Владимир Мишић, Вељко Ћировић, др Војислав Андрић

ВАРИЈАЦИЈЕ НА ЗАДАТУ ТЕМУ

Време које је пред нама је простор који ће несумњиво припасти креативним људима. Зато је развијање креативности вероватно најважнији задатак образовних институција у 21. веку. Психолози тврде да се креативност не може научити, већ само подстицати, увежбавати, тренирати ... Може ли се у том смислу у настави математике на плану развијања креативности код ученика нешто значајније учинити?

Циљ овога рада управо је да на једном примеру покаже неке могућности за развијање креативности код ученика, а пре свега на пољу:

- решавања проблема на више начина,
- производњи нових оригиналних проблема и
- увођењу ученика у њиховом узрасту примерена математичка истраживања.

1. Проблемска ситуација

У наставним програмима математике за гимназију (по програму Математичке гимназије и гимназије природно-математичког смера), између осталих налази се и наставна јединица о решавању неких класа диференцних једначина. У жељи да направимо актуелну, али и реалну проблемску ситуацију, ученицима смо предложили следећи проблем:

Функција $f\colon \mathbf{N}\setminus\{1,2\}\to\mathbf{N}_0$ је дата следећом таблицом:

p	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	$\cdots$
$f(p)$	0	2	5	9	14	20	27	35	44	54	65	77	$\cdots$

Списак захтева који се од ученика тражио није био мали, али је био изазован:

а) Која функционална једначина карактерише дату функцију?

б) Реши добијену диференцну једначину на што је могуће више начина.

в) Шта дата функција суштински представља (у области планиметрије)?

Овај текст је настао као резултат рада Методичке радионице коју реализује Подружница математичара Ваљево. Реализација наставног процеса који описујемо у овом раду потиче из трећег разреда Ваљевске гимназије (који ради по програму Математичке гимназије) у школској 2011/12 години.

г) Формулиши низ, тј. што је могуће више проблема који се односе на дату функцију, добијени резултат и геометријску интерпретацију функције.

д) Могу ли се слични проблеми пренети (формулисати) и у простору?

2. Нека решења проблема

Позитивна мотивација ученика постигнута је подстицањем њихове радозналости о чему се заправо у задатом проблему ради? Резултат озбиљног и систематског приступа решавању проблема је да су се појавила следећа решења.

Прво решење. Посматра се низ бројева $f(n)$ из горње таблице:

$$f(3)=0,\quad f(4)=2,\quad f(5)=5,\quad f(6)=9,\quad f(7)=14,\quad \dots$$

Анализирајући овај низ вредности функције долази се до закључка о правилности којом је задата функција:

$$f(n+1)=f(n)+n-1,\quad n\geqslant 3;\qquad f(3)=0. \tag{1}$$

С обзиром да троугао нема дијагонала, да их четвороугао има 2, петоугао 5, и тако даље, већ се овде могао наслутити закључак да се ради о функцији која је заправо добро позната величина D_n, којом се број дијагонала произвољног n-тоугла исказује као функција броја страница многоугла n, то јест:

$$f(n)=\frac{n(n-3)}{2}.$$

Доказ је потом изведен математичком индукцијом.

Јасно је да закључак важи за првих неколико вредности $n=3$, $n=4$, … , па је након претпоставке да тврђење важи за неко n проверена хипотеза за $n+1$:

$$\begin{aligned} f(n+1)&=f(n)+n-1=\frac{n(n-3)}{2}+\frac{2n-2}{2}=\frac{n^2-3n+2n-2}{2}\\ &=\frac{n^2+n-2}{2}=\frac{(n+1)(n-2)}{2}=\frac{(n+1)((n+1)-3)}{2}. \end{aligned}$$

Овим је показано да тврђење важи за свако n које је природан број већи од 2.

Јасно је да се до овог решење проблема дошло, елементарно и оригинално, без коришћења појма диференцних једначина и знања о методама за њихово решавање.

