**Др Шефкет Арсланагић**

# ЈЕДНА ГЕОМЕТРИЈСКА НЕЈЕДНАКОСТ У ТРОУГЛУ

У овом раду ћемо се позабавити доказима геометријске неједнакости у троуглу која гласи

$$2\overline{IO} \geqslant \overline{IH}, \tag{1}$$

гдје су тачке $H$, $I$ и $O$, редом, ортоцентар, центар уписане и центар описане кружнице троугла $ABC$.

Најприје наводимо познате обрасце за међусобне удаљености наведених тачака (о овоме видјети нпр. [1], стр. 432):

$$\overline{IO}^2 = R^2 - 2Rr, \tag{2}$$

$$\overline{IH}^2 = 2r^2 - 4R^2 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma. \tag{3}$$

На основу ових једнакости, неједнакост (1) постаје

$$4(R^2 - 2Rr) \geqslant 2r^2 - 4R^2 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma,$$

тј.

$$\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma \geqslant \frac{r^2 + 4Rr - 2R^2}{2R^2}. \tag{4}$$

Даћемо доказ неједнакости (4).

Користићемо познату тригонометријску једнакост

$$\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma = \frac{s^2 - (2R + r)^2}{4R^2}, \tag{5}$$

гдје је $s$ полуобим троугла. Она иначе слиједи из Вијетових правила и чињенице да су $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ коријени једначине

$$4R^2t^3 - 4R(R + r)t^2 + (s^2 + r^2 - 4R^2)t + (2R + r)^2 - s^2 = 0.$$

Због једнакости (5), неједнакост (4) ће бити доказана ако докажемо неједнакост

$$\frac{s^2 - (2R + r)^2}{4R^2} \geqslant \frac{r^2 + 4Rr - 2R^2}{2R^2},$$

што је еквивалентно са

$$s^2 \geqslant 3r(4R+r). \tag{6}$$

Доказ ове неједнакости се налази у [2] као неједнакост 5.5. Овим је неједнаксот (4) доказана, што значи да је и дата неједнакост (1) тачна.

Једнакост у (4) важи ако и само ако је $\alpha = \beta = \gamma = \dfrac{\pi}{3}$, те $R = 2r$, тј. када је у питању једнакостранични троугао.

Сада ћемо дати још један доказ неједнакости (1). За овај доказ ћемо користити једну лему чији се доказ налази у [3], стр. 278–280, а која гласи:

*У троуглу $ABC$ тачка $I$ је центар уписане кружнице, $a, b, c$ су дужине страница $BC$, $CA$, $AB$, редом. Тада за произвољну тачку $M$ у равни троугла $ABC$ важи једнакост*

$$a \cdot \overline{MA}^2 + b \cdot \overline{MB}^2 + c \cdot \overline{MC}^2 = abc + (a+b+c) \cdot \overline{MI}^2. \tag{7}$$

Ми ћемо овдје дати један нешто дужи доказ ове леме. Уствари, доказаћеко да је једнакост (7) непосредна посљедица једнакости

$$\sum a \cdot \overline{MA}^2 = \left(\sum a\right)\overline{MI}^2 + \sum a \cdot \overline{IA}^2, \tag{8}$$

гдје се сумирања врше по свим страницама троугла. Најприје ћемо доказати једну важну познату једнакост неопходну за доказ једнакости (8). То је једнакост

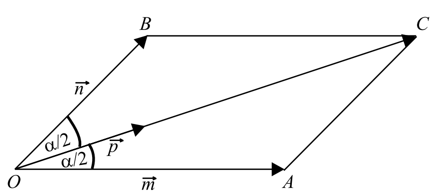
$$\sum a \cdot \overrightarrow{IA} = \vec{0}. \tag{9}$$

*Доказ.* Нека јединични вектори $\overrightarrow{m}$ и $\overrightarrow{n}$ имају заједнички почетак $O$. Нека је $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{m}$ и $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{n}$. Вектор $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{m} + \overrightarrow{n}$ лежи на симетрали угла $\alpha$ између вектора $\overrightarrow{m}$ и $\overrightarrow{n}$, а његов јединични вектор $\overrightarrow{p}$ је (сл. 1)

