Ненад О. Весић, Душан Ј. Симјановић

ЈОШ ЈЕДАН ПРИСТУП РЕШАВАЊУ ЈЕДНАЧИНА У СКУПУ РЕАЛНИХ БРОЈЕВА

У овом раду ће бити приказана метода решавања једначина која повезује знање ученика о интегралима, изводима и особинама функција. Посматрајмо најпре сасвим једноставну једначину $x^3 = a^3$ за неко $a \in \mathbb{R}$. Реалан број $x_0 = a$ је очигледно решење те једначине. Функција $F(x) = x^3 - a^3$ је строго растућа на читавом скупу реалних бројева, па нема више од једне нуле. Како је $F(a) = 0$, то је $x_0 = a$ једина нула функције $F(x)$, па самим тим и једино решење једначине $x^3 = a^3$. Овакаво једноставно резоновање применићемо сада на решавање сложенијих једначина.

Наредни задатак ћемо решити на два начина: применом парцијалне интеграције и смене и методом коришћеном на примеру претхонде једначине.

Пример 1. Решити једначину

$$\int_0^x \frac{t \operatorname{arctg} t}{\sqrt{1+t^2}}\, dt = \sqrt{1+x^2} \operatorname{arctg} x.$$

Решење. Први начин. Овај поступак је нешто сложенији, али и поступак који средњошколци углавном примењују.

$$\int_0^x \frac{t \operatorname{arctg} t}{\sqrt{1+t^2}}\, dt = \left| \begin{array}{c} u = \operatorname{arctg} t \Rightarrow du = \dfrac{1}{1+t^2} dt \\ dv = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}\, dt \Rightarrow v = \sqrt{1+t^2} \end{array} \right|$$

$$= \sqrt{1+t^2} \operatorname{arctg} t |_0^x - \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\, dt = \sqrt{1+x^2} \operatorname{arctg} x - \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\, dt.$$

Наша једначина сада постаје

$$\sqrt{1+x^2} \operatorname{arctg} x - \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\, dt = \sqrt{1+x^2} \operatorname{arctg} x,$$

односно

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\, dt = 0.$$

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt = \begin{vmatrix} t = \operatorname{sh} u \\ dt = \operatorname{ch} u du \\ t = 0 \Rightarrow u = 0 \\ t = x \Rightarrow u = u_x = \operatorname{sh}^{-1}(x) \end{vmatrix} = \int_0^{u_x} \frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} u}\, du$$
$$= \ln(\operatorname{ch} u)\big|_0^{u_x} = \ln(\operatorname{ch}(\operatorname{sh}^{-1}(x))) = 0.$$

Из претходног имамо да је
$$\operatorname{ch}(\operatorname{sh}^{-1}(x)) = 1.$$

Применом неједнакости између аритметичке и геометријске средине, добијамо наредну неједнакост

$$\operatorname{ch} m = \frac{1}{2}\left(e^m + e^{-m}\right) \geq \sqrt{e^m \cdot e^{-m}} = \sqrt{1} = 1.$$

Претходна једнакост важи ако и само ако је $e^m = e^{-m}$, односно ако и само ако је $m = 0$.

Сада је јасно да мора бити $\operatorname{ch}(\operatorname{sh}^{-1}(x)) = 1$ односно $\operatorname{sh}^{-1}(x) = 0$, то јест $x = 0$ је једино решење ове једначине (због $\operatorname{sh}(0) = 0$ и бијективности функције $\operatorname{sh} x$).