Друго решење. Након анализе функције $f(p)$, која је била карактеристична и о којој је било говора и у претходном решењу, добија се одговарајућа функционална једначина (1).

С обиром да је домен уочене функције подскуп скупа природних бројева, очигледно се ради о низу бројева и могуће је овој функционалној једначини придружити одговарајућу диференцну једначину тако што се, за почетак, уведе нова ознака за $f(n)$: $f(n)=x_n$.

Тада се, због чињенице да је $f(n) = f(n-1) + n - 2$, добија

$$x_n = x_{n-1} + n - 2.$$

Решавање ове једначине могуће је извести класичним поступком, као збир решења одговарајуће хомогене једначине и одговарајућег партикуларног решења.

За хомогену једначину $x_n = x_{n-1}$, решење се тражи у облику $x_n^h = c\lambda^n$, које се лако налази, и то је $x_n^h = C$, где је C нека константа.

Једно партикуларно решење полазне једначине се тражи у облику $x_n^p = an^2 + bn + c$, где су a, b и c реалне константе. Замењујући ово у полазну једначину, добија се

$$a(n+2)^2 + b(n+1) + c = an^2 + bn + c + n - 1.$$

Изједначавањем коефицијената уз одговарајуће степене променљиве n на обема странама, следи да је $a = \dfrac{1}{2}$, $b = -\dfrac{3}{2}$ и $c \in \mathbf{R}$. Поједностављења ради, може се узети, на пример, $c = 0$, па је партикуларно решење

$$x_n^p = \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n.$$

Сада се решење може записати у облику $x_n = x_n^h + x_n^p$, то јест,

$$x_n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n + C.$$

Провером за $n = 4$ (ради лакшег рачуна), добија се $C = 0$.

Коначно, следи да је $f(n) = \dfrac{1}{2}n^2 - \dfrac{3}{2}n = \dfrac{n(n-3)}{2} = D_n$.

Треће решење. Из анализе функције $f(p)$ добија се одговарајућа функционална једначина (1).

Узимајући да је $f(n) = a_n$, долази се до одговарајуће диференцне једначине

$$a_{n+1} = a_n + n - 1, \text{ тј. } a_{n+1} - a_n = n - 1, \quad n \geqslant 3; \quad a_3 = 0.$$

За њено решавање уочава се следећи низ једнакости

$a_4 - a_3 = 2,\ a_5 - a_4 = 3,\ a_6 - a_5 = 4, \ldots,\ a_{n-1} - a_{n-2} = n-3,\ a_n - a_{n-1} = n-2.$

Ако се сада све ове једнакости саберу, добија се

$$a_n = a_3 + 2 + 3 + \cdots + (n-2), \quad \text{то јест} \quad a_n = 0 + \sum_{j=2}^{n-2} j.$$

Односно, $a_n = \sum\limits_{j=1}^{n} j - 1 - (n-1) - n$. Како је вредност познатог збира $\sum\limits_{j=1}^{n} j = \dfrac{n(n+1)}{2}$, то је

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2} - 2n = \frac{n(n+1) - 4n}{2} = \frac{n(n-3)}{2},$$

што представља решење дела (б) датог задатка.

Суштински, дата функција (низ) има своју геометријску интерпретацију, и у том слислу представља формулу за рачунање броја дијагонала конвексног n-тоугла. То јест $f(n) = D_n = \dfrac{n(n-3)}{2}$.

3. Формулације неких нових задатака који проистичу из таблице за број дијагонала многоугла

У даљем току рада ученицима је сугерисано да покушају да, користећи дату таблицу и чињеницу да таблицом описана функција представља број дијагонала датог многоугла, формулишу нове математичке проблеме. Анализом таблице која је дата и узимајући у обзир њено суштинско значење, ученици су методом најједноставнијег посматрања и извођењем одређених аналогија, формирали читав низ проблема, од којих наводимо само најкарактеристичније.

Задатак 1. Број дијагонала многоугла пет пута је већи од броја његових страница. Колико дијагонала има тај многоугао?