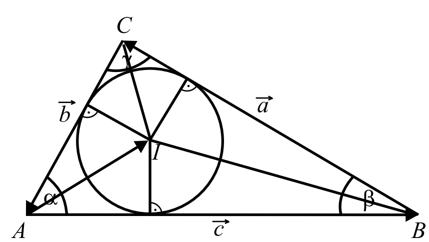
$$\overrightarrow{p} = \frac{\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OC}|} = \frac{\overrightarrow{m} + \overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{OC}|} = \frac{\overrightarrow{m} + \overrightarrow{n}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}, \tag{10}$$

јер је

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{OC}| &= |\overrightarrow{m} + \overrightarrow{n}| = \sqrt{(\overrightarrow{m} + \overrightarrow{n})^2} = \sqrt{\overrightarrow{m}^2 + \overrightarrow{n}^2 + 2\overrightarrow{m} \cdot \overrightarrow{n}} \\
&= \sqrt{|\overrightarrow{m}|^2 + |\overrightarrow{n}|^2 + 2|\overrightarrow{m}| \cdot |\overrightarrow{n}| \cos\alpha} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos\alpha} \\
&= \sqrt{2(1+\cos\alpha)} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}\, \cos\frac{\alpha}{2} = 2\cos\frac{\alpha}{2}.
\end{aligned}$$



Слика 1



Слика 2

Ако су $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ унутрашњи углови троугла $ABC$, а $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{b}$ вектори његових страница, онда према (10), вектори

$$\frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{\overrightarrow{c}}{c}-\frac{\overrightarrow{b}}{b}\right),\quad \frac{1}{2\cos\frac{\beta}{2}}\left(\frac{\overrightarrow{a}}{a}-\frac{\overrightarrow{c}}{c}\right),\quad \frac{1}{2\cos\frac{\gamma}{2}}\left(\frac{\overrightarrow{b}}{b}-\frac{\overrightarrow{a}}{a}\right)$$

(гдје је $a=|\overrightarrow{a}|$, $b=|\overrightarrow{b}|$, $c=|\overrightarrow{c}|$) представљају јединичне векторе симетрала унутрашњих углова $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ троугла $ABC$ (сл. 2). Тачка $I$ је пресјек тих симетрала. Зато је

$$\overrightarrow{AI}=k\left(\frac{\overrightarrow{c}}{c}-\frac{\overrightarrow{b}}{b}\right)=k\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{c}-\frac{\overrightarrow{CA}}{b}\right)=k\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{c}+\frac{\overrightarrow{AC}}{b}\right),$$

$$\overrightarrow{BI}=m\left(\frac{\overrightarrow{a}}{a}-\frac{\overrightarrow{c}}{c}\right)=m\left(\frac{\overrightarrow{BC}}{a}-\frac{\overrightarrow{AB}}{c}\right)=m\left(\frac{\overrightarrow{BC}}{a}+\frac{\overrightarrow{BA}}{c}\right),$$

при чему се скалари $k$ и $m$ одређују на сљедећи начин. Пошто је $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI}$, слиједи једнакост

$$k\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{c}+\frac{\overrightarrow{AC}}{b}\right)=\overrightarrow{AB}+m\left(\frac{\overrightarrow{BC}}{a}+\frac{\overrightarrow{BA}}{c}\right),$$

односно

$$k\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{c}+\frac{\overrightarrow{AC}}{b}\right)=\overrightarrow{AB}+m\left(\frac{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}}{a}+\frac{\overrightarrow{BA}}{c}\right),$$

тј.

$$\left(\frac{k}{c}+\frac{m}{a}+\frac{m}{c}-1\right)\overrightarrow{AB}+\left(\frac{k}{b}-\frac{m}{a}\right)\overrightarrow{AC}=\vec{0}.$$

Посљедња једнакост је могућа (пошто су вектори $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ неколинеарни), само ако је

$$\frac{k}{c}+\frac{m}{a}+\frac{m}{c}-1=0 \quad \text{и} \quad \frac{k}{b}-\frac{m}{a}=0.$$

Решавањем добијеног система по $k$ и $m$ добија се да је

$$m=\frac{ac}{a+b+c} \quad \text{и} \quad k=\frac{bc}{a+b+c}.$$

Дакле, сада имамо

$$\overrightarrow{AI}=\frac{bc}{a+b+c}\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{c}+\frac{\overrightarrow{AC}}{b}\right)=\frac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{a+b+c}.$$

Аналогно добијамо да је

$$\overrightarrow{BI}=\frac{c\,\overrightarrow{BC}+a\,\overrightarrow{BA}}{a+b+c} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{CI}=\frac{b\,\overrightarrow{CB}+a\,\overrightarrow{CA}}{a+b+c}.$$