Други начин. Овај поступак је краћи и једноставнији од претходног. Примењујемо поступак представљен у случају једначине $x^3 = a^3$. Користимо теорему:

Ако је функција f непрекидна на сегменту $[p, q]$, тада је функција $\Phi(x) = \int_p^x f(t)\, dt$ диференцијабилна на $[p, q]$ и важи

$$\Phi'(x) = \left(\int_p^x f(t)\, dt\right)' = f(x), \quad x \in [p, q].$$

Уочимо функцију

$$F(x) = \int_0^x \frac{t \operatorname{arctg} t}{\sqrt{1+t^2}}\, dt - \sqrt{1+x^2}\, \operatorname{arctg} x.$$

Ова функција је диференцијабилна (због непрекидности подинтегралне функције) па је

$$F'(x) = \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} < 0.$$

Из претходног закључујемо да је функција F строго опадајућа па не може имати више од једне нуле (сва решења наше једначине су нуле функције F). Како је $F(0) = 0$ то је $x = 0$ једино решење наше једначине. $\triangle$

Интеграл из претходног задатка се релативно лако израчунава. Наредни задатак је пример једначине са интегралом који је немогуће израчунати без развијања функције у бесконачни ред.

Пример 2. Решити једначину

$$\int_0^x t^2 e^{t^2}\,dt = \frac{1}{2} x e^{x^2}$$

и доказати да је површина P дела равни ограниченог графиком функције

$$f(x) = \int_0^x t^2 e^{t^2}\,dt$$

и правим

$$x = 0,\ x = 0{,}6 \text{ и } y = 0$$

мања од $0{,}3 \cdot e^{0{,}36}$.

Решење. Решимо једначину $F(x) = 0$, где је

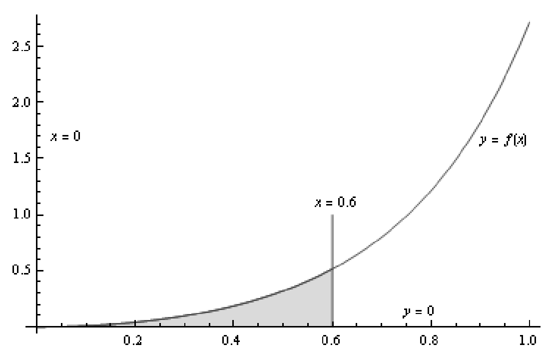
$$F(x) = \int_0^x t^2 e^{t^2}\,dt - \frac{1}{2} x e^{x^2}.$$

Због непрекидности подинтегралне функције и диференцијабилности функција $y = x$ и $y = e^{x^2}$, функција $F(x)$ је диференцијабилна па имамо да је

$$F'(x) = x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2}\left(e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2}\right) = x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2} e^{x^2} - x^2 e^{x^2} = -\frac{1}{2} e^{x^2} < 0.$$

Одавде закључујемо да је функција F строго опадајућа и као таква не може имати више од једне нуле. Како су сва решења наше једначине истовремено и нуле функције F и како је $F(0) = 0$, то закључујемо да је $x = 0$ једино решење наше једначине.

Други део задатка је директна последица особине функције F (она је строго опадајућа функција) и решења претходне једначине.



Ми заправо дискутујемо обележену површину (види слику) која је једнака

$$P = \int_0^{0{,}6} x^2 e^{x^2}\,dx.$$

Како је функција F строго опадајућа и како је $F(0)=0$, имамо да је

$$0 = F(0) > F(0{,}6),$$

односно

$$F(0{,}6) = P - 0{,}3 \cdot e^{0{,}36} < 0, \text{ тј. } P < 0{,}3 \cdot e^{0{,}36}. \quad \triangle$$

У наредним задацима даћемо још неколико примера једначина сличних једначини из претходног задатка.

Пример 3. У скупу реалних бројева решити једначину

$$\int_0^x (1-t)e^{t^2}\,dt = -xe^{x^2}.$$

Решење. Дефинишимо функцију $F(x)$ помоћу

$$F(x) = \int_0^x (1-t)e^{t^2}\,dt + xe^{x^2}.$$

Због диференцијабилности функције F имамо да је

$$F'(x) = (1-x)e^{x^2} + e^{x^2} + 2x^2e^{x^2} = e^{x^2}(2x^2 - x + 2).$$

Како је дискриминанта квадратне функције $y = 2x^2 - x + 2$ једнака

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = -15 < 0,$$

то имамо да је $y = 2x^2 - x + 2 > 0$ за свако $x \in \mathbb{R}$, односно због $e^{x^2} > 0$ је $F'(x) > 0$ за свако $x \in \mathbb{R}$. То значи да је функција F строго растућа, тј. не може имати више од једне нуле. Како је још и $F(0) = 0$, то је $x = 0$ једино решење наше једначине. $\triangle$

