Душан Ј. Симјановић, Ненад О. Весић

БРОЈ 2013 У АЛГЕБАРСКИМ ЗАДАЦИМА

Циљ овог рада је популаризација математике кроз решавање неких задатака у којима фигурише број 2013. Ти задаци су засновани на задацима представљеним у [1–5].

Рад почиње мотивационим задацима који се решавају једноставно, да би у наставку били представљени нешто компликованији задаци који се позивају на неке добро познате леме, теореме ...

1. Доказати да је број
$$2013^{2013} - 2013$$
дељив са 330.

Решење. Јасно је да је
$$2013^{2013} - 2013 = 2013 \cdot \left(2013^{2012} - 1\right).$$
Како је $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$, то је број $2013^{2013} - 2013$ дељив простим бројевима 3 и 11. Како је још и
$$2013^{2012} - 1 \equiv_{10} 3^{2012} - 1 = \left(3^4\right)^{2012} - 1 \equiv_{10} 1^{2012} - 1 = 0,$$
то је број $2013^{2012} - 1$ дељив са 10. Одатле, како су бројеви $3, 10$ и 11 узајамно прости, следи да је број $2013^{2013} - 2013$ дељив са $(3 \cdot 11) \cdot 10 = 330$.

2. Одредити просте бројеве p, q, r и s такве да је
$$p \cdot q \cdot (r + s) = 2013.$$

Решење. Како је $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$, то је
$$\{p, q, r + s\} = \{3, 11, 61\}.$$
Како не постоје два проста броја чији је збир једнак 3 или 11, то мора бити $r + s = 61$. Одатле следи да, како је 61 непаран број, један од простих бројева r и s мора бити паран а други непаран. Тачније, један од тих бројева је једнак 2 а други 59. Из претходног следи да је
$$\{p, q\} = \{3, 11\} \quad \text{и} \quad \{r, s\} = \{2, 59\}.$$

Овај рад је финансијски подржао пројекат 174012 Министарства просвете, науке и технолошког развоја у Влади Републике Србије.

Скуп решења је, дакле,

$$\mathbf{S}(p,q,r,s)=\{(3,11,2,59),(3,11,59,2),(11,3,2,59),(11,3,59,2)\}.$$

3. Доказати да је број $B = 888\ldots8$ који се састоји од $2012\cdot2013$ цифара 8 дељив бројевима $2,3,7,11,13,37$. Испитати да ли је број B дељив бројевима $4,8,16$.

Решење. У решавању овог задатка користиће се наредна лема.

Лемма. Сваки шестоцифрен број $A=\overline{aaaaaa}$ са цифрама једнаким a дељив је бројевима $3,7,11,13,37$, као и бројем a.

Доказ.

$$\begin{aligned}\overline{aaaaaa} &= 10^5a+10^4a+10^3a+10^2a+10a+a\\ &=(10^5+10^2)a+(10^4+10^1)a+(10^3+1)a\\ &=10^2(10^3+1)a+10^1(10^3+1)a+(10^3+1)a\\ &=(10^3+1)\cdot(10^2+10+1)a\\ &=1001\cdot111a\\ &=3\cdot7\cdot11\cdot13\cdot37\cdot a\end{aligned}$$

што је и требало доказати.

Како задати број B има $4050156 = 6\cdot675026$ цифара, може се записати у облику

$$\begin{aligned}B&=888888+10^6\cdot888888+\ldots+10^k\cdot888888=888888\cdot(1+10^6+\ldots+10^k)\\ &=3\cdot7\cdot11\cdot13\cdot37\cdot8\cdot(1+10^6+\cdots+10^k).\end{aligned}$$

Одавде је јасно да је број B дељив са $2,4,8$ као и са $3,7,11,13,37$. Број у загради у претходној једнакости је непаран па број B није дељив са 16.

4. Доказати да међу 1007 различитих природних пројева мањих од 2013 постоји бар један који је једнак збиру два различита броја међу тим бројевима.

Решење. Поређајмо по величини бројеве

$$a_1<\cdots<a_{1007}<2013.$$

Како је a_1 најмањи од њих, све разлике a_k-a_1 су природни бројеви. Скуп

$$S=\{a_2-a_1,\ldots,a_{1007}-a_1,a_1,\ldots,a_{1007}\}$$

садржи 2013 елемената (природних бројева) мањих од 2013, па по Дирихлеовом принципу следи да бар два броја из скупа S морају бити једнака. То је могуће једино ако је

$$a_k-a_1=a_n,$$

за неке k и n.