Сада имамо

$$\begin{aligned}\sum a\,\overrightarrow{IA} &= a\,\overrightarrow{IA} + b\,\overrightarrow{IB} + c\,\overrightarrow{IC} = -(a\,\overrightarrow{AI} + b\,\overrightarrow{BI} + c\,\overrightarrow{CI})\\ &= -\frac{ab\,\overrightarrow{AB} + ac\,\overrightarrow{AC} + bc\,\overrightarrow{BC} + ab\,\overrightarrow{BA} + bc\,\overrightarrow{CB} + ac\,\overrightarrow{CA}}{a+b+c} = \vec{0}.\end{aligned}$$

Овим је једнакост (9) доказана.

Сада ћемо дати два доказа једнакости

$$\sum a\,\overline{IA}^2 = abc \tag{11}$$

која нам је потребна за доказ једнакости (7).

*Доказ 1.* Познато је да за троугао важе сљедеће једнакости:

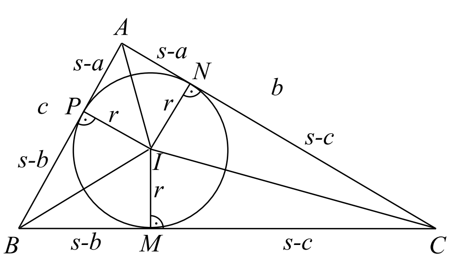
$$\begin{aligned}\sum a &= a+b+c = 2s,\\ \sum bc &= ab+bc+ca = s^2+r^2+4Rr,\\ \sum a^2 &= a^2+b^2+c^2 = 2(s^2-r^2-4Rr),\\ \sum a^3 &= 2s(s^2-3r^2-6Rr),\\ abc &= 4RP,\ P = rs,\ abc = 4sRr,\end{aligned}$$

гдје је $s$ полуобим, $P$ површина, $R$ полупречник описане, а $r$ полупречник уписане кружнице. Користећи Питагорину теорему (сл. 3), имамо сада да је

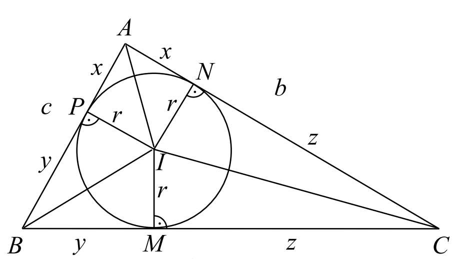
$$\begin{aligned}\sum a\,\overline{IA}^2 &= a\,\overline{IA}^2 + b\,\overline{IB}^2 + c\,\overline{IC}^2\\ &= a[(s-a)^2+r^2] + b[(s-b)^2+r^2] + c[(s-c)^2+r^2]\\ &= (a+b+c)r^2 + a(s^2-2as+a^2) + b(s^2-2bs+b^2) + c(s^2-2cs+c^2)\\ &= 2sr^2 + (a+b+c)s^2 - 2(a^2+b^2+c^2)s + a^3+b^3+c^3.\end{aligned}$$

Одавде, користећи горње обрасце, слиједи:

$$\begin{aligned}\sum a\,\overline{IA}^2 &= 2sr^2 + 2s^3 - 2s\cdot 2(s^2-r^2-4Rr) + 2s(s^3-3r^2-6Rr)\\ &= 2sr^2 + 2s^3 - 4s^3 + 4sr^2 + 16Rrs + 2s^3 - 6sr^2 - 12Rrs\\ &= 4Rrs = abc.\end{aligned}$$




Слика 3




Слика 4

*Доказ 2.* Нека је $\overline{AN} = \overline{AP} = x$, $\overline{BP} = \overline{BM} = y$ и $\overline{CM} = \overline{CN} = z$; тада је (сл. 4) $2s = a + b + c = 2(x + y + z)$, тј. $s = x + y + z$, те $a = z + y$, $b = x+z$ и $c = x+y$. Сада на основу Херонове формуле за површину троугла $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ и формуле $P = rs$ добијамо да је $P = \sqrt{xyz(x+y+z)}$ и $P = r(x + y + z)$, те одавде

$$r = \sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}}.$$

Примјеном Питагорине теореме на троугао $ANI$ добијамо

$$\overline{IA}^2 = \overline{AN}^2 + \overline{IN}^2 = x^2 + \frac{xyz}{x+y+z} = \frac{x(x+y)(x+z)}{x+y+z},$$

