Др Шефкет Арсланагић

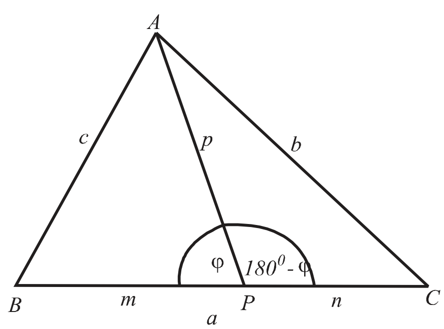
СТЈУАРТОВА ТЕОРЕМА ИЗ ГЕОМЕТРИЈЕ ТРОУГЛА И ЊЕНА ПРИМЈЕНА

У овом чланку ћемо формулисати и доказати Стјуартову теорему, а затим ћемо кроз више примјера дати њену примјену.

Теорема 1 [Стјуарт[1], 1746.] *Нека тачка P припада страници BC троугла ABC и при томе је $a = \overline{BC}$, $b = \overline{CA}$, $c = \overline{AB}$, $m = \overline{BP}$, $n = \overline{PC}$ и $p = \overline{AP}$. Тада важи једнакост*

$$a(p^2 + mn) = b^2 m + c^2 n. \tag{1}$$

Доказ. Нека је $\varphi = \measuredangle APB$, дакле $\measuredangle APC = 180^\circ - \varphi$ (сл. 1).



Слика 1

Примјеном косинусне теореме на троуглове APB и APC добијамо (с обзиром да је $\cos(180^\circ - \varphi) = -\cos\varphi$):

$$c^2 = p^2 + m^2 - 2pm\cos\varphi, \quad b^2 = p^2 + n^2 + 2pn\cos\varphi.$$

Множећи ове неједнакости са n и m редом, те сабирајући новодобијене једнакости, слиједи

$$nc^2 + mb^2 = np^2 + m^2 n + mp^2 + mn^2,$$

[1]Matthew Stewart (1717–1785), шкотски математичар

односно $(m+n)p^2 + mn(m+n) = b^2m + c^2n$, те због $m+n=a$,

$$a(p^2+mn) = b^2m + c^2n,$$

што је једнакост (1) коју доказујемо. ■

Сада ћемо кроз неколико примјера дати веома ефектну и корисну примјену ове теореме.

Примјер 1. Нека је тачка P средиште странице BC, тј. $\overline{BP} = \overline{PC} = a/2$; тада је дуж $\overline{AP} = m_a$ тежишница троугла ABC из тјемена A. Сада из (1) слиједи да је $a\left(m_a^2 + \frac{1}{4}a^2\right) = \frac{1}{2}ab^2 + \frac{1}{2}ac^2$, а одавде

$$m_a^2 = \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}c^2, \tag{2}$$

тј.

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}.$$

Аналогно се добија да је

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2c^2+2a^2-b^2} \quad \text{и} \quad m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}.$$

Примјер 2. Нека је сада дуж $\overline{AP} = s_\alpha$ симетрала угла $\measuredangle BAC = \alpha$. По теореми о симетрали унутрашњег угла троугла ABC, имамо $\frac{\overline{BP}}{\overline{CP}} = \frac{c}{b}$, одакле редом добијамо:

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{CP}} + 1 = \frac{c}{b} + 1, \qquad \frac{\overline{BP}+\overline{CP}}{\overline{CP}} = \frac{b+c}{b},$$

$$\frac{a}{\overline{CP}} = \frac{b+c}{b}, \qquad \overline{CP} = \frac{ab}{a+c},$$

и аналогно $\overline{BP} = \frac{ac}{b+c}$. Замењујући у релацију (1) добијамо да је

$$a\left[s_\alpha^2 + \frac{a^2bc}{(b+c)^2}\right] = b^2 \cdot \frac{ac}{b+c} + c^2 \cdot \frac{ab}{b+c}.$$