Ако је $n\neq1$, онда је $a_k=a_1+a_n$, па је доказ завршен.

Ако је $n = 1$, онда је $a_k = a_1 + a_1$, па из скупа S избацујемо елемент $a_k - a_1$ и добијамо скуп S_1 који има 2012 елемената (природних бројева мањих од 2013). Опет, на основу Дирихлеовог принципа, следи да међу бројевима скупа S_1 постоје бар два међусобно једнака. Нека је $a_p - a_1 = a_q$. Сада је сигурно $q \neq 1$, јер би у супротном било $a_p - a_1 = a_1$ и $a_k - a_1 = a_1$, дакле $a_p = a_k$, што је супротно претпоставци, тако да је $a_p = a_1 + a_q$.

5. Израчунати 2013. члан низа

$$1, 2, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 16, 17, 19, 21, 23, 25, \ldots \tag{1}$$

где иза јединице следе два парна броја, затим три непарна, онда четири парна, па пет непарних, ...

Да ли је број 2013 обухваћен низом (1), и ако јесте на ком се месту налази?

Решење. Чланови низа (1) могу се разврстати у групе тако да свака група има онолико чланова колики је њен индекс, односно

1. $G_1 = (1)$;
2. $G_2 = (2, 4)$;
3. $G_3 = (5, 7, 9)$;
4. $G_4 = (10, 12, 14, 16)$; ...

Свака група, осим прве, чини коначни аритметички низ са диференцијом 2, а први члан сваке групе је за 1 већи од последњег члана претходне групе, и последњи члан сваке групе једнак је квадрату индекса те групе.

Докажимо најпре да се у скупу G_k, $k \in \mathbf{N}$, налази k бројева исте парности као број k од којих је најмањи једнак $k^2 - 2k + 2$ а највећи k^2. Овај доказ ћемо извести математичком индукцијом по k.

– За $k = 1$ је $G_k = (1)$. Како је

$$1 = 1^2 - 2 \cdot 1 + 2 = 1^2$$

и како је 1 непаран број, у овом случају тврђење важи.

– (ИХ) Претпоставимо да тврђење важи за неко k.

– (ИД) У доказу ћемо разликовати два случаја:

(а) Број k је паран.

У том случају број $k^2 + 1$ је непаран. Како је $k^2 + 1 = (k+1)^2 - 2(k+1) + 2$ и $k^2 + 1 + 2 \cdot k = (k+1)^2$ тврђење је у овом случају доказано.

(б) Број k је непаран.

У том случају број $k^2 + 1$ је паран. С обзиром на то да је $k^2 + 1 = (k+1)^2 - 2(k+1) + 2$ и $k^2 + 1 + 2 \cdot k = (k+1)^2$ тврђење је и у овом случају доказано.

Нека се 2013. члан низа налази у групи са индексом k. Тада се у претходним групама налази

$$1 + 2 + \cdots + (k-1) = \frac{(k-1)k}{2}$$

чланова, па је

$$\frac{(k-1)\cdot k}{2} < 2013, \text{ одакле } (k-1)k < 4026, \text{ значи } k \in (\frac{1-\sqrt{16205}}{2}, \frac{1+\sqrt{16205}}{2}).$$

Како је број k највећи природан број који припада скупу решења претходне неједначине, следи да је $k = 63$. Индекс највећег члана 62. групе је $\frac{63\cdot 62}{2} = 1953$.

То значи да се 2013. члан низа (1) налази у 63. групи чији је први члан $62^2 + 1 = 3845$. Тај члан је, због $2013 - 1891 = 60$, 60. у 63. групи и износи

$$3845 + 2\cdot 59 = 3963.$$

Одговоримо и на питање везано за припадност броја 2013 низу (1). Како је

$$1937 = 45^2 - 2\cdot 45 + 2 < 2013 < 2045 = 45^2,$$

следи да је број 2013 обухваћен тим низом. Он је, у групи G_{45} и како је $2013 - 1937 = 76$ закључујемо да број 2013 у низу заузима $\frac{44\cdot 45}{2} + 76 = 1066$-то место.