а одавде

$$a\,\overline{IA}^2 = \frac{x(x+y)(y+z)(x+z)}{x+y+z}.$$

Аналогно добијамо:

$$b\,\overline{IB}^2 = \frac{y(x+y)(y+z)(x+z)}{x+y+z}, \quad c\,\overline{IC}^2 = \frac{z(x+y)(y+z)(x+z)}{x+y+z}.$$

Након сабирања посљедње три једнакости слиједи да је

$$\sum a\,\overline{IA}^2 = (x+y)(y+z)(z+x) = abc,$$

што је и требало доказати.

Сада имамо

$$\sum a\,\overrightarrow{MA}^2 = \sum a(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 = \left(\sum a\right)\overrightarrow{MI}^2 + 2\,\overrightarrow{MI}\cdot\sum a\,\overrightarrow{IA} + \sum a\,\overrightarrow{IA}^2,$$

а одавде због $\overrightarrow{MA}^2 = \overline{MA}^2$, $\overrightarrow{MI}^2 = \overline{MI}^2$, $\overrightarrow{IA}^2 = \overline{IA}^2$, те једнакости (9), добијамо

$$\sum a\,\overline{MA}^2 = \left(\sum a\right)\overline{MI}^2 + \sum a\,\overline{IA}^2,$$

а ово је једнакост (8) коју је требало доказати.

Из (8), користећи једнакост (11), добијамо

$$\sum a\,\overline{MA}^2 = \left(\sum a\right)\overline{MI}^2 + abc,$$

тј. једнакост (7). Овим је лема доказана.

Сада узимајући у (7) да је $M \equiv O$, односно $M \equiv H$, добијамо:

$$a\,\overline{OA}^2 + b\,\overline{OB}^2 + c\,\overline{OC}^2 = abc + (a+b+c)\overline{OI}^2,$$
$$a\,\overline{HA}^2 + b\,\overline{HB}^2 + c\,\overline{HC}^2 = abc + (a+b+c)\overline{HI}^2,$$

а одавде стављајући да је $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = R$,

$$(a+b+c)\overline{IO}^2 = (a+b+c)R^2 - abc,$$
$$(a+b+c)\overline{IH}^2 = a\,\overline{HA}^2 + b\,\overline{HB}^2 + c\,\overline{HC}^2 - abc.$$

Значи, да бисмо доказали неједнакост (1), уствари треба доказати да вриједи неједнакост

$$4[(a+b+c)R^2 - abc] \geqslant a\,\overline{HA}^2 + b\,\overline{HB}^2 + c\,\overline{HC}^2 - abc,$$

која је еквивалентна са

$$4(a+b+c)R^2 \geqslant a\,\overline{HA}^2 + b\,\overline{HB}^2 + c\,\overline{HC}^2 + 3abc.$$

На основу синусне теореме и чињенице да је $\overline{HA} = 2R\cos\alpha$, $\overline{HB} = 2R\cos\beta$, $\overline{HC} = 2R\cos\gamma$, претходна неједнакост је даље редом еквивалентна сљедећим неједнакостима:

$$\begin{aligned} 8R^3(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma) &\geqslant 8R^3(\sin\alpha\cos^2\alpha+\sin\beta\cos^2\beta+\sin\gamma\cos^2\gamma)\\ &\quad + 24R^3\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma,\\ \sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma &\geqslant \sin\alpha(1-\sin^2\alpha)+\sin\beta(1-\sin^2\beta)+\sin\varphi(1-\sin^2\gamma)\\ &\quad + 3\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma,\\ \sin^3\alpha+\sin^3\beta+\sin^3\gamma &\geqslant 3\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma, \end{aligned}$$

а ова посљедња неједнакост је очигледно посљедица неједнакости између аритметичке и геометријске средине три позитивна броја.

Дакле, дата неједнакост (1) је доказана. Једнакост важи ако и само ако је $\alpha = \beta = \gamma = \dfrac{\pi}{3}$, тј. ако је у питању једнакостранични троугао.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.
2. O. Bottema et al., *Geometric Inequalities*, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1969.
3. D.S. Mitrinović, J.E. Pečarić, V. Volenec, *Recent Advances in Geometric Inequalities*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 1989.

Природно-математички факултет, Сарајево, Босна и Херцеговина

*E-mail*: asefket@pmf.unsa.ba