1)$-угла и са α величину периферијског угла над страницом тог многоугла. Тада је $A_0A_1=2R\sin\alpha$, $A_0A_{n-1}=2R\sin(n-1)\alpha$, $A_0A_n=2R\sin n\alpha$, $A_0A_{n+1}=2R\sin(n+1)\alpha$, па је једнакост (1) еквивалентна са
$$\frac{\sin\alpha}{\sin n\alpha}+\frac{\sin(n-1)\alpha}{\sin(n+1)\alpha}=1,$$
тј. са

(2) $$\sin\alpha\sin(n+1)\alpha+\sin n\alpha\sin(n-1)\alpha=\sin\alpha\sin(n+1)\alpha.$$

Применом тригонометријске идентичности $\sin x\sin y=\dfrac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)]$ једнакост (2) се трансформише у

(3) $$\cos(2n+1)\alpha-\cos(n+2)\alpha=\cos(2n-1)\alpha-\cos n\alpha.$$

Коришћењем тригонометријске идентичности $\cos x-\cos y=-2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$ једнакост (3) добија облик

(4) $$\sin\frac{3n+3}{2}\alpha=\sin\frac{3n-1}{2}\alpha.$$

Како је $(3n+1)\alpha = \pi$, имамо

$$\sin\frac{3n+3}{2}\alpha = \sin\left(\frac{3n+1}{2}+1\right)\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right),$$
$$\sin\frac{3n-1}{2}\alpha = \sin\left(\frac{3n+1}{2}-1\right)\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).$$

С обзиром да је једнакост $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ тачна, то је тачна једнакост (4), а са њом и тражена једнакост (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Милошевић, *Осам решења једног задатка о правилном седмоуглу*, Тангента 65 (2011/12), 12–17.
2. Д. Милошевић, Б. Симић, *Једна особина правилног тринаестогула*, Настава математике LVII, 3-4 (2012), 43–52.

E–mail: dramil47@gmail.com

ОБАВЕШТЕЊА

НОВЕ КЊИГЕ У ЕДИЦИЈИ МАТЕРИЈАЛИ ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ ДРУШТВА МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

1. *В. Мићић, З. Каделбург, Д. Ђукић*: УВОД У ТЕОРИЈУ БРОЈЕВА, свеска 15, 5. допуњено издање.
2. *П. Младеновић*: КОМБИНАТОРИКА, свеска 22, 4. издање.
3. *Љ. Вуковић, Д. Ђорић*: ПРИПРЕМНИ ЗАДАЦИ ЗА МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА УЧЕНИКА 6. РАЗРЕДА (са решењима), свеска 41, 3. издање.

„КЕНГУР БЕЗ ГРАНИЦА“

Међународно такмичење „Кенгур без граница“ одржано је, свуда у Европи па и код нас, 21. марта 2013. године. У Србији је учествовало близу 20 000 ученика од 2. разреда основне до 4. разреда средње школе. Резултати такмичења су објављени на сајту

www.dms.org.rs/kengur

Награде најуспешнијим такмичарима ће бити уручене на посебно заказаним свечаностима.