6. У скупу целих бројева решити једначину

$$x^6 + y^6 - z^6 = 2013.$$

Решење. Могући остаци при дељењу целог броја x са 7 су $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Због тога су једини остаци при дељењу броја x^6 са 7, заправо, 0 и 1. Одатле следи да су остаци при дељењу броја $x^6+y^6-z^6$ при дељењу са 7 елементи скупа

$$R = \{0, -1, 1, 2\} = \{0, 1, 2, 6\}.$$

Како је

$$2013 \equiv_7 4 \notin R,$$

следи да дата једначина нема решења у скупу целих бројева.

7. За дати број $n \in \mathbf{N}$ наћи бар један пар природних бројева (x, y) за које важи

$$x^2 - 3y^2 = 2013^n.$$

Решење. Важи

$$2013 = 45^2 - 3\cdot 2^2 = (45 - 2\sqrt{3})(45 + 2\sqrt{3}).$$

Такође је и

$$(45 - 2\sqrt{3})^n = 45^n - \binom{n}{1}45^{n-1}\cdot 2\sqrt{3} + \cdots + (-1)^n(2\sqrt{3})^n;$$
$$(45 + 2\sqrt{3})^n = 45^n + \binom{n}{1}45^{n-1}\cdot 2\sqrt{3} + \cdots + (2\sqrt{3})^n.$$

Сада је

$$2013^n = (45 - 2\sqrt{3})^n(45 + 2\sqrt{3})^n = x^2 - (y\sqrt{2})^n,$$

одакле следи да је

$$x = \frac{1}{2}((45-2\sqrt{3})^n + (45+2\sqrt{3})^n) = 45^n + \binom{n}{2}45^{n-2}(2\sqrt{3})^2 + \cdots$$

$$y = \frac{1}{2\sqrt{3}}((45+2\sqrt{3})^n - (45-2\sqrt{3})^n) = \binom{n}{1}45^{n-1}\cdot 2 + \binom{n}{3}45^{n-3}\cdot 2^3\cdot 3 + \cdots .$$

8. У скупу природних бројева решити једначину

$$xyzt+xyz+yzt+ztx+xyt+xy+yz+zt+xz+yt+xt+x+y+z+t=2013.$$

Решење. Важи

$$\begin{aligned} xyzt+xyz+yzt+ztx+xyt+xy+yz+zt+xz+yt+xt+x+y+z+t+1 \\ =(x+1)\cdot(y+1)\cdot(z+1)\cdot(t+1)=2014=2\cdot 19\cdot 53. \end{aligned}$$

Како је за $x, y, z, t \in \mathbf{N}$ сваки од чинилаца $(x+1), (y+1), (z+1)$ и $t+1$ већи или једнак 2 и како број 2014 има тачно три различита проста делиоца, то је тај број немогуће представити као производ четири различита природна броја одакле, и из претходне факторизације, следи да ова једначина нема решења у скупу природних бројева.

9. Одредити све целе бројеве k за које постоје цели бројеви m и n такви да је

$$m^{2k} - n^{2k} = 2013. \tag{2}$$

За добијене вредности k решити одговарајуће једначине по m и n у скупу целих бројева.

Решење. Ако је $k = 0$, онда је

$$m^{2k} - n^{2k} = m^0 - n^0 = 1 \neq 2013,$$

што доказује да је $k \neq 0$.

Јасно је да је $m^{2k} = (-m)^{2k}$ за произвољан цео број $k \neq 0$ и произвољно $m \in \mathbf{N}$, одакле следи да ако је уређена тројка $(m_0, n_0, k_0) \in \mathbf{N}^3$ решење једначине (2) онда су све тројке облика $(\pm m_0, \pm n_0, k_0)$ решења те једначине. Због тога ћемо овај задатак у наставку свести на испитивање постојања природних бројева m и n који су, за евентуално k, решења једначине (2). Нагласимо још и то да у случају $k > 0$, како је $2013 > 0$ и функција $f(x) = x^k$ за $x \in (0, +\infty)$ растућа, мора важити неједнакост $m > n$.

Нека је $k < 0$. У том случају је неопходно да је $m, n \neq 0$. Јасно је да је, због $m \geqslant 1$ и $n \geqslant 0$,

$$m^{2k} - n^{2k} = \frac{1}{m^{2|k|}} - \frac{1}{n^{2|k|}} \leq 1 < 2013,$$

одакле следи да је k, уколико постоји, природан број. Размотримо наредне случајеве:

1. $k = 2l$, $l \in \mathbf{N}$.

Решимо најпре једначину

$$m^4 - n^4 = 2013$$

у скупу природних бројева.