Коментар. Задатак је настао из чињенице да тринаестоугао има 65 дијагонала. Проблем се своди на линеарну једначину и има јединствено решење: $p = 13$, $D_{13} = 65$.

Задатак 2. Када се број страница p-тоугла повећа за 5, онда се број дијагонала повећа за 25. Одредити о ком многоуглу се ради.

Коментар. Задатак је настао из чињенице да четвороугао има 2, а деветоугао 27 дијагонала и у суштини проблем се своди на линеарну једначину и има јединствено решење: $p = 4$, $D_4 = 2$, $p + 5 = 9$, $D_9 = 27$.

Задатак 3. Ако се број страница p-тоугла удвостручи, онда се број дијагонала повећа седам пута. Одредити о ком p-тоуглу је реч.

Коментар. Задатак је настао из чињенице да петоугао има 5, а десетоугао 35 дијагонала. Проблем се своди на линеарну једначину и има јединствено решење: $p = 5$, $D_5 = 5$, $2p = 10$, $D_{10} = 35$.

Задатак 4. Када се број страница p-тоугла повећа за три, број дијагонала многоугла се удвостручи. Одредити p и утврдити да ли је решење јединствено.

Коментар. Задатак је настао из чињенице да деветоугао има 27, а дванаестоугао 54 дијагонале. Проблем се своди на линеарну једначину и има јединствено решење: $p = 9$, $D_9 = 27$, $p + 3 = 12$, $D_{12} = 54$.

Задатак 5. Да ли постоји многоугао коме се број дијагонала утростручи када се број темена повећа за три?

Коментар. Задатак је настао из чињенице да шестоугао има 9, а деветоугао 27 дијагонала. Проблем се своди на линеарну једначину и има јединствено решење: $p = 6$, $D_6 = 9$, $p + 3 = 9$, $D_9 = 27$.

Задатак 6. Многоугао са m страница има 100 дијагонала више од многоугла који има p страница. Колико таквих многоуглова има?

Коментар. Задатак је настао као резултат знатижеље ученика, тј. упитаности да ли постоје два многоугла чији се број дијагонала разликује за 100?

Решење. Услов задатка се може записати као

$$\frac{m(m-3)}{2} - \frac{p(p-3)}{2} = 100.$$

Дакле, $m^2-3m-p^2+3p=200$, па је $m^2-p^2+3p-3m=(m-p)(m+p-3)=200$. Како је $200=1\cdot 200=2\cdot 100=4\cdot 50=5\cdot 40=8\cdot 25=10\cdot 20$, $m-p<m+p-3$ и како су бројеви $m-p$ и $m+p-3$ различите парности, то су могући следећи случајеви:

а) $m-p=1$ и $m+p-3=200$, $m=102$, $p=101$, $D_{101}=4949$ и $D_{102}=5049$.

б) $m-p=5$ и $m+p-3=40$, $m=24$, $p=19$, $D_{19}=152$ и $D_{24}=252$.

в) $m-p=8$ и $m+p-3=25$, $m=18$, $p=10$, $D_{10}=35$ и $D_{18}=135$.

Задатак 7. На папиру су нацртани многоугао који има m страница и многоугао који има p страница. Пребројано је 18 страница и 58 дијагонала. О којим многоугловима се ради?

Коментар. Задатак је настао као резултат експеримента ученика, тј. из случајног цртежа на коме су била нацртана два многоугла (седмоугао и једанаестоугао). Своди се на систем квадратних једначина и има јединствено решење: $m=7$, $p=11$, $D_7=14$ и $D_{11}=44$.

4. Истраживачки рад ученика

Већ је речено да је новоформулисаних задатака било више, а рад на даљем развијању креативности налагао нам је да учинимо нешто више и на, узрасту ученика примереним, математичим истраживањима. У том смислу ученицима је објашњено да се од њих очекује да проблеме које смо до сада посматрали посматрају на нешто вишем нивоу сложености, уопштеније или из равни преместе у простор.