Одавде се добија да је $s_\alpha^2 = \frac{bc}{(b+c)^2}[(b+c)^2 - a^2]$, тј.

$$s_\alpha = \frac{\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{(b+c+a)(b+c-a)}.$$

Стављајући $2s = a+b+c$ добијамо да је

$$s_\alpha = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{s(s-a)}. \tag{3}$$

Аналогно се изводи да је:

$$s_\beta = \frac{2\sqrt{ca}}{c+a}\sqrt{s(s-b)}, \quad s_\gamma = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\sqrt{s(s-c)}.$$

Примјер 3. Важи једнакост

$$\overline{OT}^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2), \tag{4}$$

гдје је тачка T тежиште троугла, тачка O центар и R радијус кружнице описане око $\triangle ABC$.

Рјешење. Сада је дуж AA' тежишница из тјемена A троугла, те $T \in AA'$, $\overline{AT} = \frac{2}{3}m_a$, $\overline{A'T} = \frac{1}{3}m_a$ (сл. 2). Примјењујући Стјуартову теорему, тј. релацију (1) на $\triangle OAA'$, добијамо

$$m_a\left(\overline{OT}^2 + \frac{2}{3}m_a \cdot \frac{1}{3}m_a\right) = \overline{OA}^2 \cdot \frac{1}{3}m_a + \overline{OA'}^2 \cdot \frac{2}{3}m_a. \tag{5}$$

Из правоуглог $\triangle OCA'$ имамо

$$\overline{OA'}^2 = R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2. \tag{6}$$

Сада из (5) и (6) добијамо да је

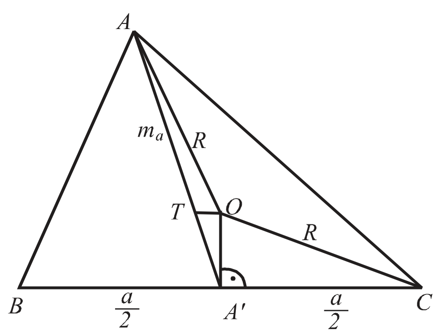
$$\overline{OT}^2 + \frac{2}{9}m_a^2 = \frac{1}{3}R^2 + \frac{2}{3}\left(R^2 - \frac{a^2}{4}\right),$$

а одавде због (2) редом слиједи

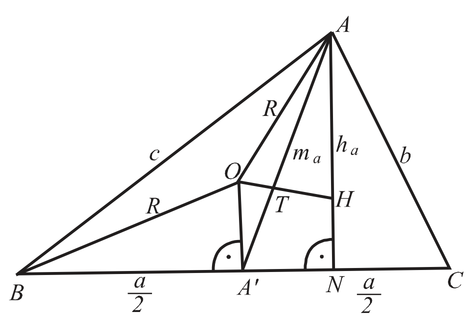
$$\overline{OT}^2 + \frac{2}{9}\left(\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}a^2\right) = R^2 - \frac{1}{6}a^2,$$

$$\overline{OT}^2 = R^2 - \frac{1}{6}a^2 - \frac{1}{9}b^2 - \frac{1}{9}c^2 + \frac{1}{18}a^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2),$$

а ово је релација (4) коју доказујемо.



Слика 2



Слика 3

Примјер 4. Важи једнакост

$$\overline{OH}^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2), \tag{7}$$

гдје је H ортоцентар троугла, O центар и R радијус кружнице описане око $\triangle ABC$.

Рјешење. Овдје ћемо користити чињеницу да су тачке O, T и H колинеарне (Ојлерова[2] права) и да важи једнакост

$$\overline{OT} : \overline{TH} = 1 : 2 \tag{8}$$

(сл. 3). Из (4) и (8) непосредно слиједи да је

$$\overline{OH}^2 = (3\,\overline{OT})^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2),$$

дакле једнакост (7).