Како је

$$m^4 - n^4 = (m-n)\cdot(m+n)\cdot(m^2+n^2) = 2013 = 3\cdot 11\cdot 61,$$

то због $m, n \geq 1$ следи да је

$$m-n \leq m+n \leq m^2+n^2,$$

што значи да је $m-n \in \{1,3\}$.

(а) $m-n=1$. Из факторизације броја 2013 и релација међу бројевима $m-n$, $m+n$ и m^2+n^2 следи да је

$$m+n \in \{3,11,33\}.$$

- $m+n=3$. У том случају је $m=2$ и $n=1$, што није решење једначине $m^4-n^4=2013$.
- $m+n=11$. У овом случају је $m=6$ и $n=5$, што такође није решење једначине $m^4-n^4=2013$.
- $m+n=33$. Сада је $m=17$ и $n=16$ одакле следи да је

$$m^4-n^4 = 17985 \neq 2013,$$

па ни у овом случају бројеви m и n нису решења једначине $m^4-n^4=2013$.

Из претходног следи да је $m-n\neq 1$.

(б) $m-n=3$. У овом случају је, због односа $m-n < m+n \leq m^2+n^2$ и факторизације броја 2013, $m+n=11$ и $m^2+n^2=61$. Из прве две једначине следи да је $m=7$ и $n=6$ али $7^2+6^2=85\neq 61$, па ни у овом случају једначина $m^4-n^4=2013$ нема решења у скупу природних бројева.

Одавде следи да је за произвољна два природна броја m и n

$$m^4-n^4 \neq 2013.$$

Из претходног јасно следи да је, за произвољно $k=2l$, $l\in\mathbf{N}$,

$$m^{2k}-n^{2k} = \left(m^l\right)^4 - \left(n^l\right)^4 \neq 2013,$$

2. $k=2l+1$, $l\in\mathbf{N}_0$.

У овом случају је

$$m^{2k}-n^{2k} = (m-n)\cdot(m+n)\times \underbrace{\left(m^{2l}-m^{2l-1}n+\cdots+n^{2l}\right)}_{A}\cdot\underbrace{\left(m^{2l}+m^{2l-1}n+\cdots+n^{2l}\right)}_{B}.$$

Приметимо најпре да за произвољан природан број u, $0\leq u\leq 2l-1$, важи да је

$$m^{2l-u}n^u - m^{2l-u-1}n^{u+1} = m^{2l-u-1}n^u(m-n) \geq m-n > 0.$$

Одатле следи да је $m-n < A$. Јасно је да је $m-n < m+n \leq B$, па како број 2013 има тачно четири различита делиоца, то је, у случају $l\geq 2$ (одакле следи да је $A \geq l+1$), а како је $m-n$ најмањи чинилац претходне факторизације, $m-n=1$ односно $m=n+1$. Размотримо тај случај.

$$\begin{aligned}
m^{2k}-n^{2k} &= (n+1)^{4l+2}-n^{4l+2} \\
&= \Big((n+1)^{2l+1}-n^{2l+1}\Big)\cdot\Big((n+1)^{2l+1}-n^{2l+1}\Big) \\
&= ((n+1)-n)\cdot\Big((n+1)^{2l}+(n+1)^{2l-1}\cdot n^1+\cdots+n^{2l}\Big)\times \\
&\quad ((n+1)+n)\cdot\Big((n+1)^{2l}-(n+1)^{2l-1}\cdot n^1+\cdots+n^{2l}\Big) \\
&= (2n+1)\cdot A\cdot B = 2013 = 3\cdot 11\cdot 61,
\end{aligned}$$

где је $A,B>1$. Како је број $2n+1$ делилац броја 2013 и како је $n\in\mathbf{N}$, то је $2n+1\in\{3,11,33,61,183\}$.

– $2n+1\in\{3,33,183\}$. Одатле следи да је $n\in\{1,16,91\}$.

Ако је $n=1$, једначина

$$(n+1)^{4l+2}-n^{4l+2}=2013$$

своди се на $2^{4l+2}=2014$, што је немогуће јер 2014 није степен ниједног природног броја.

Ако је $n=16$, једначина $(n+1)^{4l+2}-n^{4l+2}=2013$ своди се на

$$289^{2l+1}-256^{2l+1}=2013.$$

Како је $289^{2l+1}-256^{2l+1}\equiv_8 1$ и $2013\equiv_8 5\not\equiv_8 1$, то једначина

$$(n+1)^{4l+2}-n^{4l+2}=2013$$

ни у овом случају нема целобројних решења.