Приказујемо најзанимљивије резултате који су добијени.

Проблем 1. Број дијагонала многоугла k пута је већи од броја његових страница (k је природан број). Прокоментариши добијено решење (уопштење 1. задатка)

Решење. Нека тражени многоугао има n страница. Из услова задатка је $\dfrac{n(n-3)}{2}=kn$, па је $n-3=2k$ и $n=2k+3$. Дакле, за сваки природан број k постоји многоугао који има k пута више дијагонала него страница. То веома добро илуструје и следећа табела:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$n=2k+3$	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31
D_n	5	14	27	44	65	90	119	152	189	230	275	324	377	434

Из табеле добијене у проблему 1. намеће се следећи проблем.

Проблем 2. Шестоугао има $9=3^2$ дијагонала, а број дијагонала многоугла који има 27 страница је $324=18^2$. Да ли у низу D_n има коначно или бесконачно много бројева који су потпуни квадрати?

Решење. Суштина датог проблема је у одговору на питање да ли једначина $\dfrac{n(n-3)}{2}=y^2$ има коначно или бесконачно много решења. Множењем претходне једначине са 8 добија се $4n^2 - 12n = 8y^2$, односно $(2n-3)^2 = 8y^2 + 9$. Када се уведе смена $2n - 3 = x$ једначина постаје $x^2 - 8y^2 = 9$. Добијена једначина је Диофантова једначина Пеловог типа $(x^2 - py^2 = n)$.

Једно решење добијене једначине је $x_1 = 9$, $y_1 = 3$. Како је $x_0 = 3$, $y_0 = 1$ једно решење основне Пелове једначине $x^2 - 8y^2 = 1$, то су сва решења дате једначине дефинисана рекурентним формулама

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_0x_n + py_0y_n = x_0x_n + 8y_0y_n = 3x_n + 8y_n,\\
y_{n+1} &= y_0x_n + x_0y_n = x_n + 3y_n.
\end{aligned}
$$

Неколико првих решења дато је у следећој табели.

n	D_n	y	y^2
6	9	3	9
27	324	18	324
150	11025	105	11025
867	374544	612	374544
5046	12723489	3567	12723489
294036	432224100	20790	432224100

Проблем 3. Ако се број страница n-тоугла повећа a пута, онда се број дијагонала повећа b пута (a и b су природни бројеви). Реши и дискутуј дати проблем.

Решее. Овај проблем је уствари уопштење задатка 3 и има доста једноставно решење, али и врло занимљиву дискусију. Наиме, услов задатка се може записати као

$$\frac{an(an-3)}{2} = b \cdot \frac{n(n-3)}{2},$$

тј. $n = \dfrac{3(b-a)}{b-a^2}$. Нека је $b < a$. Тада је $b < a^2$. Како је $n \geqslant 4$, то је $\dfrac{3(b-a)}{b-a^2} \geqslant 4$. Због $b - a^2 < 0$, следи да је $3b - 3a \leqslant 4b - 4a^2$, тј. $b \geqslant 4a^2 - 3a > 4a - 3a = a$. Противуречност. Дакле, $b > a$, па је и $b > a^2$. Од могућих класа решења, издвајају се две:

- Ако је $b - a^2 = 1$, онда је $b = a^2 + 1$ и тада је $n = 3(a^2 + 1 - a)$.
- Ако је $b - a^2 = 3$, онда је $b = a^2 + 3$ и тада је $n = a^2 + 3 - a$.

Ово, наравно, није крај дискусије јер треба размотрити случајеве када је израз $3(b-a)$ дељив са $b - a^2$.

Проблем 4. Деветоугао има 27, а дванаестоугао 54 дијагонале. У овом случају многоугао који има m страница има два пута више дијагонала од многоугла који има p страница. Да ли таквих парова многоуглова има коначно или бесконачно много?