Посљедица 1. Због $\overline{OT}^2 \geqslant 0$, односно $\overline{OH}^2 \geqslant 0$, из (4), односно (7), добијамо неједнакост

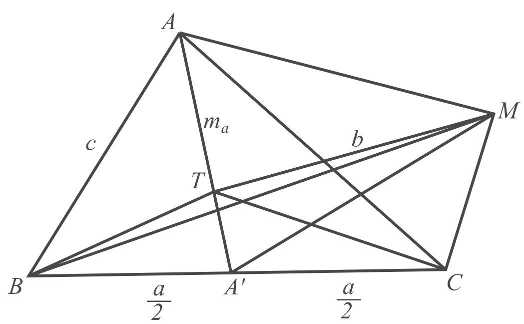
$$a^2 + b^2 + c^2 \leqslant 9R^2.$$

Примјер 5. Нека је T тежиште, а M произвољна тачка у равни троугла ABC. Тада важи једнакост

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 = 3\,\overline{MT}^2 + \overline{TA}^2 + \overline{TB}^2 + \overline{TC}^2. \tag{9}$$

Ово тврђење је у математичкој литератури познато као *Лајбницова*[3] *теорема.*

Рјешење. Не умањујући општост, узећемо да је тачка M ван троугла ABC (сл. 4).



Слика 4

Тачка T је тежиште троугла ABC и важи $\overline{AT} = \dfrac{2}{3}m_a$ и $\overline{A'T} = \dfrac{1}{3}m_a$. Примјењујући Стјуартову теорему (1) на $\triangle MAA'$, добијамо

$$m_a\left(\overline{MT}^2 + \frac{1}{3}m_a \cdot \frac{2}{3}m_a\right) = \frac{1}{3}m_a \cdot \overline{MA}^2 + \frac{2}{3}m_a \cdot \overline{MA'}^2,$$

[2] Leonhard Euler (1707–1783), швајцарски математичар

[3] Gottfried Wilhelm Leinbitz (1646–1716), њемачки математичар

а одавде након дјељења са m_a,

$$\overline{MT}^2 = \frac{1}{3}\overline{MA}^2 + \frac{2}{3}\overline{MA'}^2 - \frac{2}{9}m_a^2. \tag{10}$$

Дуж MA' је тежишница троугла MBC па имамо на основу (2) да је

$$\overline{MA'}^2 = \frac{1}{2}\overline{MB}^2 + \frac{1}{2}\overline{MC}^2 - \frac{1}{4}\overline{BC}^2. \tag{11}$$

Сада из (10) и (11) слиједи

$$3\,\overline{MT}^2 = \overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 - \frac{1}{2}\overline{BC}^2 - \frac{2}{3}\overline{AA'}^2,$$

а одавде због (2), тј. $\frac{1}{2}\overline{BC}^2 = \overline{TB}^2 + \overline{TC}^2 - 2\,\overline{TA'}^2$, као и $\overline{AA'} = \frac{3}{2}\overline{TA}$ и $\overline{TA} = \frac{1}{2}\overline{TA}$, добијамо

$$3\,\overline{MT}^2 = \overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 - \left(\overline{TB}^2 + \overline{TC}^2 - \frac{1}{2}\overline{TA}^2\right) - \frac{3}{2}\overline{TA}^2,$$

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 = 3\,\overline{MT}^2 + \overline{TA}^2 + \overline{TB}^2 + \overline{TC}^2,$$

дакле једнакост (9).

Примјер 6. У троуглу ABC тачке D, E и F припадају редом страницама BC, CA и AB и при томе је $AD \cap BE \cap CF = \{P\}$, тако да је $\overline{AP} = \overline{PD} = 6$, $\overline{EP} = 3$, $\overline{PB} = 9$ и $\overline{CF} = 20$. Израчунати површину троугла ABC.