Пример 4. Нека су p и q реални бројеви такви да је $p > q > q - 1 > 0$. Одредити све ненегативне реалне бројеве x за које важи

$$\int_0^x t^p e^{t^q}\,dt = \frac{1}{q}x^{p-q+1}e^{x^q}.$$

Решење. У овом задатку функција F је дефинисана помоћу

$$F(x) = \int_0^x t^p e^{t^q}\,dt - \frac{1}{q}x^{p-q+1}e^{x^q},$$

па је

$$F'(x) = x^p e^{x^q} - \frac{1}{q}(p-q+1)x^{p-q} \cdot e^{x^q} - \frac{1}{q}x^{p-q+1} \cdot q \cdot x^{q-1} \cdot e^{x^q}.$$

Због $p > q > q - 1 > 0$ важи

1. $p - q > 0$, 2. $q - 1 > 0$, 3. $p - q + 1 > p - q > 0$,

па су за $x \geq 0$ дефинисани степени

1. x^{p-q} 2. x^{q-1}, 3. x^{p-q+1}.

Сређивањем $F'(x)$ добијамо да је

$$F'(x) = x^p e^{x^q} - \frac{p-q+1}{q} x^{p-q} e^{x^q} - x^p e^{x^q} = -\frac{p-q+1}{q} x^{p-q} e^{x^q} \leq 0$$

Како је $F'(x) = 0$ само за $x = 0$, функција F је строго опадајућа. Како је још и $F(0) = 0$, то је $x = 0$ једино решење наше једначине. $\triangle$

У претходним задацима, функција F је била строго монотона (строго опадајућа или строго растућа) на читавом скупу $\mathbb{R}$. Наредни задатак је пример једначине за коју функција F није строго монотона на читавом скупу реалних бројева.

Пример 5. У скупу реалних бројева решити једначину

$$\int_0^x t e^{t^4}\, dt = \frac{1}{2} x^2 e^{x^4}.$$

Решење. У овом задатку одговарајућа функција $F(x)$ је

$$F(x) = \int_0^x t e^{t^4}\, dt - \frac{1}{2} x^2 e^{x^4}.$$

Једноставним рачуном добијамо да је

$$F'(x) = x e^{x^4} - x e^{x^4} - 2x^5 e^{x^4} = -2x^5 e^{x^4}.$$

Одавде добијамо да је

1. $F'(x) > 0$, за $x < 0$, 2. $F'(x) < 0$, за $x > 0$ и 3. $F'(x) = 0$, за $x = 0$.

Како је функција $F(x)$ непрекидна на читавом скупу $\mathbb{R}$, функција $F(x)$ достиже строги максимум у тачки $x = 0$ (функција $F(x)$ је строго растућа на интервалу $(-\infty, 0)$, односно опадајућа на интервалу $(0, +\infty)$). Како је још и $F(0) = 0$, то је $x = 0$ једино решење ове једначине. $\triangle$

Наредни задатак, који дајемо без решења, могуће је решити на два начина (применом резултата добијеног у примеру 4, односно применом поступка решавања оваквих једначина представљеним у овом раду). Тај задатак могуће је искористити и као задатак за утврђивање поступка решавања једначина алгоритмом представљеним на претходним странама.

Задатак. Одредити све оне $x \in \mathbb{R}$ за које је

$$\int_0^x t^{10} e^{t^2}\, dt = \frac{1}{2} x^9 e^{x^2}.$$

Аутори захваљују проф. др Снежани Илић, редовном професору Природно-математичког факултета у Нишу, на помоћи и корисним саветима код методолошког уређења овог рада.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Ушћумлић, П. Миличић, *Збирка задатака из више математике I*, 14. издање, Научна књига, Београд, 1989.

Природно-математички факултет, Ниш

E-mail: vesic.specijalac@gmail.com, dsimce@gmail.com