Решење. Из услова задатка следи $\dfrac{m(m-3)}{2} = 2\cdot\dfrac{p(p-3)}{2}$. Дакле, $m^2-3m = 2p^2-6p$. Ако се једначина помножи са 4, добија се $(2m-3)^2-9-2(2p-3)^2+18 = 0$. Када се уведе смена $2m-3 = x$, $2p-3 = y$, добија се једначина $x^2-2y^2 = -9$. Једно решење добијене једначине је $x_1 = 21$, $y_1 = 15$. Како је $x_0 = 3$, $y_0 = 2$ једно решење основне Пелове једначине $x^2-2y^2 = 1$, то су сва решења дате једначине одређена рекурентним формулама:

$$x_{n+1} = x_0x_n + 2y_0y_n = 3x_n + 4y_n,$$
$$y_{n+1} = y_0x_n + x_0y_n = 2x_n + 3y_n.$$

Неколико првих, од бесконачно много, решења дато је у следећој табели.

n	x_n	y_n	x_{n+1}	y_{n+1}	m	p	D_m	D_p
0			21	15	12	9	54	27
1	21	15	123	87	63	45	1890	945
2	123	87	717	507	360	255	64260	32130
3	717	507	4179	2955	2091	1479	2183004	1091502
4	4179	2955	24357	17223	12180	8613	74157930	37078965
5	24357	17223	141963	100383	70983	50193	2519186670	1259593335

Проблем 5. За које вредности природног броја k постоје многоуглови са m, односно p темена такви да је $D_m - D_p = k$ (уопштење 6. задатка)?

Решење. Из услова задатка следи да је $\dfrac{m(m-3)}{2} - \dfrac{p(p-3)}{2} = k$. После трансформације (као у задатку 6) добија се да је $(m-p)(m+p-3) = 2k$. Очигледно је да број решења овог проблема зависи од природе броја k, то јест од броја његових делилаца. Како је $2k$ паран број, како је $m-p < m+p-3$ и како су бројеви $m-p$ и $m+p-3$ различите парности, то су могући разни случајеви, али је сигурно да проблем има бар једно решење:

$$m-p = 1, \quad m+p-3 = 2k, \text{ одакле је } m = k+2, \quad p = k+1.$$

За даље истраживање би било интересантно одговорити на питања:

- За које све вредности природног броја k проблем има само једно решење?
- Колико има решења ако је k дат у канонском облику $k = p_1^{\alpha_1}\cdots p_i^{\alpha_i}$?

Проблем 6. Да ли постоје три узастопна члана низа $f(n) = \dfrac{n(n-3)}{2}$ таква да важи једнакост $f(n)+f(n+1) = f(n+2)$, тј. постоје ли три многоугла таква да је $D_n + D_{n+1} = D_{n+2}$?

Решење. Из услова проблема се добија да је

$$\frac{n(n-3)}{2} + \frac{(n+1)(n-2)}{2} = \frac{(n+2)(n-1)}{2},$$

а то значи да је $n^2-3n+n^2-n-2 = n^2+n-2$, тј. $n^2-5n = 0$. Како број страница многоугла не може бити 0, једино решење је $n = 5$. Провером се утврђује да је заиста $D_5 + D_6 = 5 + 9 = 14 = D_7$.

Проблем 7. Да ли постоје четири узастопна члана низа $f(n) = \dfrac{n(n-3)}{2}$ таква да важи једнакост $f(n) + f(n+1) + f(n+2) = f(n+3)$, тј. постоје ли четири многоугла таква да је $D_n + D_{n+1} + D_{n+2} = D_{n+3}$?

Проблем 8. Да ли постоји члан низа $f(n) = \dfrac{n(n-3)}{2}$ који је аритметичка средина чланова који су за по k места у низу удаљени од $f(n)$, на леву, односно десну страну?