Рјешење. Да бисмо решили овај задатак доказаћемо једну помоћну теорему која је у математичкој литератури позната као *Ојлер-Жергонова*[4] *теорема*, а која гласи:

За односе $u = \dfrac{\overline{AK}}{\overline{KX}}$, $v = \dfrac{\overline{BK}}{\overline{KY}}$, $w = \dfrac{\overline{CK}}{\overline{KZ}}$, гдје је K пресјечна тачка правих AX, BY и CZ ($X \in BC$, $Y \in CA$, $Z \in AB$), важи једнакост

$$\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1+v} + \frac{1}{1+w} = 1. \tag{12}$$

Доказ. Користећи обрасце за површину троугла добијамо (сл. 5):

$$u = \frac{\overline{AK}}{\overline{KX}} = \frac{P_1 + P_2}{P_3} = \frac{P_5 + P_6}{P_4},$$

$$v = \frac{\overline{BK}}{\overline{KY}} = \frac{P_3 + P_4}{P_5} = \frac{P_1 + P_2}{P_6},$$

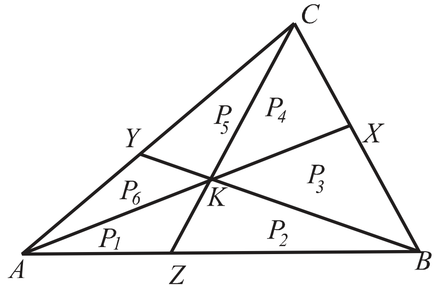
$$w = \frac{\overline{CK}}{\overline{KZ}} = \frac{P_5 + P_6}{P_1} = \frac{P_3 + P_4}{P_2},$$

[4] Joseph Diaz Gergonne (1771–1859), француски математичар и астроном

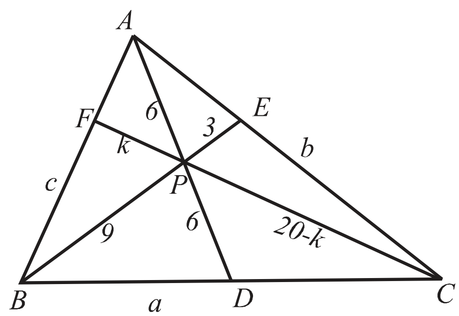
а одавде због $P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6$,

$$\frac{1}{1+u} = \frac{P_3}{P_1+P_2+P_3} = \frac{P_4}{P_4+P_5+P_6} = \frac{P_3+P_4}{P},$$
$$\frac{1}{1+v} = \frac{P_5}{P_3+P_4+P_5} = \frac{P_6}{P_6+P_1+P_2} = \frac{P_5+P_6}{P},$$
$$\frac{1}{1+w} = \frac{P_1}{P_5+P_6+P_1} = \frac{P_2}{P_2+P_3+P_4} = \frac{P_1+P_2}{P}.$$

Сабирањем изведених једнакости добија се једнакост (12).



Слика 5



Слика 6

Сада ћемо прећи на рјешење примјера 6. Са слике 6 имамо да је

$$u = \frac{\overline{AP}}{\overline{PD}} = 1, \qquad v = \frac{\overline{BP}}{\overline{PE}} = 3.$$

Користећи Ојлер-Жергонову теорему, тј. релацију (12), добијамо да је

$$w = \frac{\overline{CP}}{\overline{PE}} = \frac{u+v+2}{uv-1} = \frac{1+3+2}{3-1} = 3.$$

Сада је $\overline{CP} = 3\,\overline{PF}$, па због $20 = \overline{CF} = \overline{CP} + \overline{PF}$ имамо $4\,\overline{PF} = 20$, одакле је $\overline{PF} = 5$ и $\overline{CP} = 15$. Даље добијамо:

$$x = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{1+v}{1+w} = 1, \quad y = \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = \frac{1+w}{1+u} = 2, \quad z = \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = \frac{1+u}{1+v} = \frac{1}{2}.$$