Уколико је пак $n=91$, једначина

$$(n+1)^{4l+2}-n^{4l+2}=2013$$

се своди на једначину

$$92^{4l+2}-91^{4l+2}=2013.$$

Како је $92^{4l+2}-91^{4l+2}\equiv_{13} 1$ и $2013\equiv_{13} 11$, то ни у овом случају не постоји целобројно решење једначине $(n+1)^{4l+2}-n^{4l+2}=2013$, чиме смо исцрпли све могућности овог подслучаја и дошли до резултата да ни у овом подслучају полазна једначина нема решења у скупу природних бројева.

– $2n+1\in\{11,61\}$. У овом случају је $n\in\{5,30\}$, тако да је

$$(n+1)^{4l+2}-n^{4l+2}\equiv_5 1.$$

Како је $2013\not\equiv_5 1$, то следи да ни у овом случају једначина (2) нема решења.

Из претходног следи да је $l\in\{0,1\}$, што значи да је $k\in\{1,3\}$. Размотримо још та два случаја.

– $l=1$. У овом случају, једначина (2) се трансформише у $m^6-n^6=2013$. Након факторизације леве стране ове једначине добија се да је

$$(m-n)\cdot(m+n)\cdot(m^2+mn+n^2)\cdot(m^2-mn+n^2)=3\cdot 11\cdot 61.$$

Одатле следи да је, из истог разлога као у једном делу претходног разматрања, $m = n + 1$. У овом случају, полазна једначина се трансформише у

$$(2n+1)\cdot(3n^2+3n+1)\cdot(n^2+n+1) = 2013.$$

Како је $3 \le 2n+1 \le n^2+n+1 \le 3n^2+3n+1$, то је

$$\begin{cases} 2n+1 = 3 \\ n^2+n+1 = 11 \\ 3n^2+3n+1 = 61 \end{cases}$$

Међутим, природан број n који задовољава све три претходне једначине не постоји па једначина (2) ни у овом случају нема решења.

– $l = 0$. У овом случају једначина (2) се трансформише у $m^2 - n^2 = 2013$. Након факторизације добија се да је

$$(m-n)\cdot(m+n) = 3\cdot 11\cdot 61,$$

одакле, када укључимо услов да је $m > n$, добијамо наредне случајеве:

$$\begin{cases} m-n=1; \\ m+n=2013 \end{cases} \implies (m,n) = (1007, 1006);$$

$$\begin{cases} m-n=3; \\ m+n=671 \end{cases} \implies (m,n) = (337, 334);$$

$$\begin{cases} m-n=11; \\ m+n=183 \end{cases} \implies (m,n) = (97, 86);$$

$$\begin{cases} m-n=33; \\ m+n=61 \end{cases} \implies (m,n) = (47, 14).$$

Из претходног следи да је скуп S решења (m,n,k) једначине (2) у скупу природних бројева

$$S = \{(1007,1006,1),(337,334,1),(97,86,1),(47,14,1)\}.$$

Како смо на почетку нагласили да уколико је тројка (m_0,n_0,k_0) решење једначине (2), онда су све тројке облика $(\pm m_0, \pm n_0, k_0)$ решења поменуте једнацине, то следи да је скуп решења једначине (2) једнак

$$\overline{S} = \{(\pm 1007,\pm 1006,1),(\pm 337,\pm 334,1),(\pm 97,\pm 86,1),(\pm 47,\pm 14,1)\}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Мићић, З. Каделбург, Д. Ђукић, *Увод у теорију бројева*, ДМС, Београд 2004.
2. С. Б. Бранковић, *Збирка решених задатака из математике за средње школе, одабрана поглавља*, Завод за уџбенике, Београд 2007.
3. *Тангента 10*, Збирка задатака објављених у рубрици „Задаци из математике“ часописа *Тангента* 1995–2005. године, ДМС, Београд 2006.
4. И. Долинка, *Елементарна теорија бројева: моји омиљени задаци*, ДМС, Београд 2007.
5. В. Балтић, Д. Ђукић, Ђ. Кртинић, И. Матић, *Припремни задаци за математичка такмичења средњошколаца у Србији*, ДМС, Београд 2008.

Природно-математички факултет Ниш, Србија

E-mail: dsimce@gmail.com, vesic.specijalac@gmail.com