Решење. Треба проверити постоје ли n и k такви да важи

$$\frac{n(n-3)}{2} = \frac{(n-k)(n-k-3)}{2} + \frac{(n+k)(n+k-3)}{2}.$$

После краћег разматрања добија се да је $2k^2 = 0$, тј. $k = 0$, па не постоји такав члан низа. То истовремено значи и да у низу многоуглова не постоји многоугао који има дијагонала колико износи аритметичка средина броја дијагонала „суседних“ многоуглова.

Проблем 9. Одредити сва решења једначине $f(n) + f(n+2) + f(n+4) + f(n+6) = f(n+10)$.

Решење. После трансформација полазне једнакости добија се квадратна једначина $3n^2 - 5n - 50 = 0$, а њено једино целобројно решење је $n = 5$.

Проблем 10. Одредити експлицитни облик и геометријску интерпретацију функција $g(n)$ и $h(n)$ задатих таблично на следећи начин:

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	$\cdots$
$f(n)$	0	4	10	18	28	40	54	70	88	108	130	154	$\cdots$
$g(n)$	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286	364	$\cdots$

Решење овог проблема је слично претходним. Функције $g(n)$ и $h(n)$ имају такође јасну геометријску интерпретацију. Наиме, $g(n)$ представља број просторних дијагонала n-тостране призме, а $h(n)$ – број равни одређених са n тачака, таквих да су сваке четири неколинеарне. Рекурентне везе, односно функционалне једначине до којих се овде долази су:

$$g(n) = g(n-1) + 2(n-2),$$
$$h(n) = h(n-2) + (n-2)^2.$$

5. Закључак

Претходна разматрања настала су као варијације на тему једне једноставне функционалне једначине моделиране на примеру зависности између броја страница и броја дијагонала многоугла. Дата тема је била повод да ученици поред решавања иницијалног проблема на што више начина, на основу посматрања задате функционалне везе и конкретних вредности функције произведу интересантне задатке везане за број страница и дијагонала многоугла. Међутим, добијени задаци индуковали су и даљи рад на добијеној материји и формулисање нешто сложенијих проблема, добијање извесних уопштења и измештање основног проблема из равни у простор.

Верујемо да је приказана наставна ситуација добар пример развијања креативности у настави математике и да колегама-наставницима математике у основним и средњим школама може бити солидан модел за сличне наставне подухвате.

Наводимо и добро познати проблем који може (на различитим нивоима) бити реализован и у старијим разредима основне школе (примена алгебарских трансформација у 7. разреду) и у средњој школи (аритметички низ), а могу резултирати и новим варијацијама на задату тему.

Дати су збирови $S = 1 + 2 + \cdots + n$, $S_n = 1 + 3 + \cdots + (2n - 1)$ и $S_p = 2 + 4 + \cdots + 2n$.

- Израчунати дате суме на што је могуће више начина.
- Може ли бројевна вредност датих сума бити 2013 или број чије су све цифре једнаке?
- Може ли се и како датим сумама придружити нека геометријска интерпретација?
- Могу ли се и како дате суме повезати са диференцним једначинама?
- Колико потпуних квадрата садржи свака од наведених сума?
- Формулиши низ, тј. што је могуће више проблема и њихових уопштења који се односе на претходно решаване задатке.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Андрић, ***Диофантове једначине – Приручник за додатну наставу математике***, Круг, Београд, 2006.
2. J. Cofman, *What to Solve? Problems and Suggestions for Young Mathematicians*, Oxford Sience Publications, Oxford, 1990.
3. З. Каделбург, В. Мићић, С. Огњановић, ***Анализа са алгебром, уџбеник за трећи разред Математичке гимназије***, Круг, Београд, 2011.
4. С. Максић, ***Развијање креативности у школи***, Институт за педагошка истраживања, Београд, 2006.
5. В. Мићић, ***Правила налажења чланова низа***, Настава математике, LVII 3–4, Београд 2012.
6. Дж. Пойа, ***Математическое открытие***, «Наука», Москва, 1976 (превод са енглеског).

Ваљевска гимназија

E-mail: `voja.andric@gmail.com`