Користећи ове вриједности за x, y, z можемо примјенити Стјуартову теорему на троуглове $\triangle PBC$, $\triangle PCA$ и $\triangle PAB$, па добијамо:

$$\overline{PD}^2 = p\cdot\overline{PC}^2 + q\cdot\overline{PB}^2 - pqa^2, \quad \text{гдје је} \quad p = q = \frac{1}{2},$$
$$\overline{PE}^2 = p\cdot\overline{PA}^2 + q\cdot\overline{PC}^2 - pqb^2, \quad \text{гдје је} \quad p = \frac{2}{3},\ \ q = \frac{1}{3},$$
$$\overline{PF}^2 = p\cdot\overline{PB}^2 + q\cdot\overline{PA}^2 - pqc^2, \quad \text{гдје је} \quad p = \frac{1}{3},\ \ q = \frac{2}{3}.$$

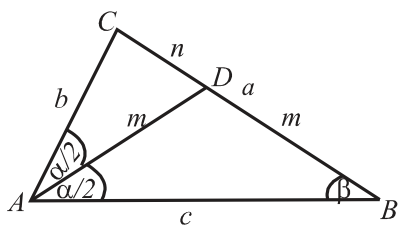
Одаве слиједи да је $a^2 = 468$, $b^2 = 405$ и $c^2 = 117$. Користећи Херонов образац за површину троугла добијамо да је

$$16\,P^2_{\triangle ABC} = 2(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) - (a^4 + b^4 + c^4) = 186\,624,$$

а одавде $P_{\triangle ABC} = 108$.

Примјер 7. Доказати да у троуглу ABC важи еквиваленција

$$\alpha = 2\beta \iff a^2 = b(b+c).$$



Сл. 7

Рјешење. 1° Нека је $\alpha = 2\beta$ и нека је AD симетрала угла α, гдје $D \in BC$ (сл. 7). Како је $\alpha/2 = \beta$, то је $\triangle ABD$ једнакокрак, па је $\overline{AD} = \overline{BD} = m = \dfrac{ac}{b+c}$ (по теореми о симетрали унутрашњег угла у $\triangle ABC$). Сада је $m + n = a$, па по Стјуартовој теореми (1) добијамо

$$a(m^2 + mn) = mb^2 + nc^2 = (b^2 - c^2)m + ac^2,$$

одакле је $a^2m = (b^2 - c^2)m + ac^2$ и

$$a^2 = (b-c)(b+c) + \frac{ac^2(b+c)}{ac} = b(b+c),$$

што је требало доказати.

2° Из косинусне теореме имамо уз услов $a^2 = b(b+c)$ да је

$$\cos\alpha = \frac{c^2 - (a^2 - b^2)}{2bc} = \frac{c^2 - b(b+c) + b^2}{2bc} = \frac{1}{2}\left(\frac{c}{b} - 1\right),$$
$$\cos\beta = \frac{c^2 + (a^2 - b^2)}{2ca} = \frac{c^2 + b(b+c) - b^2}{2ca} = \frac{b+c}{2a}.$$

Сада добијамо да је

$$4\cos^2\beta - 2 = \frac{(b+c)^2}{a^2} - 2 = \frac{(b+c)^2}{b(b+c)} - 2 = \frac{b+c}{b} - 2 = \frac{c}{b} - 1 = 2\cos\alpha,$$

одакле је $2\cos^2\beta - 1 = \cos\alpha$, $\cos 2\beta = \cos\alpha$ и $\alpha = 2\beta$, што је требало доказати.

ЛИТЕРАТУРА

1. Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo 2004.
2. H.S.M. Coxeter, S. Greitzer, *Geometry revisited*, Mathematical Association of America, Washington 1967.
3. E. Specht, *Geometria-Scientiae Atlantis*, Otto-van-Guericke-Universität, Magdeburg 2001.

Природно-математички факултет, Сарајево, БиХ

E-mail: asefket@unsa.ba